嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：「三」薰「三」沐-用三湊三

關鍵詞：數列、三進位、整數分割

編號：

壹:研究動機

起初會想要做這題目是因為老師給我們一道數學題:

小定想要用 3 的次方數（1,3,9,27,81⋯）用加法湊出 3 的倍數。比如湊成 6 有下列三種方法：

$$3+3$$
$$3+1+1+1$$
$$1+1+1+1+1+1$$

注意到：只要湊出來，選數字的順序不用管，即 3 + 1 + 1 + 1 和 1 + 3 + 1 + 1 是同一個方法。

1. 湊出 9 有五種方法，你能寫出來嗎？
2. 湊出 12 有七種方法，你能寫出來嗎？
3. 如果你一直試，可以算出湊出 3n（n = 1,2,3,4,⋯）的方法數分別有 2,3,5,7,9,12,15,18,23,⋯。你可以找到這個數列的規律嗎？
4. 這個數列之中，偶數有有限多個還是無限多個？

我們發現用三的次方數湊出三的倍數的每個倍數之間，真的能夠找到如此有趣又好玩的數列，而且它不僅好玩，其中還似乎隱藏著我們未曾發覺的規律，這讓我們深陷數學的汪洋中，遲遲意猶未盡，我們覺得當初還會想要做這數學科展還有幾個蠻主要的原因，八年級課程中，有介紹到數列以及些許的遞迴式，而這麼能讓我們增加頭腦靈活度的題目，更是讓我們求之不得的，所以我們充分利用這次這麼好的學習資源好好地進行研究。

貳:研究目的

一、利用樹狀圖，尋找用三湊三的數列規律。
二、利用三進位，尋找用三湊三的數列規律。
三、利用三進位，尋找用三湊三的數列規律遞迴式。
四、利用遞迴式，尋找用三湊 N 的規律
五、利用遞迴式，尋找用 N 湊 N 的規律
六、利用整數分割的觀念，寫出用三湊三的生成函數。

參:研究設備及器材

紙、筆、電腦

肆:研究過程

一、 利用樹狀圖，尋找用三湊三的數列規律:

對於這個問題，我們一開始不知道從何著手。只好先利用樹狀圖，把所有的狀況利用窮舉法，把所有的方法數算出。

經過長時間的努力，我們推導出以下的結果:（推導過程:詳見附錄一）

數字	方法	方法數	規律
N= 1:	1+ 1	=2	➔ 1+N
N= 2:	1+ 2	=3	➔ 1+N
N= 3:	1+ 3+ 1	=5	➔ 1+N+〔1+(N-3)〕
N= 4:	1+ 4+ 2	=7	➔ 1+N+〔1+(N-3)〕
N= 5:	1+ 5+ 3	=9	➔ 1+N+〔1+(N-3)〕
N= 6:	1+ 6+ 5	=12	➔ 1+N+〔1+(N-3)+1+(N-6)〕
N= 7:	1+ 7+ 7	=15	➔ 1+N+〔1+(N-3)+1+(N-6)〕
N= 8:	1+ 8+ 9	=18	➔ 1+N+〔1+(N-3)+1+(N-6)〕
N= 9:	1+ 9+ 12+ 1	=23	➔ 1+N+〔1+(N-3)+1+(N-6)+1+(N-9)〕 + 〔1+(N-9)〕
N=10:	1+ 10+ 15+1	=28	➔ 1+N+〔1+(N-3)+1+(N-6)+1+(N-9)〕+ 〔1+(N-9)〕
N=11:	1+ 11+ 18+ 3	=33	➔ 1+N+ 〔1+(N-3)+1+(N-6)+1+(N-9)〕+ 〔1+(N-9)〕
N=12:	1+ 12+ 22+ 5	=40	➔ 1+N+ 〔1+(N-3)+1+(N-6)+1+(N-9)+1+(N-12)〕 + 〔1+(N-9)+1+(N-12〕
N=13:	1+ 13+ 26+ 7	=47	➔ 1+N+ 〔1+(N-3)+1+(N-6)+1+(N-9)+1+(N-12)〕 + 〔1+(N-9)+1+(N-12)〕
N=14:	1+ 14+ 30+ 9	=54	➔ 1+N+ 〔1+(N-3)+1+(N-6)+1+(N-9)+1+(N-12)〕 + 〔1+(N-9)+1+(N-12)〕

