嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：伍方「 拾」圓

關 鍵 詞：三角形的心、尤拉線、圓內接四邊形

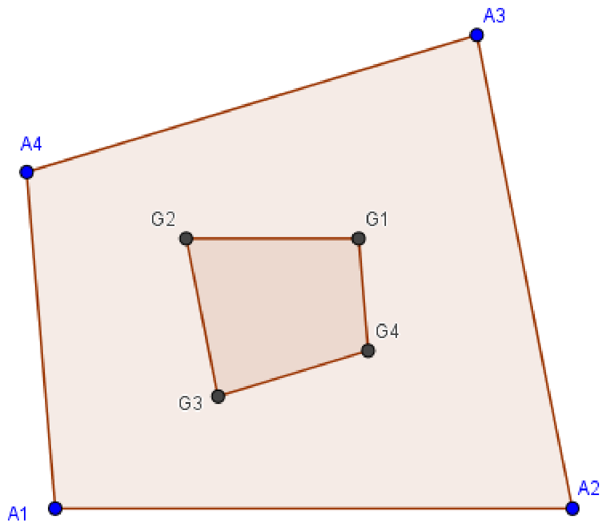
編　　號：

摘要

壹、研究動機

在一次上課中，老師給了我這個問題::

「若在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，G_1、G_2、G_3、G_4 分別為△ $A_2A_3A_4$ ，△ $A_1A_3A_4$，△ $A_1A_2A_4$，△ $A_1A_2A_3$ 的重心 ，請問四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 和四邊形 $G_1\,G_2\,G_3\,G_4$，有何關係?」把關係式找出來後，深感這個問題很有發展性，希望把這個問題推廣到三角形各心，看是否有何結論。



貳、研究目的

一、研究特殊四邊形中各「心」四邊形的性質。

二、研究圓內接四邊形中各「心」四邊形的性質。

三、研究圓內接四邊形中各「心」四邊形的關係。

四、研究圓內接四邊形中各「心」四邊形位移中心和關係。

五、伍方「拾」圓的關係。

六、將圓內四邊形推廣至三維空間。

參、研究設備與器材

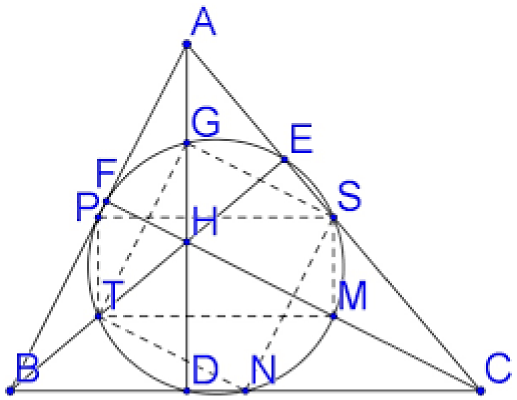
紙、筆、電腦、Geogebra 繪圖軟體

肆、研究過程及方法

一、文獻探討:

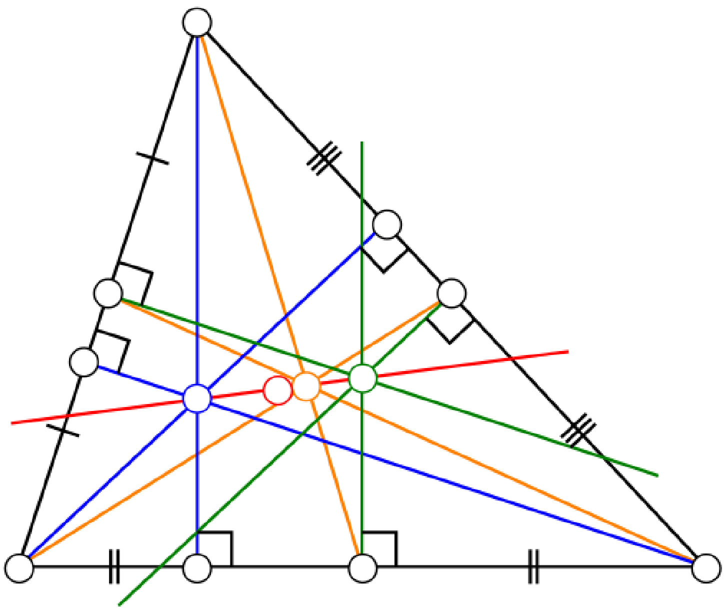
(一)九點圓

九點圓，在平面幾何中，對任何三角形，九點圓通過三角形三邊的中點、三高的垂足、和頂點到垂心的三條線段的中點。九點圓定理指出對任何三角形，這九點必定共圓。而九點圓還具有以下性質：九點圓的半徑是外接圓的一半，且九點圓平分垂心與外接圓上的任一點的連線。且圓心在尤拉線上，且在垂心到外心的線段的中點。



(二)尤拉線:

在平面幾何中，**尤拉線**（圖中的紅線）是指過三角形的垂心(H)（藍）、外心(O)（綠）、重心(G)（黃）和九點圓心(O_9)（紅點）的一條直線。尤拉線上的四點中，九點圓圓心到垂心和外心的距離相等，而且重心到外心的距離是重心到垂心距離的一半。(注意內心一般不在歐拉線上，除了等腰三角形外)。



所以，在尤拉線上四心的比例為: $\overline{HO_9}:\overline{O_9G}:\overline{GO}$=3:1:2

二、名詞定義:

(一)重心四邊形:

若在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，G_1、G_2、G_3、G_4 分別為△$A_2A_3A_4$，△$A_1A_3A_4$，△$A_1A_2A_4$，△$A_1A_2A_3$ 的重心 ,我們稱為四邊形 $G_1\ G_2\ G_3\ G_4$ 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心四邊形。

(二)外心四邊形:

若在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，O_1、O_2、O_3、O_4 分別為△$A_2A_3A_4$，△$A_1A_3A_4$，△$A_1A_2A_4$，△$A_1A_2A_3$ 的外心 ,我們稱為四邊形 $O_1\ O_2\ O_3\ O_4$ 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心四邊形。

(三)垂心四邊形:

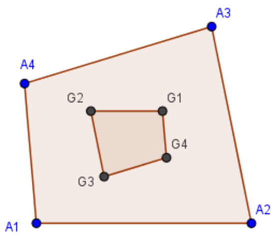
若在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，H_1、H_2、H_3、H_4 分別為△$A_2A_3A_4$，△$A_1A_3A_4$，△$A_1A_2A_4$，△$A_1A_2A_3$ 的垂心 ,我們稱為四邊形 $H_1\ H_2\ H_3\ H_4$ 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的垂心四邊形。

(四)內心四邊形:

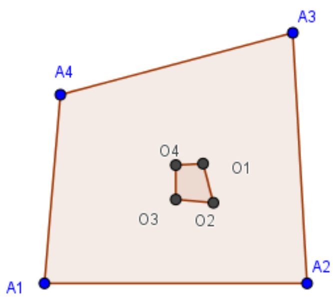
若在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，I_1、I_2、I_3、I_4 分別為△$A_2A_3A_4$，△$A_1A_3A_4$，△$A_1A_2A_4$，△$A_1A_2A_3$ 的內心 ,我們稱為四邊形 $I_1\ I_2\ I_3\ I_4$ 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的內心四邊形。

(五)九點圓心四邊形

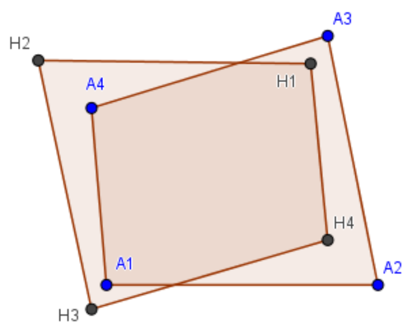
若在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，$O9_1$、$O9_2$、$O9_3$、$O9_4$ 分別為△$A_2A_3A_4$，△$A_1A_3A_4$，△$A_1A_2A_4$，△$A_1A_2A_3$ 的內心 ,我們稱為四邊形 $O9_1\ O9_2\ O9_3\ O9_4$ 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的九點圓心四邊形。