N=20: ➔ 1+N+ 〔1+(N-3)+1+(N-6)+1+(N-9)+1+(N-12)+1+(N-15)+1+(N-18)〕
+ 〔1+(N-9)+1+(N-12) +1+(N-15)+1+(N-18)〕
+ 〔1+ (N-18)〕

N=27: ➔ 1+N +〔1+(N-3)+1+(N-6)+1+(N-9)+1+(N-12)+1+(N-15)+1+(N-18)
+1+(N-21) +1+(N-24) +1+(N-27)〕
+ 〔1+(N-9)+1+(N-12) +1+(N-15)+1+(N-18) +1+(N-21) +1+(N-24) +1+(N-27)〕
+ 〔1+ (N-18) +1+(N-21) +1+(N-24) +1+(N-27)〕
+〔1+(N-27) 〕

結論:從上面的式子中，我們發現在樹狀圖中，第一種湊成方法中，因為全部都是 1，所以只有一種方法。第二種湊成方法中，因為出現的三的次數會 3n 中的 n 一樣，所以第二個數會加上 n，代表從一個 3 到全部都換成 3 的方法數為 n，所以總方法數會有 1+n 個。接下來 3 個 3 會換成 9，因為 n 代表 31，所以換成 9 時會少了三個 3，然後三個 3 會換成一個 9，所以有一個 9 的式子為[1+(n-3)]。接著兩個 9 的式子為[1+(n-3)+1+(n-6)]，以此類推。

經過以上的種種討論以及研究推導，我們能發現用樹狀圖能夠發現這麼有趣的數列，但是這個題目中似乎隱藏著我們不知道的規律，這激起我們對這件作品的興趣，並想要繼續做下去強大動機。

二、 利用三進位，尋找用三湊三的數列規律

有一天，在討論過程中，突然想到如果把選定的數字，改成用三進位的表示方法，是不是可以尋找出更簡易的數列規則。

進行文獻探討的過程中，我們知道:

三進位的表示方法，只用 0、1、2 來組成數字。例如:3 可以寫成$(10)_3$，所以在三進位數字系統的表示法$(10202)_3$=$1\times3^4+0\times3^3+2\times3^2+0\times3^1+2\times3^0$ = 101。

若使用數學式子表達即為:

$$(x_n x_{n-1}....x_0)_3 = \sum_{i=0}^{n} x_i \times 3^i$$

因此，先定義選定的數列（$3n$），數列（$3n$）的湊成方法數為$a(n)$

我們可以先把之前樹狀圖推導出來的數列方法數表示成以下結果:

項數	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
數字	$3n$	3	6	9	12	15	18	21	24	27
方法數	$a(n)$	2	3	5	7	9	12	15	18	23

在三進位中，我們發現:

3 可以寫成$(10)_3$

我們可以發現 它有兩種方法 3=3=1+1+1

我們自創了一個類似三進位的表示方法:把它表示成 $(10)_{(3)}$ 或 $(03)_{(3)}$

$(10)_{(3)}$代表用 1 個 3 來湊，$(03)_{(3)}$代表用 3 個 1 來湊的情況的兩種湊法。

6 可以寫成$(20)_3$

我們自創的表示方法:把它表示成

$(20)_{(3)}$ =3+3 或 $(13)_{(3)}$=3+1+1+1 或 $(06)_{(3)}$=1+1+1+1+1+1

即 $(x_n x_{n-1}....x_0)_{(3)}$代表有 x_i 個3^i來湊的情況。

我們透過這個方法，可以節省大量的時間，也比較有規律去推廣到這個數列，深知一定還有更進一步方法的我們，便想要再有更進一步的結果，好讓自己再學習更多的知識也能訓練自己的頭腦靈敏度。(推導的過程，詳見附錄)

三的 N 倍	方法數		三進位表示
N=1:	2	=2	➔(10)
N=2:	3	=3	➔(20)
N=3:	1+4	=5	➔(100)
N=4:	2+5	=7	➔(110)
N=5:	3+6	=9	➔(120)
N=6:	1+4+7	=12	➔(200)
N=7:	2+5+8	=15	➔(210)
N=8:	3+6+9	=18	➔(220)
N=9:	1+1+4+7+10	=23	➔(1000)
N=10:	2+2+5+8+11	=28	➔(1010)
N=11:	3+3+6+9+12	=33	➔(1020)
N=12:	1+4+1+4+7+10+13	=40	➔(1100)
N=13:	2+5+2+5+8+11+14	=47	➔(1110)
N=14:	3+6+3+6+9+12+15	=54	➔(1120)
N=20:	3+3+6+9+12+3+6+9+12+15+18+21	=117	➔(2020)
N=27:	1+1+1+4+7+10+1+4+7+10+13+16+19 +1+4+7+10+13+16+19+22+25+28	=239	➔(10000)