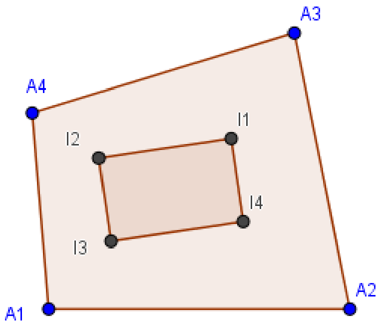
重心四邊形



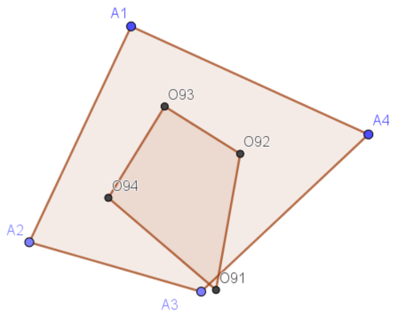
外心四邊形



垂心四邊形



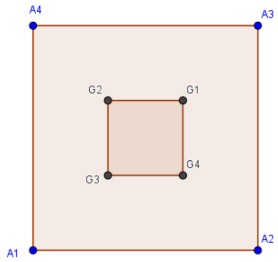
內心四邊形

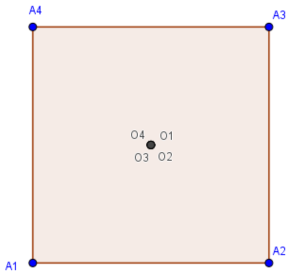


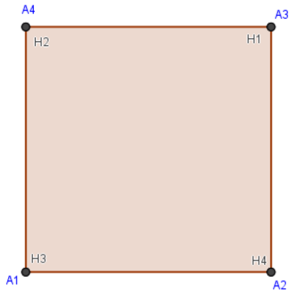
九點圓心四邊形

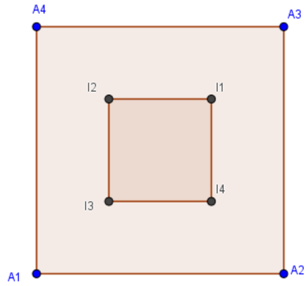
三、利用 Geogebra 討論四心四邊形

(一)、正方形中的四心四邊形





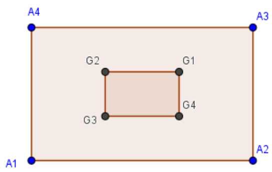


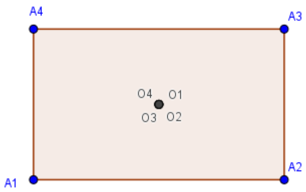


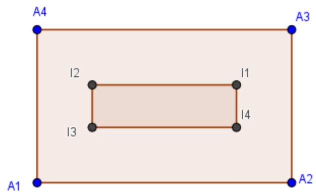
重心四邊形　外心四邊形　垂心四邊形　內心四邊形

名稱	原始四邊形	重心四邊形	外心四邊形	垂心四邊形	內心四邊形
頂點	$A_1A_2A_3A_4$	$G_1\ G_2\ G_3\ G_4$	$O_1\ O_2\ O_3\ O_4$	$H_1\ H_2\ H_3\ H_4$	$I_1\ I_2\ I_3\ I_4$
形狀	正方形	正方形	點	正方形	正方形
相似與否		是		是	是

(二)長方形中的四心四邊形



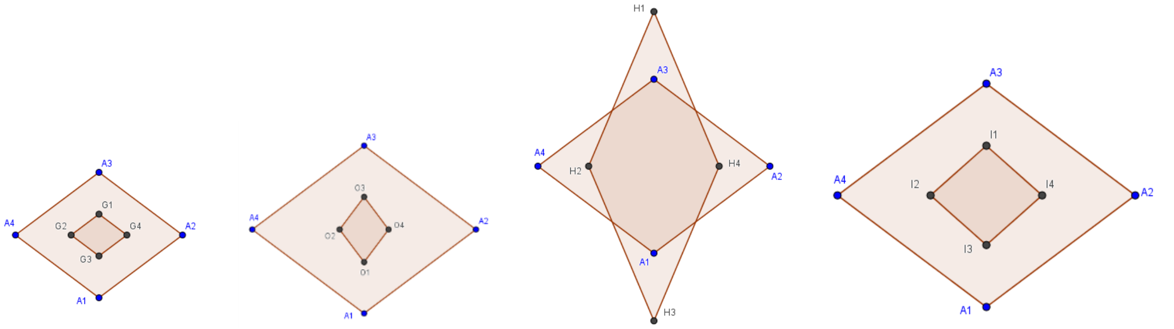




重心四邊形　外心四邊形　垂心四邊形　內心四邊形

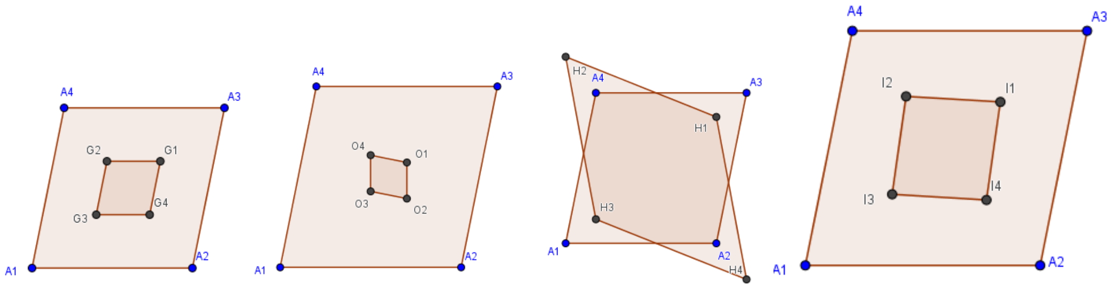
名稱	原始四邊形	重心四邊形	外心四邊形	垂心四邊形	內心四邊形
頂點	$A_1A_2A_3A_4$	$G_1\ G_2\ G_3\ G_4$	$O_1\ O_2\ O_3\ O_4$	$H_1\ H_2\ H_3\ H_4$	$I_1\ I_2\ I_3\ I_4$
形狀	矩形	矩形	點	矩形	矩形
相似與否		是		是	否

(三)、菱形中的四心四邊形



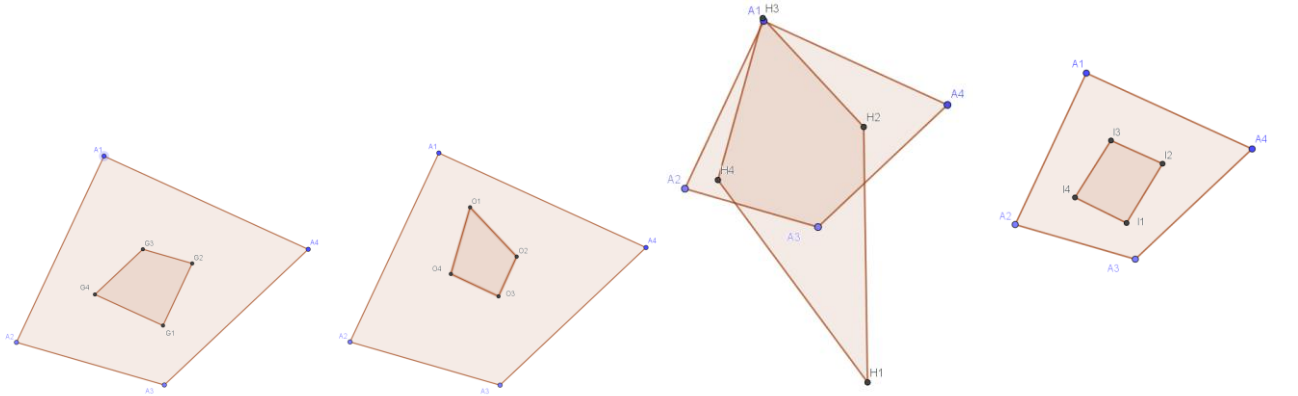
名稱	原始四邊形	重心四邊形	外心四邊形	垂心四邊形	內心四邊形
頂點	$A_1A_2A_3A_4$	$G_1\ G_2\ G_3\ G_4$	$O_1\ O_2\ O_3\ O_4$	$H_1\ H_2\ H_3\ H_4$	$I_1\ I_2\ I_3\ I_4$
形狀	菱形	菱形	菱形	菱形	菱形
相似與否		是	否	否	否

(四)、平行四邊形中的四心四邊形



名稱	原始四邊形	重心四邊形	外心四邊形	垂心四邊形	內心四邊形
頂點	$A_1A_2A_3A_4$	$G_1\ G_2\ G_3\ G_4$	$O_1\ O_2\ O_3\ O_4$	$H_1\ H_2\ H_3\ H_4$	$I_1\ I_2\ I_3\ I_4$
形狀	平行四邊形	平行四邊形	平行四邊形	平行四邊形	平行四邊形
相似與否		是	否	否	否

(五)、任意四邊形中的四心四邊形



名稱	原始四邊形	重心四邊形	外心四邊形	垂心四邊形	內心四邊形
頂點	$A_1A_2A_3A_4$	$G_1\ G_2\ G_3\ G_4$	$O_1\ O_2\ O_3\ O_4$	$H_1\ H_2\ H_3\ H_4$	$I_1\ I_2\ I_3\ I_4$
形狀	任意四邊形	任意四邊形	任意四邊形	任意四邊形	任意四邊形
相似與否		是	否	否	否

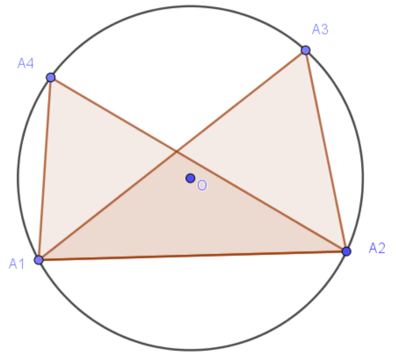
四、圓內接四邊形中四心四邊形性質

討論完以上的性質，對於正方形及矩形，因為其外心四邊形重合於一點，且其重心四邊形、垂心四邊形與原始四邊形相似，而其他特殊四邊形沒有此性質。

經過討論，發現正方形與矩形屬於圓內接四邊形，其他特殊四邊形不屬於圓內接四邊形，因此，展開圓內接四邊形對於四心四邊形性質的討論。

(一)圓內接四邊形之外心四邊形

在△$A_1A_2A_4$，△$A_1A_2A_3$中，因為四點共圓，所以兩三角形的外心，皆為 O 點。故在圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，其外心四邊形重疊於 O 點。

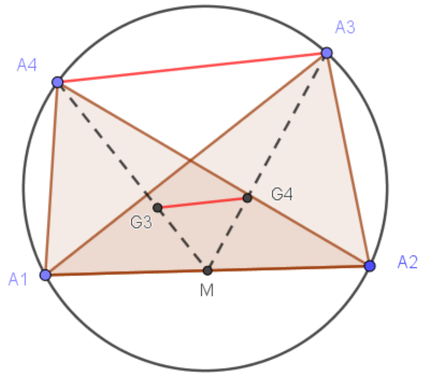


(二)圓內接四邊形之重心四邊形

在△$A_1A_2A_4$，△$A_1A_2A_3$中，M 是$\overline{A_1A_2}$中點 ，G_3、G_4分別為△$A_1A_2A_4$，△$A_1A_2A_3$ 的重心

因$\dfrac{\overline{A_4G_3}}{\overline{G_3M}}=\dfrac{\overline{A_3G_4}}{\overline{G_4M}}=\dfrac{2}{1}$ ，故$\overline{A_4A_3}$ // $\overline{G_3G_4}$ ，$\overline{G_3G_4}=\dfrac{1}{3}\overline{A_4A_3}$

同理，我們可知:重心四邊形$G_1\,G_2\,G_3\,G_4$相似四邊形$A_1A_2A_3A_4$，且邊長比為$\dfrac{1}{3}$。



(三)圓內接四邊形之九點圓心四邊形

在文獻探討上，我們知道尤拉線上存在九點圓心，故我們也一併討論九點圓四邊形的性質。

我們知道:在尤拉線上四心的比例為: $\overline{HO_9}:\overline{O_9G}:\overline{GO}=3:1:2$

故 $\dfrac{\overline{OG_3}}{\overline{OO9_3}}=\dfrac{\overline{OG_4}}{\overline{OO9_4}}=\dfrac{2}{3}$ ，故 $\overline{O9_3O9_4}\ //\overline{G_3G_4}$ ， $\overline{G_3G_4}=\dfrac{2}{3}\overline{O9_3O9_4}$

又承上 $\overline{A_4A_3}\ //\overline{G_3G_4}$ ， $\overline{G_3G_4}=\dfrac{1}{3}\overline{A_4A_3}$，故 $\overline{O9_3O9_4}\ //\overline{G_3G_4}//\overline{A_4A_3}$ ， $\overline{O9_3O9_4}=\dfrac{1}{2}\overline{A_4A_3}$

同理，我們可知:九點圓心四邊形 $O9_1\ O9_2\ O9_3\ O9_4$ 相似四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，且邊長比為 $\dfrac{1}{2}$ 。

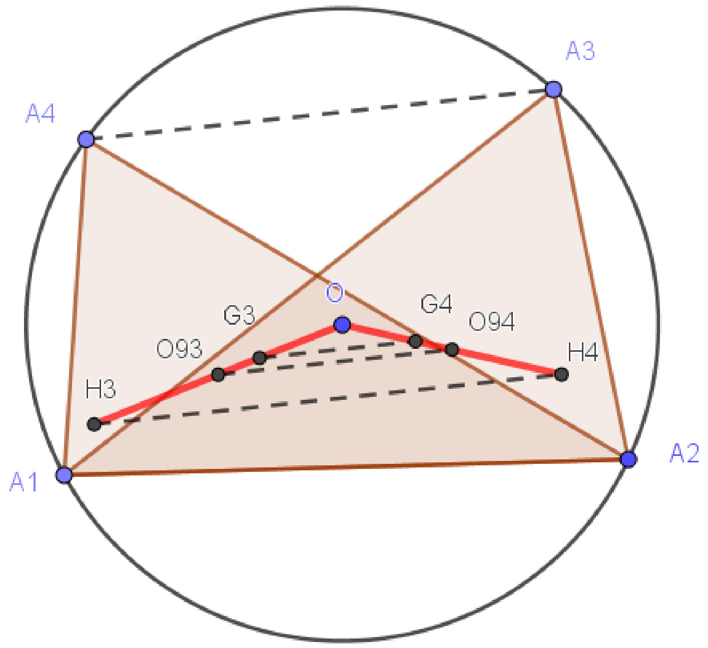
(四)圓內接四邊形之垂心四邊形

我們知道:在尤拉線上四心的比例為: $\overline{HO_9}:\overline{O_9G}:\overline{GO}=3:1:2$

$\dfrac{\overline{OG_3}}{\overline{OH_3}}=\dfrac{\overline{OG_4}}{\overline{OH_4}}=\dfrac{1}{3}$ ，故 $\overline{H_3H_4}\ //\overline{G_3G_4}$ ， $\overline{G_3G_4}=\dfrac{1}{3}\overline{H_3H_4}$

又承上 $\overline{A_4A_3}\ //\overline{G_3G_4}$ ， $\overline{G_3G_4}=\dfrac{1}{3}\overline{A_4A_3}$，故 $\overline{H_3H_4}\ //\overline{G_3G_4}//\overline{A_4A_3}$ ， $\overline{H_3H_4}=\overline{A_4A_3}$

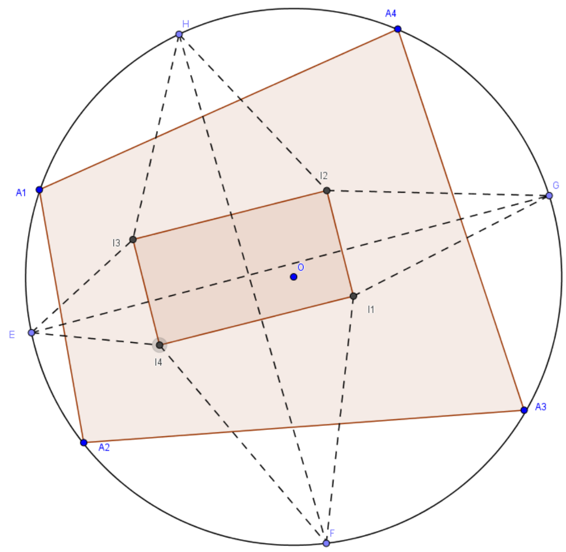
同理，我們可知:垂心四邊形 $H_1\ H_2\ H_3\ H_4$ 相似四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ ，且邊長比為 1:1。



(五)圓內接四邊形之內心四邊形

從文獻探討上知道，內心並不一定在尤拉線上，所以不能用上述的方法證明。

但我們可知道圓內接四邊形的內心四邊形皆為矩形，故與四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 不相似。



令 I_1、I_2、I_3、I_4 分別為$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的內心，

並設 E、F、G、H 分別為弧 A_1A_2 弧 A_2A_3 弧 A_3A_4 弧 A_1A_4 的中點。

那麼 I_3 在 $\overline{A_4E}$ 上、I_4 在 $\overline{A_3E}$ 且 $\overline{I_3E}=\overline{A_1E}=\overline{A_2E}$ ，$\overline{I_4E}=\overline{A_1E}=\overline{A_2E}$

故 $\overline{I_3E}=\overline{I_4E}$

又 $\overline{EG}$ 為 $\angle A_4EA_3$ 的角平分線，故 $\overline{I_3I_4}\perp\overline{EG}$ 同理，$\overline{I_1I_2}\perp\overline{EG}$ ，$\overline{I_2I_3}\perp\overline{FH}$ ，$\overline{I_1I_4}\perp\overline{FH}$