在上面的式子中，我們發現在三進位的方法數中，三進位每進位一次，他跟前後的數字的方法數相差的數值會增加 1。也就是說，在三進位中，10→20 時，他們的方法數會差 1，而在 20→100 時，他們的方法數會差 2。在 100→110 時，他們的方法數會差 2，在 120→200 時，他們的方法數會差 3，在 200→210 時，他們的方法數會差 3，在 220→1000 時，他們的方法數會差 5，因為從 220→1000 時，因為會先變成 300，再變成 1000，進了兩次位，所以方法數才會是 5。以此類推，我們可以用這個結論較快速的算出方法數。

三、 利用三進位，尋找用三湊三的數列規律遞迴式。

雖然有了更進一步的方法，但我們還是想在更進一步的研究，希望透過遞迴關係式，尋找出更簡易的方法。

在偶然的機會中，我們發現 $a(n)$ 和 $a(n-1)$ 的關係，是多增加了 1 個 3，而 3 的湊成方法有 1+1+1 或者 3 兩種。

我們可以把 $a(n)$ 的方法數想成: $a(n-1)$ 方法數，再外加 3。

所以 $a(n)$ 的方法數想成:把 $a(n-1)$ 的方法數，都直接加上 1+1+1 的方法數+沒有 1+1+1 的方法數，就可以寫成遞迴式了。

$a(n)$ = (有 1+1+1 的情況)+(沒有 1+1+1 的情況)

$= a(n-1)$ +(沒有 1+1+1 的情況)

$= a(n-1)$ +(自創進位中，最末位不是 0 的狀況)

$= a(n-1)$ +(三進位中，降階把末位刪掉的方法數)

$= a(n-1) + a\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right)$ ，([ ] 為高斯符號)

首先要知道 $(22)_3$ 和 $(21)_3$ $(20)_3$ 如果利用 3 來湊的方法數一樣

$(22)_3$ 可分為 22 15 08 三種，

同樣，$(21)_3$ 可分成 21 14 07 三種 ，

同理，$(20)_3$ 可分為 20 13 06 三種分法。

舉例說明:

例如:n=8，3n=24=$(220)_3=2\times3^2+2\times3^1+0\times3^0$ ，因為是用 3 湊 3，所以$a(n)$三進位的表示方法，末位都是 0 。

$a(8)$ =$a(7)$ +$(22)_3$ 的方法數=$a(7)$ +$(20)_3$ 的方法數

$a(n)=a(n-1)+a\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right)$ ，([ ] 為高斯符號)

則我們可以推導出遞迴式

a(3) = a(2)+ $a\left(\left[\frac{3}{3}\right]\right)$ ===➔ a(3) = a(2)+a(1)

a(4) = a(3)+ $a\left(\left[\frac{4}{3}\right]\right)$ ===➔ a(4) = a(3)+a(1)

a(5) = a(4)+ $a\left(\left[\frac{5}{3}\right]\right)$ ===➔ a(5) = a(4)+a(1)

a(6) = a(5)+ $a\left(\left[\frac{6}{3}\right]\right)$ ===➔ a(6) = a(5)+a(2)

a(7) = a(6)+ $a\left(\left[\frac{7}{3}\right]\right)$ ===➔ a(7) = a(6)+a(2)

a(8) = a(7)+ $a\left(\left[\frac{8}{3}\right]\right)$ ===➔ a(8) = a(7)+a(2)

a(9) = a(8)+ $a\left(\left[\frac{9}{3}\right]\right)$ ===➔ a(9) = a(8)+a(3)

… …

… …

a(3n)=a(n-1)+ $a\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right)$====➔a(3n)=a(3n-1)+a(n)

_____+

根據以上的式子我們可以推導出 a(3n)= 3[1+a(1)+ a(2)+……a(n-1)]+ a(n)這麼一個遞迴式，這個遞迴式是我們從樹狀圖，慢慢地推導到三進位，之後又一步一步在三進位中所統整的結果，但這之中似乎還隱藏著甚麼未解之謎等著我們去探討。