於是 $\overline{I_3I_4}\,//\,\overline{I_1I_2}$ 且 $\overline{I_2I_3}\,//\,\overline{I_1I_4}$ 而且 $\overline{EG}\perp\overline{FH}$ (由圓內角)，故四邊形 $I_1\,I_2\,I_3\,I_4$ 為矩形。

五、圓內接四邊形各心四邊形的關係

由於以上的討論，在圓內接四邊形中，因為外心四邊形重合成一點，所以四條尤拉線共點於外接圓心 O，又尤拉線上的垂心、九點圓心、重心、外心四點之間的比例為 3:1:2，

故重心四邊形 ~ 九點圓心四邊形 ~ 圓內接四邊形 ~ 垂心四邊形。

可知重心四邊形 ~ 九點圓心四邊形 ~ 圓內接四邊形 ~ 垂心四邊形，邊長比為 2:3:6:6。

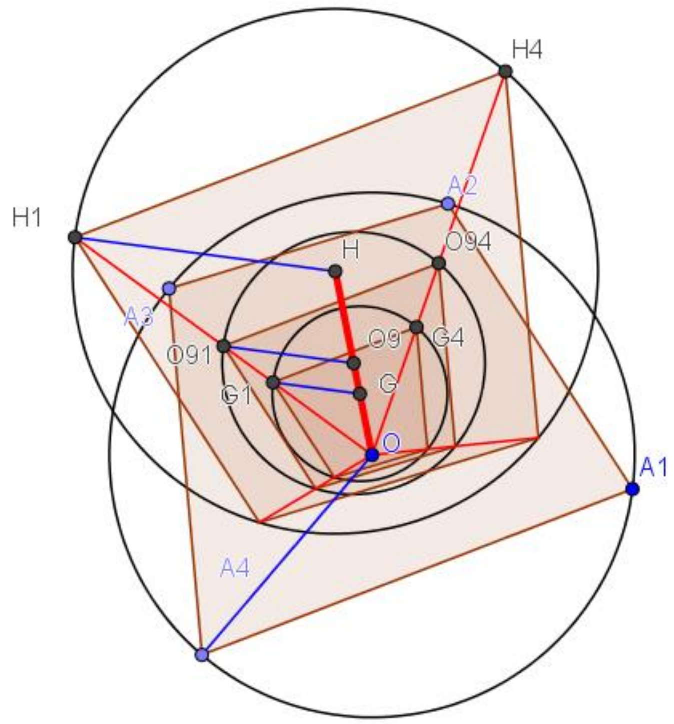
又因圓內接四邊形有一外接圓，因都是相似形，所以九點圓四邊形、重心四邊形、垂心四邊形也都會有一外接圓。

我們令垂心四邊形的外接圓圓心為 H，九點圓四邊形的外接圓圓心為 $O9$，重心四邊形的圓心為 G；我們把外接圓圓心 O 和垂心四邊形圓心 H 連接起來 $\overline{HO}$，

定義為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的尤拉線為 $\overline{HO}$，其比例與三角形尤拉線相同，

$\overline{HO_9}:\overline{O9G}:\overline{GO}$ =3:1:2

同理，由三角形尤拉線性質:知重心四邊形外接圓:九點圓心四邊形外接圓:圓內接四邊形外接圓:垂心四邊形外接圓半徑的比為=2:3:6:6。



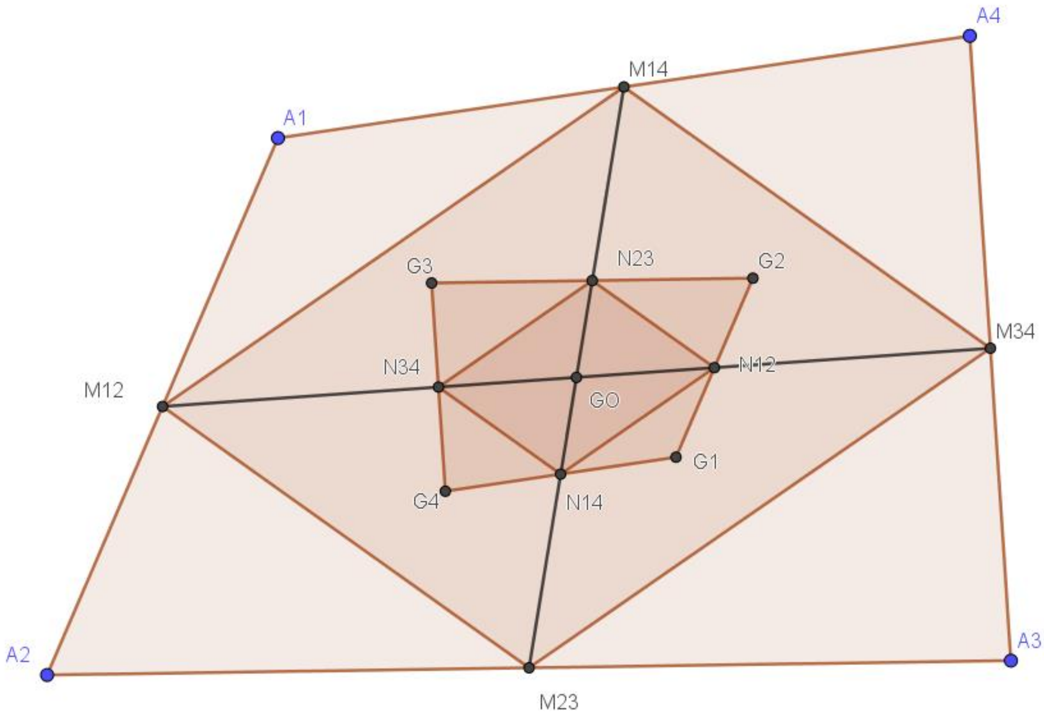
六、圓內接四邊形各心四邊形的位移中心和關係

(一)重心四邊形的位移中心:

若在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 中，G_1、G_2、G_3、G_4 分別為△ $A_2A_3A_4$ ，△ $A_1A_3A_4$，△ $A_1A_2A_4$，△ $A_1A_2A_3$ 的重心 ,我們稱為四邊形 $G_1\,G_2\,G_3\,G_4$ 為四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的重心四邊形。

其中，M_{ij} 為 $\overline{A_iA_j}$ 的 的中點(i,j=1,2,3,4) ，N_{ij} 為 $\overline{G_iG_j}$ 的 的中點(i,j=1,2,3,4)，點 G_0 為 $\overline{M_{14}M_{23}}$ 、 $\overline{M_{12}M_{34}}$ 的交點，定義: G_0 為重心四邊形 $G_1\,G_2\,G_3\,G_4$ 和原始四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的位移中心。

我們可知: G_0 同時為重心四邊形 $G_1\,G_2\,G_3\,G_4$ 和原始四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 的位移中心。



(二)垂心四邊形的位移中心:

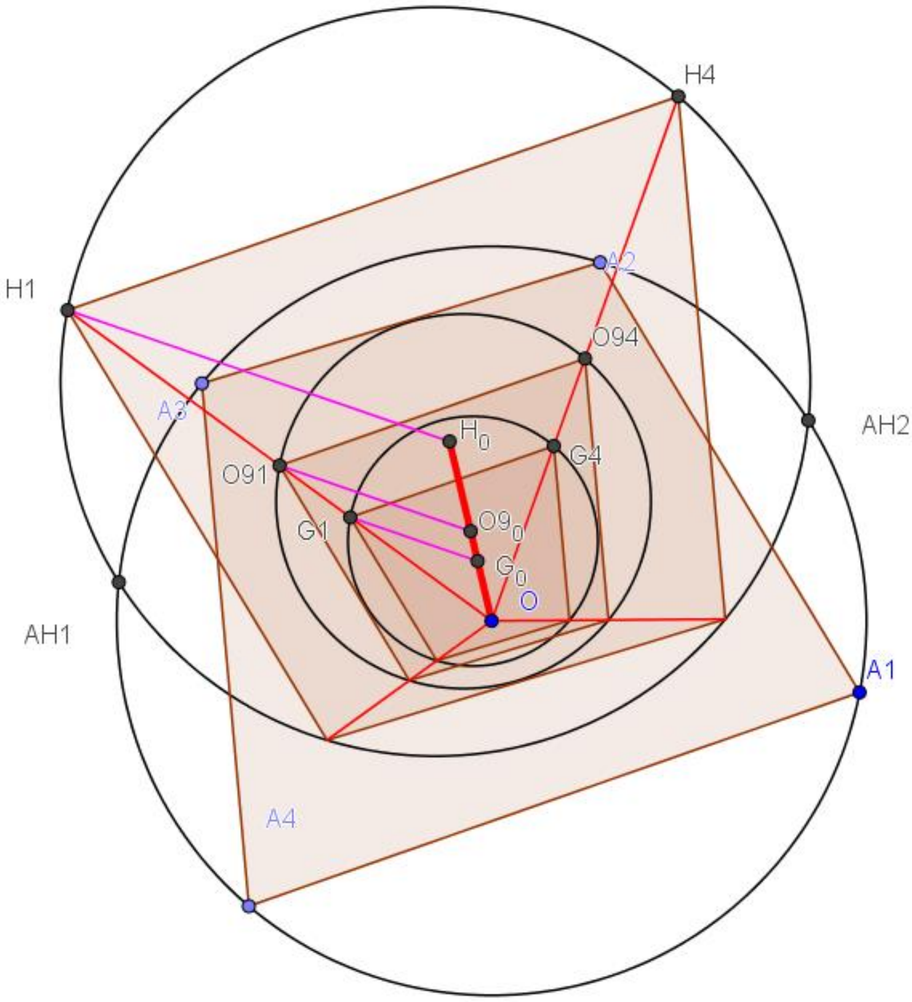
同理，因垂心四邊形與原四邊形相似所以，垂心四邊形也有位移中心，我們定義為H_0

(三)九點圓心四邊形的位移中心:

同理，因九點圓心四邊形與原四邊形相似所以，九點圓心四邊形也有位移中心，我們定義為$O9_0$

我們由尤拉線觀察到

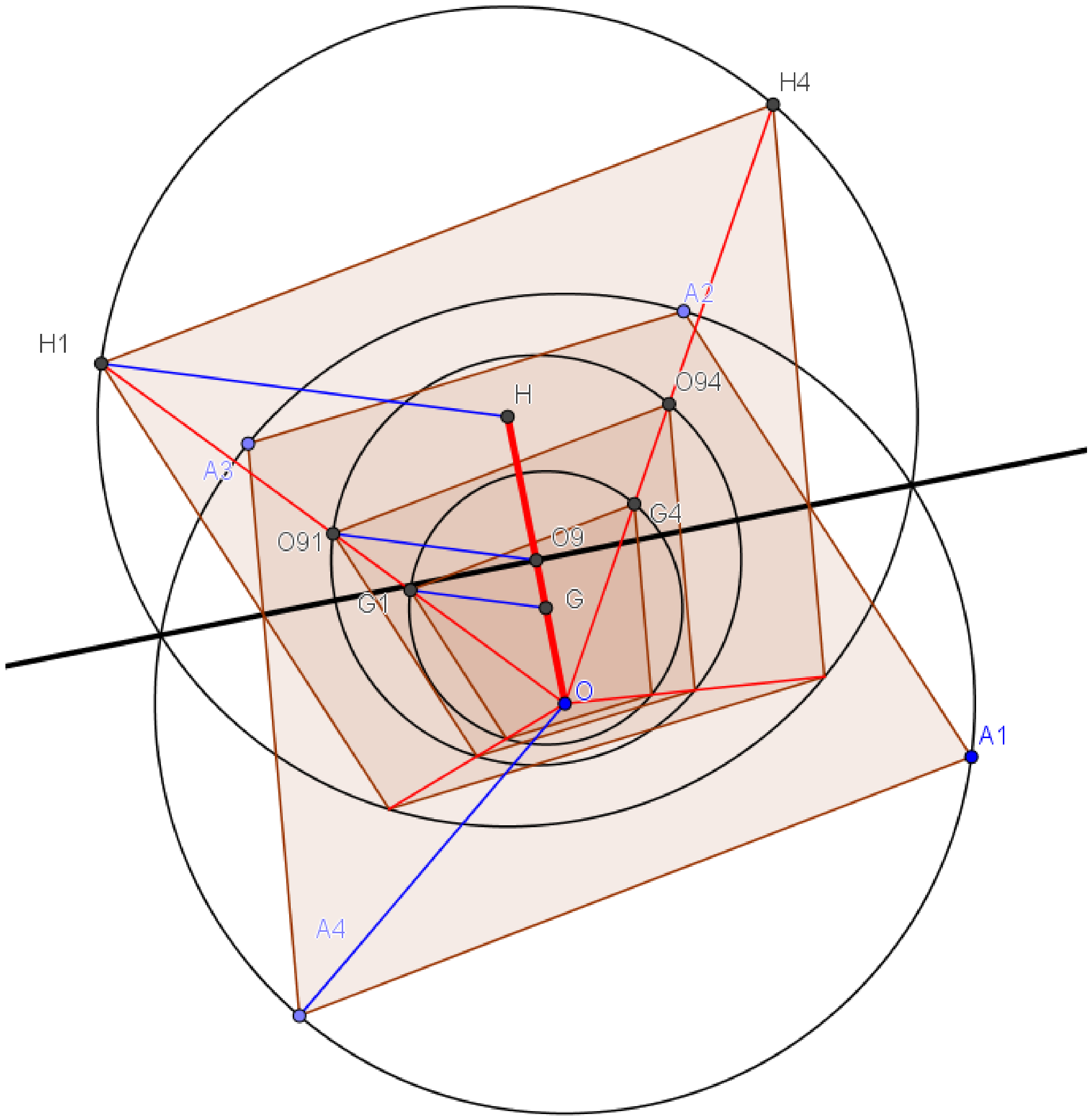
$\overline{H_0O9_0}:\overline{O9_0G_0}:\overline{G_0O}$ =3:1:2



七、伍方「拾」圓的關係

在本研究中由原始的圓內接四邊形發展出:重心四邊形、外心四邊形'(點)、內心四邊形、垂心四邊形、和九點圓四邊形。我們透過尤拉線，找到了其中相似的關係。並且找到四邊形的尤拉線，透過平行和相似，我們知道四邊形尤拉線上各點的比例和三角形由拉線相同。

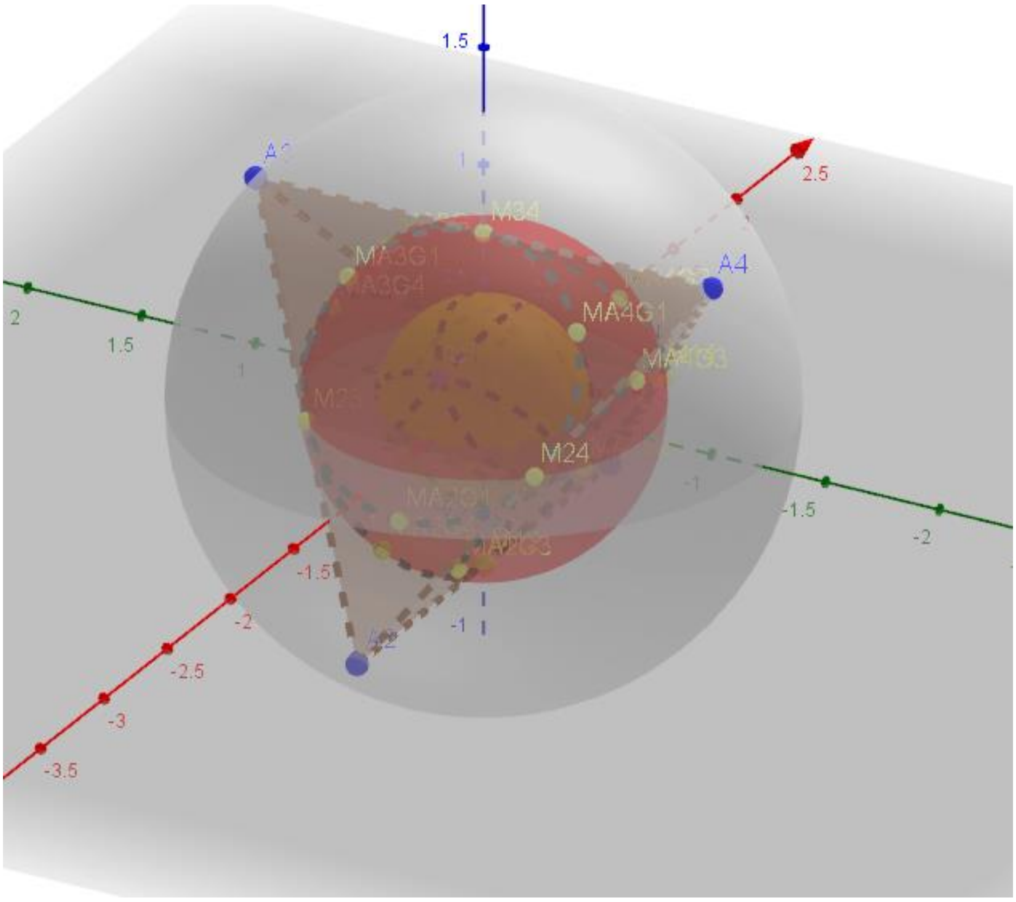
最後，因為圓內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 和圓內接垂心四邊形 $H_1\ H_2\ H_3\ H_4$ 為全等的四邊形，故我們可以畫兩等圓，把兩個圓的交點連接起來得到根軸 L，根軸通過九點圓心四邊形外接圓心 $O9$，且根軸 L 是四邊形尤拉線(兩圓心 OH 的連心線)的中垂線。