四、 利用用三湊三的規律，尋找用三湊 N 的數列規律

有了以上成果，我們更進一步想嘗試:用三去湊 N，是否有相同的規律。

我們將推導的過程放在附錄，從附錄上的數據可以得知:用 3 湊 3n, 3n+1, 3n+2 的方法數時，3n 的方法數=3n+1 的方法數=3n+2 的方法數，這是因為用三進位來看時，每個倍數之間的差皆是 3^1，而 3n+1, 3n+2 與 3n 的差為 1～2 個 3^0，不足 3^1，也就是說 3n+1 及 3n+2 的湊成方法是在 3n 的基礎上，再加上 1～2 個 3^0，而加上 1～2 個的 3^0 因不足三，所以不會影響方法數。

因此，如果要用 3 來湊成任意的正整數 $x=3n+k$ （$0\le k<3$，n,k 是正整數 ）， 我們發現 $a(x)=a(n)$

五、 嘗試推廣至用 N 湊 N

(一)用 2 湊 2

N=1 ，=2

2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	1	0
0	0	0	2

N=2，=4

2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	0	0
0	0	2	0
0	0	1	2
0	0	0	4

N=3，=6

2^3	2^2	2^1	2^0
0	1	1	0
0	1	0	2
0	0	3	0
0	0	2	2
0	0	1	4
0	0	0	6

N=4，=8

2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	0
0	2	0	0
0	1	2	0
0	1	1	2
0	1	0	4
0	0	4	0

0	0	3	2
0	0	2	4
0	0	1	6
0	0	0	8

N=5，=10

2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	1	0
1	0	0	2
0	2	1	0
0	2	0	2
0	1	3	0
0	1	2	2
0	1	1	4
0	1	0	6
0	0	5	0
0	0	4	2
0	0	3	4
0	0	2	6
0	0	1	8
0	0	0	10

依照以上按照二進位所統整出的表格，我們可以把方法數排成一列然後找出他們之間的規律
方法數排列:2,4,6,10,14,20,26,36,46,……而因為我們已經能從上述的數列中看出規律，所以我們可列出此數列的遞迴式子。

$a(n)=a(n-1)+a\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ ，([ ] 為高斯符號)

用四湊四

因為看到用二湊二能夠觀察出如此的規律，我們也開始著手於用四湊四

N=1
4 →010
→004

N=2
8 →020
→014
→008

N=3
12 →030
→024
→018
→00(12)

N=4
16→100
→040
→034
→028
→01(12)
→00(16)

N=5
20→110
→104
→050
→044

……

→038
→02(12)
→01(16)
→00(20)

依此類推我們可依發現他的方法其實是跟用三湊三所延伸出四進位的方法，其方法數到最後會排列為 2,3,4,6,8,10,12,15,18,21,24,28……

而我們也可以從四進位中知道這個數列的規律以及求出他的方法數的變化。

$a(n)=a(n-1)+a\left(\left[\frac{n}{4}\right]\right)$ ，([ ] 為高斯符號)

有關於用二湊二還有用四湊四的結論，我們都可以發現無論 N 之值為何，我們都可以利用 N 進位的方式來推導出他的遞迴式以及它的規律，這不僅讓我們得到了更大的進展。也讓我們為自己找到一個如此相對應的結論而感到十分興奮。而這樣一路的推導下來使我們還想探討更多有關於整數分割以及 N 進位的奧妙之處。

所以經過我們接下來的推導可以發現如果我們今天是用 N 湊 N 的話，我們可依推出

$a(n)=a(n-1)+a\left(\left[\frac{n}{N}\right]\right)$ ，([ ] 為高斯符號)

整數分割

透過文獻探討，知道我們這個題目是屬於整數分割的一小部分。

所謂的整數的分割是指把正整數 n 分割為若干個正整數, 各個正整數相加之和為 n, 問有多少種不同分割法?例如:

4 可以用 5 種方法寫成：4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1

5 可以用 7 種方法寫成:5,4+1,3+2,3+1+1,2+2+1,2+1+1+1,1+1+1+1+1

6 可以用 11 種方法成:

6,5+1,4+2,4+1+1,3+3,3+2+1,3+1+1+1,2+2+2,2+2+1+1,2+1+1+1+1,1+1+1+1+1+1

7 可以用 15 種方法成:

我們可以依此類推我們可以列成一個表格而且我們所列出的數字也會有以下如此不可思議的規律

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
$P_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$P_2(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5
$P_3(n)$	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8