八、將圓內接四邊形推展到三維空間

將平面的圓內接四邊形研究後，有進一步想初探三維空間的狀況。

由於受限於時間和學識上的不足，只能先以球內接正四面體來感受:最外層是正四面體外接球，往內做垂心正四面體外接球、九點圓心正四面體外接球和重心正四面體外接球，可以發現四面體上有 3 個球體，所以可以推斷尤拉線比例推到三維還是不變，由於立體繪圖還不熟悉，所以只能以正三角形呈現，正三角形的九點圓只能看到六個，就發現在四面體中共有 18 個點，各邊中心重複，所以應該是 6×4−3×2=18，假如有機會做不規則的，應該可以呈現出 30 個點，就來待將來繼續完成。



伍、研究結論

一、重心四邊形~九點圓心四邊形~圓內接四邊形~垂心四邊形，邊長比為 2:3:6:6。

二、九點圓四邊形、重心四邊形、垂心四邊形各有一外接圓，重心四邊形外接圓:九點圓心四邊形外接圓:圓內接四邊形外接圓:垂心四邊形外接圓半徑的比為=2:3:6:6。

三、圓內接四邊形之內心四邊形為矩形。

四、找出四邊形的尤拉線，四邊形的各心及位移中心的比例和三角形尤拉線的比例相同。

伍、四邊形尤拉線和根軸的關係。

六、推廣到三維空間。

陸、未來研究方向

初探這個題目，就覺得有源源不絕的幾何想法和念頭出現，但受限於時間和學識，目前只能有這些初步的結果，未來如果有機會，除了朝向三維空間發展，更希望自己能透過這個題目把平面幾何的幾個重要定理與這個研究結合，更進步希望能透過代數的方法來解釋這些幾何現象。

柒、參考資料:

1、游森棚(2015)。**還原現場**。科學研習月刊，第 54 卷第 12 期，57。

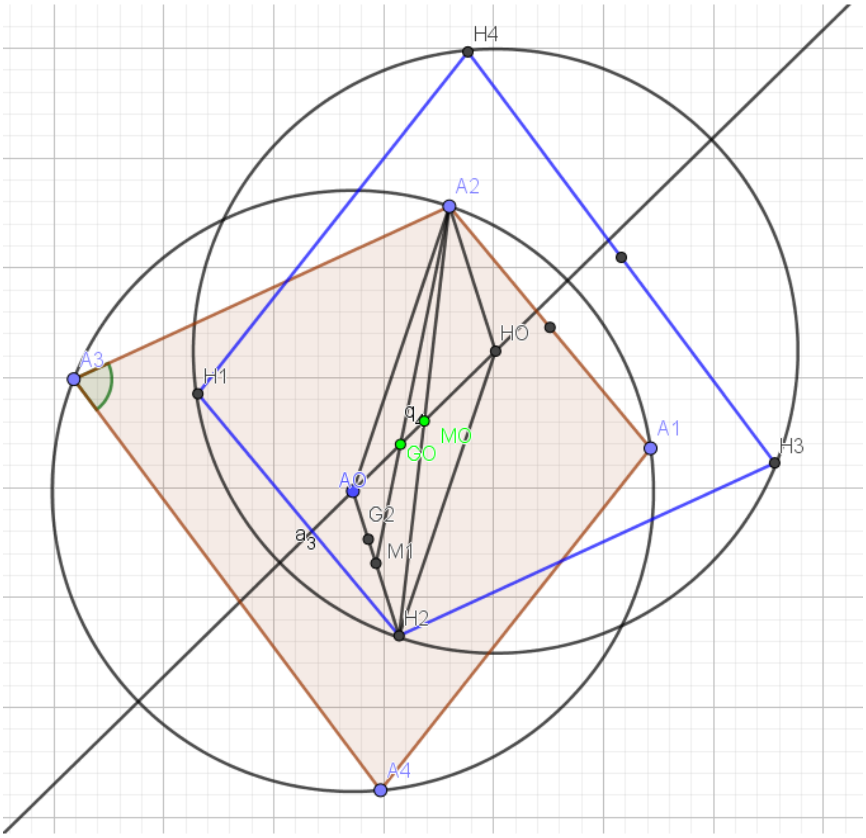
2、林宗穎()。**垂心四邊形與外心四邊形。**

3、陳祈安等(2018)。「**4」in love -探討任意四邊形生成之四心四邊形的性質。**中華民國第 58 屆中小學科學展覽會。

捌、附錄

位移中心的奧妙

在畫九點圓四邊形時，我意外發現
九點圓四邊形的位移中心就是重心四邊形的圓心，垂心四邊形的位移中心剛好是九點圓圓心。
如圖下 GO 為九點圓位移中心，同時也是重心四邊形的中心，MO 為九點圓四邊形的圓心，同時也是垂心四邊形的位移中心。



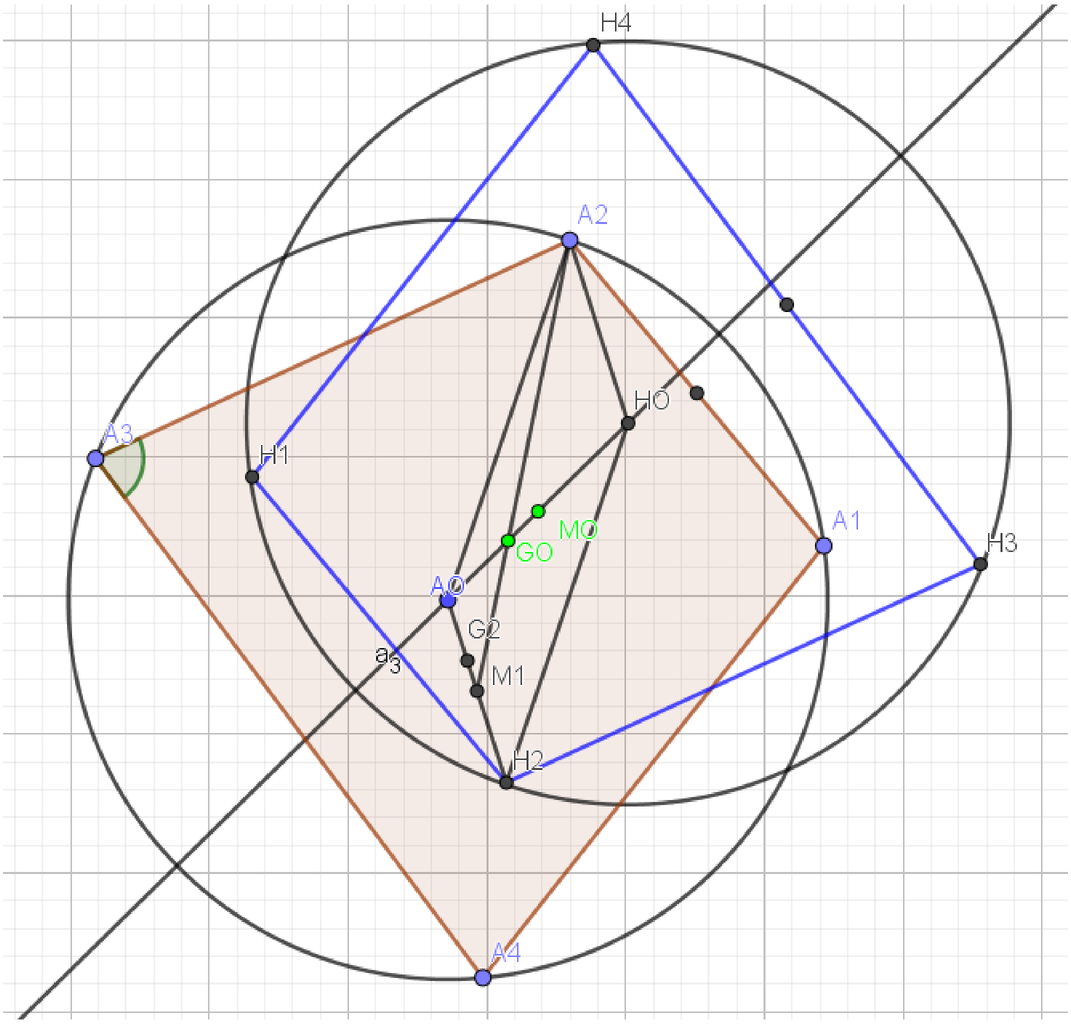
圓心證明：

連接 A2、H2、AO、HO，可以發現是一個平行四邊形，之前我們已經證明 MO 為 HO 及 AO 的中點，M1 為 AO 及 H2 中點，垂心四邊形之圓心與外心兩點剛好在平行四邊形的頂角上，所以對角線交點必為垂心與外心中點，A2 和 H2 又剛好是平行四邊形的另外兩個頂點，連線後可以發現剛好與之前證明的一比一相同，也府和尤拉定理。：
$\overline{MOH2}$：$\overline{MOA2}$=1：1，$\overline{A2HO}//\overline{A2HO} \rightarrow \overline{A2MO}$ ：$\overline{MOHO}=1$：1：一比一的位置剛好在四邊形由拉線上的中點，也就是九點圓四邊形的圓心，所以：

MO=九點圓圓心=垂心四邊形位移中心

位移中心證明

連接 A2、H2、AO、HO，可以發現是一個平行四邊形，再連接 M1、GO、A4，之前有證明 M1GO 比 GOA2 為 1：2，M1 為 AO 及 H2 中點，可以發現三角形 GOAOM1 和 GOHOA2 為相似形



$\overline{\mathrm{M1GO}}:\overline{\mathrm{GOA2}}=1:2$，$\overline{A2HO}//\overline{A2HO}$，$\overline{AOM1}:\overline{M1H2}=1:1$

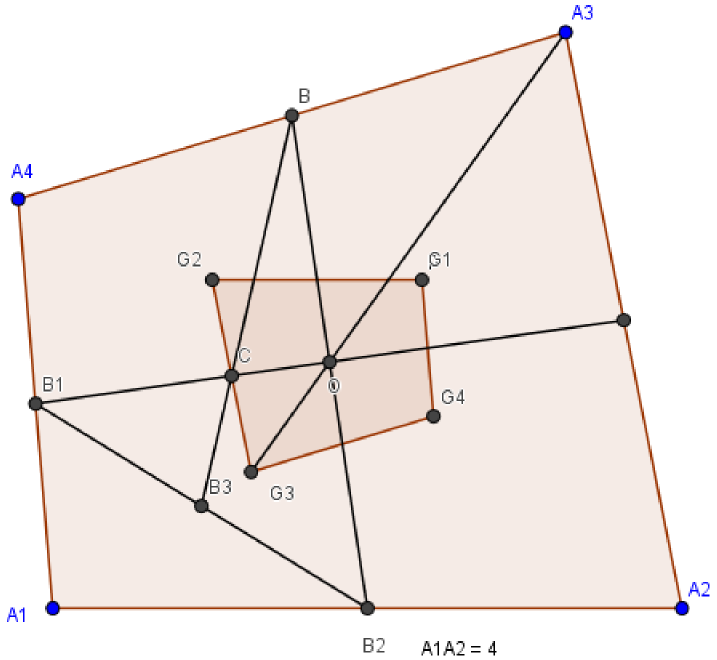
$\therefore \Delta\mathrm{AOGOG2}\sim\Delta\mathrm{A2GOHO}$，$\overline{AOGO}:\overline{GOHO}=1:2$

AO、HO 分別為四邊形由拉線上的外心與垂心，由拉線上一比二的位置剛好就是重心，又由於四邊形由拉線上的點都是各心四邊形的圓心，所以：

GO=重心四邊形圓心=九點圓位移中心

重心四邊形共軛中心證明

共軛重心定理：四邊形各邊中點連成鄰邊三角形重心為重心四邊形兩重心中點。
證明：



由孟氏定理（梅涅勞斯）定理可得知

$$\frac{B3B1}{B3B2}\times\frac{BB2}{BO}\times\frac{CO}{B1C}=1$$

所以可得知 B1C：CO 等於 2：1
由於重心定理可得知 C 為ΔBB1B2 的重心。

相反對稱定理證明：

四邊形與重心四邊形為相反對稱且相似比為 1：3

證明：

P1、P2 為 AB、AC 的一點

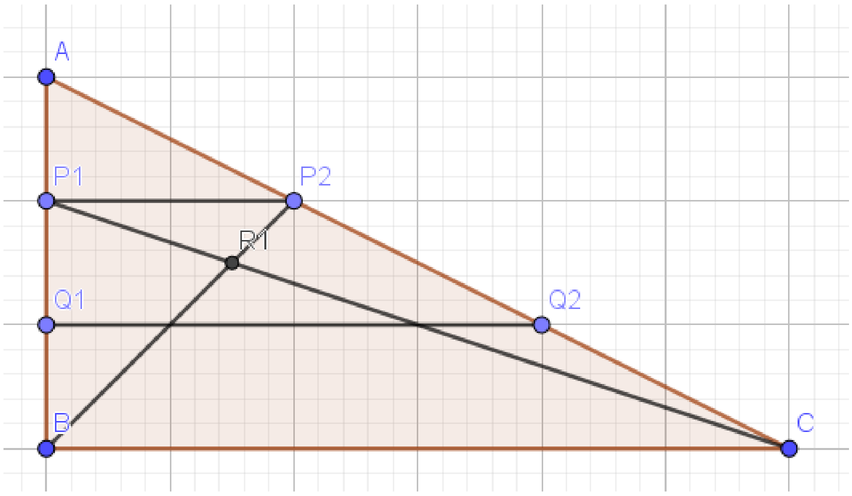
比例為$\overline{AP1}：\overline{P1B}=1：2$

$\overline{AP2}：\overline{P2C}=1：2$

三角形以一條邊當底，其餘兩條邊等比縮放的點相連必和底平行。

兩條平行線為

$$\frac{\overline{P1P2}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AP1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AP2}}{\overline{AC}}=\frac{1}{3}$$



同理

A4A1C 為三角形

G1 為$\overline{A4C}$的一點，G4 為$\overline{A1C}$的一點

$\overline{A4G1}：\overline{G1C}=\overline{A1G4}：\overline{G4C}=2：1$

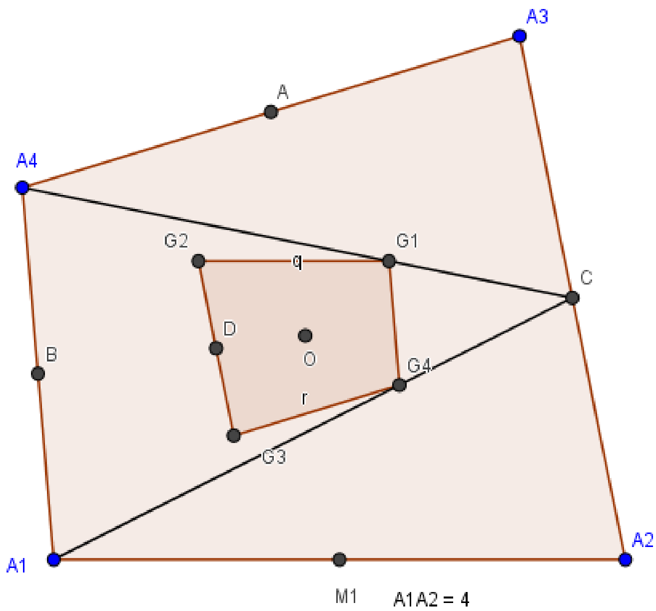
$\overline{A4A1}：\overline{G1G4}=\overline{A4C}：\overline{G1C}$