也符合著 $P_k(n)=P_{k-1}(n-1)+P_k(n-k)$ 這個式子

而我們的科展是用三湊三，因此我們自然而然就會像要查看有關於 3 的整數分割的部分

也符合著 $P_k(n) = P_{k-1}(n-1) + P_k(n-k)$ 這個式子

例如 我們的科展用三湊三來說
以 03 來說 $P_3(3)=P_2(2)+P_3(0)$，
以 06 來說 $P_3(6)=P_2(5)+P_3(3)$，
以 09 來說 $P_3(9)=P_2(8)+P_3(6)$，
以 12 來說 $P_3(12)=P_2(11)+P_3(9)$
… … … …
以 n 來說 $P_3(3n)=P_2(3n-1)+P_3(3n-3)$
到最後我們能夠透過上述的式子推出 $P_3(3n)=P_2(2)+P_2(5)+P_2(8)+\cdots\cdots+P_2(3n-1)$

六、 利用生成函數，來解釋用三湊三的方法數

在文獻探討中，發現有關整數分割生成函數的資料，我們發現:
整數分割的生成函數
給定 n 為正整數，$p(n)$ 代表分割的方法數，現在考慮
$f(x) = (1+x+x^2+....)(1+x^2+x^4+....)(1+x^3+x^6+....)\cdots(1+x^n+x^{2n}+....)$, 則
$p(n)$ 代表 $f(x)$ 中 x^n 中的係數，所有 $f(x)$ 是 $p(n)$ 的生成函數。

而我們研究的主題用三湊三，其實是整數分割的特例，所以，如果我們把生成函數，改寫成如下
湊 3 時
➔ $(1+x^1+x^2+x^3)(1+x^3)$ ，$a(1)=x^3$ 的係數總和
湊 6 時
➔ $(1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x^3+x^6)$， $a(2)=x^6$ 的係數總和
湊 9 時
➔ $(1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9)(1+x^3+x^6+x^9)(1+x^9)$ ，$a(3)=x^9$ 的係數總和

所以，當我們令

$f(x)$
$=(1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\cdots\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+\cdots\cdots)(1+x^9+x^{18}+x^{27}+x^{36}+x^{45}+\cdots\cdots)\cdots\cdots$

$a(n)=f(x)$ 中，x^{3n} 項的係數總和

伍:研究成果

一、利用樹狀圖，找出用三湊三的規律
二、利用三進位，找出用三湊三的規律
三、利用三進位，找出用三湊三的遞迴式。
四、利用遞迴式，找出用三湊 N 的遞迴式。
五、利用遞迴式，找出用 N 湊 N 的遞迴式。
六、利用整數分割的觀念，寫出用三湊三的生成函數，並解釋之。

柒:參考資料

1.游森棚(2018)。用三湊三。科學研習月刊，第 57 卷第 08 期，52。

捌:附錄

一、利用樹狀圖，求方法數

N=3 的倍數

N=1		N=2			N=3			
111	➔1	111	111	➔1	111	111	111	➔1
3	➔1	3	111	➔2	3	111	111	➔3
		3	3		3	3	111	
					3	3	3	
						9		➔1

N=4

111	111	111	111	➔1
3	111	111	111	➔4
3	3	111	111	
3	3	3	111	
3	3	3	3	
	9		111	➔2
	9		3	

N=5

111	111	111	111	111	➔1		
3	111	111	111	111		➔5	
		…					
3	3	3	3	3			
	9		111	111		➔1	➔3
	9		3	111		➔2	
	9		3	3			

N=6

111	111	111	111	111	111	➔1
3	111	111	111	111	111	➔6
		…				
3	3	3	3	3	3	
	9		111	111	111	➔1 ➔5
	9		3	111	111	➔3
	9		3	3	111	
	9		3	3	3	
	9			9		➔1

N=7

111 111 111 111 111 111 111 ➔1

3 111 111 111 111 111 111 ➔7

…

3 3 3 3 3 3 3

9 111 111 111 111 ➔1 ➔7

9 3 111 111 111 ➔4

…

9 3 3 3 3

9 9 111 ➔2

9 9 3

N=8

111 111 111 111 111 111 111 111 ➔1

3 111 111 111 111 111 111 111 ➔8

…

3 3 3 3 3 3 3 3

9 111 111 111 111 111 ➔1 ➔9

9 3 111 111 111 111 ➔5

…

9 3 3 3 3 3

9 9 111 111 ➔1

9 9 3 111 ➔2

9 9 3 3

N=9

111 111 111 111 111 111 111 111 111 ➔1

3 111 111 111 111 111 111 111 111 ➔9

…

3 3 3 3 3 3 3 3 3

9 111 111 111 111 111 111 ➔1 ➔12

9 3 111 111 111 111 111 ➔6

…

9 3 3 3 3 3 3

9 9 111 111 111 ➔1

9 9 3 111 111 ➔3

…

9 9 3 3 3

9 9 9 ➔1

27 ➔1

N=10

111 111 111 111 111 111 111 111 111 111 ➔1

3 111 111 111 111 111 111 111 111 111 ➔10

…

3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

9 111 111 111 111 111 111 111 ➔1 ➔15

9 3 111 111 111 111 111 111 ➔7

…

9 3 3 3 3 3 3 3

9 9 111 111 111 111 ➔1

9 9 3 111 111 111 ➔4

…

9 9 3 3 3 3

9 9 9 111 ➔1

9 9 9 3 ➔1

27 111 ➔2

27 3

N=11

111 111 111 111 … 111 111 ➔1

3 111 111 111 … 111 111 ➔11

…

3 3 3 3 3 … 3 3

9 111 111 … 111 ➔1 ➔18

9 3 111 … 111 ➔8

…

9 3 3 3 3 … 3

9 9 111 111 … 111 ➔1

9 9 3 111 … 111 ➔5

…

9 9 3 3 3 3 3

9 9 9 111 111 ➔1

9 9 9 3 111 ➔2

9 9 9 3 3

27 111 111 ➔3

27 3 111

27 3 3

N=12

111 111 111 111 111 … 111 ➔1

3 111 111 111 111 … 111 ➔12

…

3 3 3 3 3 … 3

9 111 111 … 111 ➔1 ➔22

9 3 111 … 111 ➔9

…

9 3 3 3 3 … 3

9 9 111 111 … 111 ➔1

9 9 3 111 … 111 ➔6

…

9 9 3 3 3 3 3 3

9 9 9 111 111 111 ➔1

9 9 9 3 111 111 ➔3

…

9 9 9 3 3 3

9 9 9 9 ➔1

27 111 111 111 ➔1➔5

27 3 111 111 ➔3

…

27 3 3 3

27 9 ➔1

二、利用三進位的求方法數

將 3 的倍數(3N)換成三進位，在湊出所有可能的組合

N=1	N=2	N=3	N=4	N=5
3→10	6→20	9→100	12→110	15→120
→03	→13	→30	→103	→113
	→06	→23	→040	→106
		→16	→033	→050
		→09	→026	→043
			→019	→036
			→00(12)	→029
				→01(12)
				→00(15)

N=6	N=7	N=8	N=9
18→200	21→210	24→220	27→1000
→130	→203	→213	→300
→123	→140	→206	→230
→116	→133	→150	→223
→109	→126	→143	→216
→060	→119	→136	→209
→053	→10(12)	→129	→160
→046	→070	→11(12)	→153
→039	→063	→10(15)	→146
→02(12)	→056	→080	→139
→01(15)	→049	→073	→12(12)
→00(18)	→03(12)	→066	→11(15)
	→02(15)	→059	→10(18)
	→01(18)	→04(12)	→090
	→00(21)	→03(15)	→083
		→02(18)	→076
		→01(21)	→069
		→00(24)	→05(12)
			→04(15)
			→03(18)
			→02(21)
			→01(24)
			→00(27)

N=10	N=11	N=12
30→1010	33→1020	36→1100
→1003	→1013	→1030
→310	→1006	→1023
→303	→0320	→1016
→240	→0313	→1009
→233	→0306	→0400
→226	→0250	→0330
→219	→0243	→0323
→20(12)	→0236	→0316
→170	→0229	→0309
→163	→021(12)	→0260
→156	→020(15)	→0253
→149	→0180	→0256
→13(12)	→0173	→0249
→12(15)	→0166	→023(12)
→11(18)	→0159	→022(15)

→10(21)	→014(12)	→021(18)
→0(10)0	→013(15)	→020(21)
→093	→012(18)	→0190
→086	→011(21)	→0183
→079	→010(24)	→0176
→06(12)	→00(11)0	→0169
→05(15)	→00(10)3	→015(12)
→04(18)	→0096	→014(15)
→03(21)	→0089	→013(18)
→02(24)	→007(12)	→012(21)
→01(27)	→006(15)	→011(24)
→00(30)	→005(18)	→010(27)
	→004(21)	→00(12)0
	→003(24)	→00(11)3
	→002(27)	→00(10)6
	→001(30)	→0099
	→000(33)	→008(12)
		→007(15)
		→006(18)
		→005(21)
		→004(24)
		→003(27)
		→002(30)
		→001(33)
		→000(36)