$\overline{A1C}：\overline{G4C}=3：1$

因為 G1（2：1）的位置

已經超過 1：1，所以每個邊畫完後

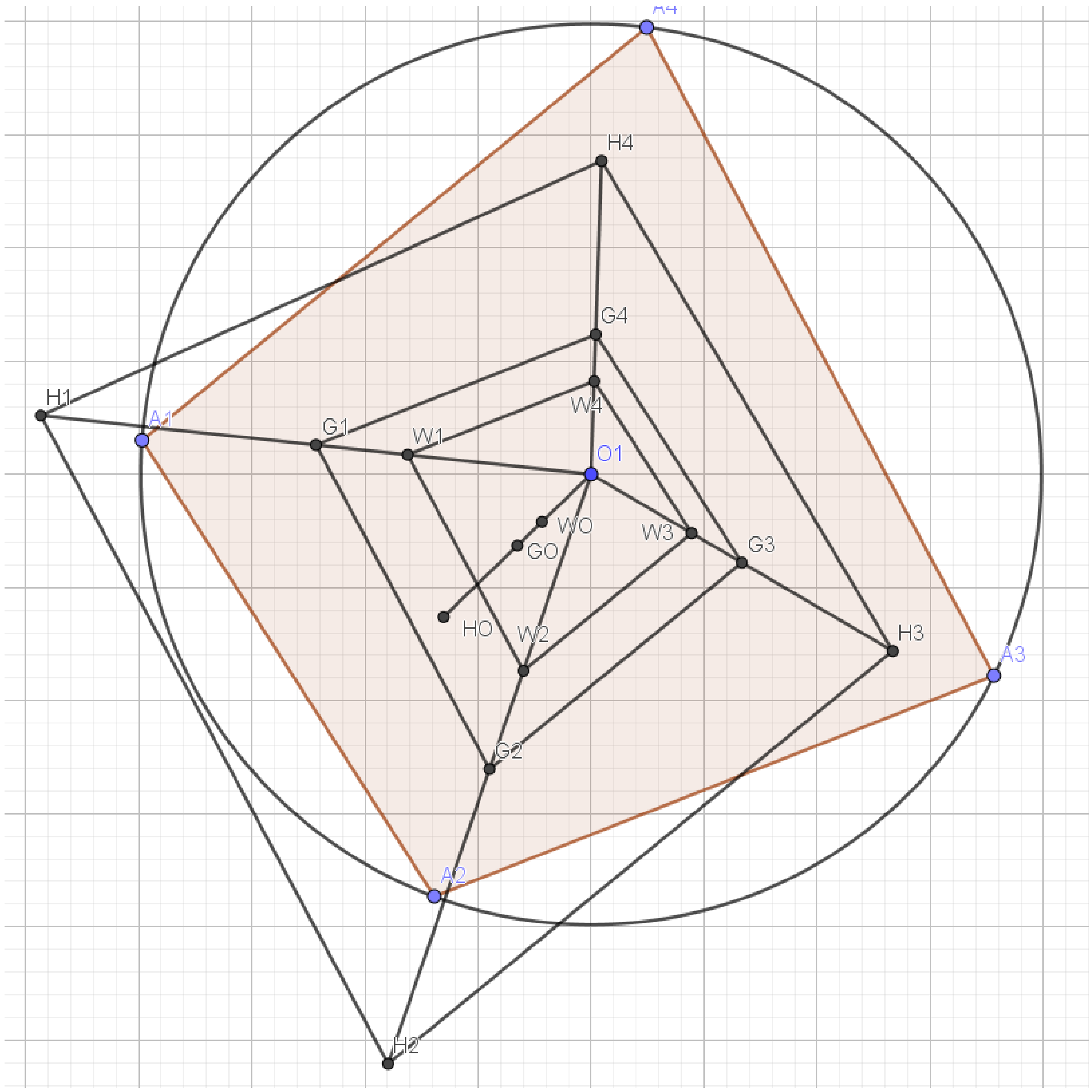
會相反且縮放比例為 1：3



圓內接四邊形四心特性證明

1. 重心四邊形、九點圓四邊形、垂心四邊形、相同對頂點與外心共線
2. 邊長比例為 2：3：6
3. 圓心比也是 2：1：3

證明



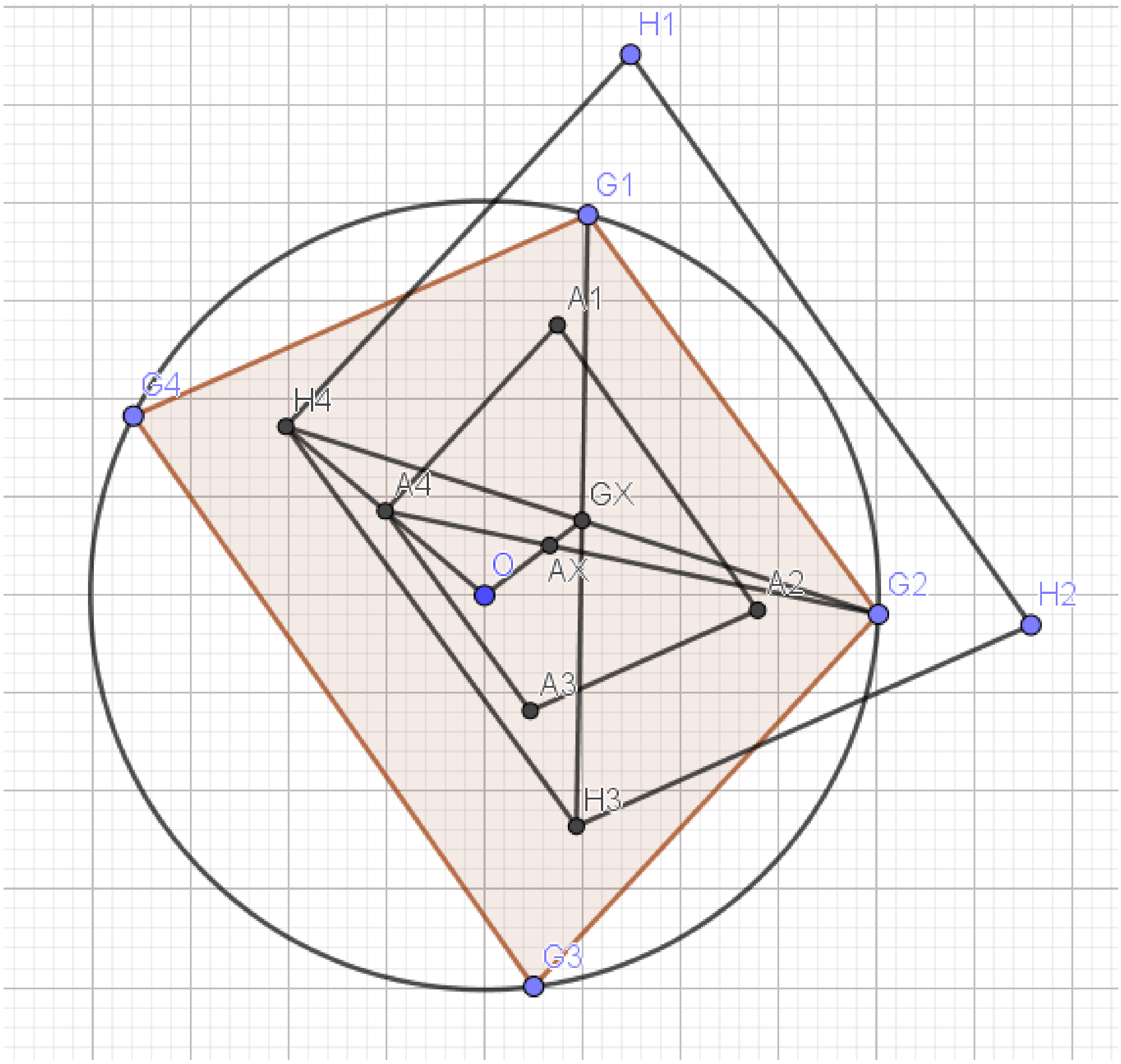
1. 在三角形 A1A2A3 中 O1 為外心，W1 為重心，G1 為九點圓圓心，H1 為垂心，因此 H1G1W1O1 為三角形 A1A2A3 的尤拉線，同理 H2G2W2O2、H3G3W3O3 H4G4W4O4 也有相對的尤拉線。
2. 在三角形裡，垂心、九點圓圓心、重心、外心比例為 3：1：2，三角形 H1O1O2 中 W1W2、G1G2、H1H2 互相平行，W1W2：G1G2：H1H2 等於 W1O1：G1O1：H1O1 等於 2：3：6

W1W2W3W4：G1G2G3G4：H1H2H3H4 等於 2^2：3^3：6^6 ，其圓心比為 2：1：3。

九點圓四邊形與圓內接四邊形比例證明

若想知道比例，只需知道位移中心比例即可知道邊長比

證明：九點圓四邊形邊長比為原四邊形邊長的$\frac{1}{2}$



已知 AX 為九點圓之位移中心，在三角形裡九點圓圓心剛好平分外心與垂心。
GX 為垂心四邊形的位移中心，因為全等，且共高所以 H4GX：GXG2 比例為 1：1。
三角形 H4OG2 中 H4GX：GXG2 比例為 1：1，H4A4：A4O 比例為 1：1
而 A4AXG2 與 GXAXO 相交於 AX，AX 又剛好是九點圓四邊形的位移中心
由重心定理可知：
A4AX：AXG2 為 1：2，又可以得知 AX 為原四邊形與垂心四邊形對應角和圓心所組成的三角形的重心。