三的 N 倍	方法數		三進位表示
N=1:	2	=2	➔(10)
N=2:	3	=3	➔(20)
N=3:	1+4	=5	➔(100)
N=4:	2+5	=7	➔(110)
N=5:	3+6	=9	➔(120)
N=6:	1+4+7	=12	➔(200)
N=7:	2+5+8	=15	➔(210)
N=8:	3+6+9	=18	➔(220)
N=9:	1+1+4+7+10	=23	➔(1000)
N=10:	2+2+5+8+11	=28	➔(1010)
N=11:	3+3+6+9+12	=33	➔(1020)
N=12:	1+4+1+4+7+10+13	=40	➔(1100)
N=13:	2+5+2+5+8+11+14	=47	➔(1110)
N=14:	3+6+3+6+9+12+15	=54	➔(1120)
N=20:	3+3+6+9+12+3+6+9+12+15+18+21	=117	➔(2020)

N=27:　　1+1+1+4+7+10+1+4+7+10+13+16+19
　　+1+4+7+10+13+16+19+22+25+28　　=239　　➔(10000)

三、用三湊 3n, 3n+1, 3n+2

N=1 時

3→10　　4→11　　5→12
 →03　　 →04　　 →05

N=2 時

6→20　　7→21　　8→22
 →13　　 →14　　 →15
 →06　　 →07　　 →08

N=3 時

9→100　　10→101　　11→102
 →030　　 →031　　 →032
 →023　　 →024　　 →025
 →016　　 →017　　 →018
 →009　　 →00(10)　　 →00(11)

N=4 時

12→110　　13→111　　14→112
 →103　　 →104　　 →105
 →040　　 →041　　 →042
 →033　　 →034　　 →035
 →026　　 →027　　 →028
 →019　　 →01(10)　　 →01(11)
 →00(12)　　 →00(13)　　 →00(14)

N=5 時

15→120　　16→121　　17→122
 →113　　 →114　　 →115
 →106　　 →107　　 →108
 →050　　 →051　　 →052
 →043　　 →044　　 →045
 →036　　 →037　　 →038
 →029　　 →02(10)　　 →02(11)
 →01(12)　　 →01(13)　　 →01(14)
 →00(15)　　 →00(16)　　 →00(17)

N=6 時

18→200　　19→201　　20→202
 →130　　 →131　　 →132

→123	→124	→125
→116	→117	→118
→109	→10(10)	→10(11)
→060	→061	→62
→053	→054	→55
→046	→047	→48
→039	→03(10)	→03(11)
→02(12)	→02(13)	→02(14)
→01(15)	→01(16)	→01(17)
→00(18)	→00(19)	→00(20)

N=7 時

21→210	22→211	23→212
→203	→204	→205
→140	→141	→142
→133	→134	→135
→126	→127	→128
→119	→11(10)	→11(11)
→10(12)	→10(13)	→10(14)
→070	→071	→072
→063	→064	→065
→056	→057	→058
→049	→04(10)	→04(11)
→03(12)	→03(13)	→03(14)
→02(15)	→02(16)	→02(17)
→01(18)	→01(19)	→01(20)
→00(21)	→00(22)	→00(23)

N=8 時

24→220	25→221	26→222
→213	→214	→215
→206	→207	→208
→150	→151	→152
→143	→144	→145
→136	→137	→138
→129	→12(10)	→12(11)
→11(12)	→11(13)	→11(14)
→10(15)	→10(16)	→10(17)
→080	→081	→082
→073	→074	→075
→066	→067	→068
→059	→05(10)	→05(11)
→04(12)	→04(13)	→04(14)
→03(15)	→03(16)	→03(17)
→02(18)	→02(19)	→02(20)
→01(21)	→01(22)	→01(23)
→00(24)	→00(25)	→00(26)

N=9 時

27→1000	28→1001	29→1002
→0300	→0301	→0302
→0230	→0231	→0232
→0223	→0224	→0235
→0216	→0217	→0218
→0209	→020(10)	→020(11)
→0160	→0161	→0162
→0153	→0154	→0155
→0146	→0147	→0148
→0139	→013(10)	→013(11)
→012(12)	→012(13)	→012(14)
→011(15)	→011(16)	→011(17)
→010(18)	→010(21)	→010(22)
→0090	→0091	→0092
→0083	→0084	→0085
→0076	→0077	→0078
→0069	→006(10)	→006(11)
→005(12)	→005(13)	→005(14)
→004(15)	→004(16)	→004(17)
→003(18)	→003(19)	→003(20)
→002(21)	→002(22)	→002(23)
→001(24)	→001(25)	→001(26)
→000(27)	→000(28)	→000(29)

N=10 時

30→1010	31→1011	32→1012
→1003	→1004	→1005
→0310	→0311	→0312
→0303	→0304	→0305
→0240	→0241	→0242
→0233	→0234	→0235
→0226	→0227	→0228
→0219	→021(10)	→021(11)
→020(12)	→020(13)	→020(14)
→0170	→0171	→0172
→0163	→0164	→0165
→0156	→0157	→0158
→0149	→014(10)	→014(11)
→013(12)	→013(13)	→013(14)
→012(15)	→012(16)	→012(17)
→011(18)	→011(19)	→011(20)
→010(21)	→010(22)	→010(23)
→00(10)0	→00(10)1	→00(10)2
→0093	→0094	→0095
→0086	→0087	→0088
→0079	→007(10)	→007(11)
→006(12)	→006(13)	→006(14)

→005(15)	→005(16)	→005(17)
→004(18)	→004(19)	→004(20)
→003(21)	→003(22)	→003(23)
→002(24)	→002(25)	→002(26)
→001(27)	→001(28)	→001(29)
→000(30)	→000(31)	→000(32)

N=11 時

33→1020	34→1021	35→1022
→1013	→1014	→1015
→1006	→1007	→1008
→0320	→0321	→0322
→0313	→0314	→0315
→0306	→0307	→0308
→0250	→0251	→0252
→0243	→0244	→0245
→0236	→0237	→0238
→0229	→022(10)	→022(11)
→021(12)	→021(13)	→021(14)
→020(15)	→020(16)	→020(17)
→0180	→0181	→0182
→0173	→0174	→0175
→0166	→0167	→0168
→0159	→015(10)	→015(11)
→014(12)	→014(13)	→014(14)
→013(15)	→013(16)	→013(17)
→012(18)	→012(19)	→012(20)
→011(21)	→011(22)	→011(23)
→010(24)	→010(25)	→010(25)
→00(11)0	→00(11)1	→00(11)2
→00(10)3	→00(10)4	→00(10)5
→0096	→0097	→0098
→0089	→008(10)	→008(11)
→007(12)	→007(13)	→007(14)
→006(15)	→006(16)	→006(17)
→005(18)	→005(19)	→005(20)
→004(21)	→004(22)	→004(23)
→003(24)	→003(25)	→003(26)
→002(27)	→002(28)	→002(29)
→001(30)	→001(31)	→001(32)
→000(33)	→000(34)	→000(35)

N=12 時

36→1100	37→1101	38→1102
→1030	→1031	→1032
→1023	→1024	→1025
→1016	→1017	→1018
→1009	→100(10)	→100(11)

→0400	→0401	→0402
→0330	→0331	→0332
→0323	→0324	→0325
→0316	→0317	→0318
→0309	→030(10)	→030(11)
→0260	→0261	→0262
→0253	→0254	→0255
→0246	→0247	→0248
→0239	→023(10)	→023(11)
→022(12)	→022(13)	→022(14)
→021(15)	→021(16)	→021(17)
→020(18)	→020(19)	→020(20)
→0190	→0191	→0192
→0183	→0184	→0185
→0176	→0177	→0178
→0169	→016(10)	→016(11)
→015(12)	→015(13)	→015(14)
→014(15)	→014(16)	→014(17)
→013(18)	→013(19)	→013(20)
→012(21)	→012(22)	→012(23)
→011(24)	→011(25)	→011(26)
→010(27)	→010(28)	→010(29)
→00(12)0	→00(12)1	→00(12)2
→00(11)3	→00(11)4	→00(11)5
→00(10)6	→00(10)7	→00(10)8
→0099	→009(10)	→009(11)
→008(12)	→008(13)	→008(14)
→007(15)	→007(16)	→007(17)
→006(18)	→006(19)	→006(20)
→005(21)	→005(22)	→005(23)
→004(24)	→004(25)	→004(26)
→003(27)	→003(28)	→003(29)
→002(30)	→002(31)	→002(32)
→001(33)	→001(34)	→001(35)
→000(36)	→000(37)	→000(38)