

嘉義市第 37 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：「帥」!猜到了

關鍵詞：數學推理、最佳策略

編號：

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

作品名稱：「帥」!猜到了

摘要：

某甲從 10, 11, ..., 99 二位整數中任選一個，由某乙來猜。當乙猜的數為下列三種情形之一：

- (I) 完全正確；
 - (II) 個位數是正確的，且十位數字相差為 1；
 - (III) 十位數是正確的，且個位數字相差為 1，
- 則甲說「帥」，否則就說「遜」。

請問猜 18 次可以確定甲所挑選的數嗎？

24 次可以嗎？那 22 次呢？

題目要求：解釋為什麼行或不行？或尋找其策略是什麼？

經過探討之後，不可能在 18 次內；24 次或 22 次要靠策略？

請大家也一起來挑戰吧？

壹、研究動機：

小華先從 10, 11, ..., 99 這些二位數中任意挑選一個數後，再由小明來猜這個數。若小明猜的數屬於下列三種情形之一：

- (I) 完全正確；
- (II) 個位數是正確的，且十位數字相差為 1；
- (III) 十位數是正確的，且個位數字相差為 1，

則小華說「帥」，否則就說「遜」。(例如：小華所挑的數字為 65，若小明說出 65、55、75、64 或 66 之一，則小華說「帥」，否則小華就說「遜」。)

(1) 試證：在不超過 18 次猜測的限制下，小明沒有任何策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。

(2) 在不超過 24 次猜測的限制下，請幫小明找一種策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。

(3) 在不超過 22 次猜測的限制下，是否有一種策略可以保證小明能正確地推導出小華所挑選的數？

上學期，有一次上社團課時，老師讓我們討論一個看似簡單的數學猜謎遊戲(題目如上)，要盡量用越少的次數，跟朋友玩的時候才發現其實要在規定次數內猜出答案並不簡單，於是激發了我們挑戰的心，在寒假的時候，跟組員們認真地思考如何證明問題的答案？以及找到所謂的策略？

為了解開心中的疑問，我們決定好好地研究一番。

貳、研究目的：

- 一、探討此類問題的解題策略，如何盡量降低猜答案的次數。
- 二、探討並證明原始問題。

參、研究器材與設備：

計算紙、10~99 數字表、黑白棋子、word 和 excel 軟體、人腦和挑戰的心。

肆、研究過程與方法：

一、探討此類問題的解題策略，如何盡量降低猜答案的次數：

研究方法：我們先從簡單的開始，由 3 列，4 列，…，直到 9 列，先固定列數，然後分別討論行數增加時，尋找解題的策略。

(一)以列數少的情況開始進行，藉此跟組員理解題目的變化並獲取解題的經驗或策略：

例如：開始時我們先分甲方和乙方，甲方先從 10，11，…，39(或 49、59)這些二位數中任意挑選一個數後，再由乙方來猜這個數。若乙方猜的數屬於下列三種情形之一：

(I)完全正確；

(II)個位數是正確的，且十位數字相差 1；

(III)十位數是正確的，且十位數字相差 1，

則甲方說"帥"，否則就說"遜"，

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

經過一番對戰之後，我們獲得了以下的解題經驗或策略：

1、如果猜的數字在角落，可以涵蓋到 3 格；如果猜的數字在邊上(非角落)，可以涵蓋到 4 格；如果猜的數字在中間，則可以涵蓋到 5 格。

2、某一次猜數，被喊"帥"時，在沒有其他的資訊下，還要再幾次才能鎖定答案，可分為：

(1) 如果猜的數字在角落，還要再 2 次才能鎖定答案；

(2) 如果猜的數字在邊上(非角落)，還要再 2 次才能鎖定答案；

(3) 如果猜的數字在中間，則還要再 3 次才能鎖定答案。

所以中間的數要先猜。

3、適當地留下「洞」—不猜的數，不必每個數都猜或涵蓋到。

4、猜數時，在考慮整個大局時不一定多猜中間的數是最好的策略，雖然它可以涵蓋到 5 格。

為區分數字：猜的數以黃色為底色；涵蓋的數以綠色為底色

並且規定：最後確定答案的那次不計入猜數的總次數當中。

(二) 逐項探討和說明：

1. 三列的情況：

(1) 3×3 (3 列 3 行)：

猜數順序	第1次	第2次
猜數	12	20

10	11	12
20	21	22
30	31	32

我們將猜數的順序及猜數之後可涵蓋的數整理成上面的圖表，然後用以下的兩個步驟來確定總次數：

(a) 在這個過程中，我們總共猜了 2 次，如果在這 2 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $2+2=4$ 次。

(b) 如果在這 2 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 2 個洞，故必須加 1 次才能確定答案，故總次數為 $2+1=3$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 4 次必可確定答案。

(2) 3×4 (3 列 4 行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次
猜數	10	31	23

10	11	12	13
20	21	22	23
30	31	32	33

(a) 在這個過程中，我們總共猜了 3 次，如果在這 3 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $3+2=5$ 次。

(b) 如果在這 3 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 1 個洞(12 號)，故確定答案，就是 12。

由(a)、(b)知，總次數至多 5 次必可確定答案。

(3) 3×5 (3 列 5 行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次
猜數	21	13	34

10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34

- (a)在這個過程中，我們總共猜了3次，如果在這3次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $3+2=5$ 次。
- (b)如果在這3次猜數中都被喊「遜」的話，因為有3個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為 $3+2=5$ 次。
- 由(a)、(b)知，總次數至多5次必可確定答案。

(4) $3*6$ (3列6行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次
猜數	20	12	33	15

10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	35

- (a)在這個過程中，我們總共猜了4次，如果在這4次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $4+2=6$ 次。
- (b)如果在這4次猜數中都被喊「遜」的話，因為有3個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為 $4+2=6$ 次。
- 由(a)、(b)知，總次數至多6次必可確定答案。

(5) $3*7$ (3列7行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次
猜數	25	13	32	10

10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	36

(a)在這個過程中，我們總共猜了4次，如果在這4次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $4+2=6$ 次。

(b)如果在這4次猜數中都被喊「遜」的話，因為有5個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為 $4+3=7$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多7次必可確定答案。

(6) $3*8$ (3列8行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
猜數	10	31	23	35	27

10	11	12	13	14	15	16	17
20	21	22	23	24	25	26	27
30	31	32	33	34	35	36	37

(a)在這個過程中，我們總共猜了5次，如果在這5次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $5+2=7$ 次。

(b)如果在這5次猜數中都被喊「遜」的話，因為有4個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為 $5+2=7$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多7次必可確定答案。

(7) $3*9$ (3列9行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
猜數	10	31	23	27	35

10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38

(a)在這個過程中，我們總共猜了5次，如果在這5次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $5+2=7$ 次。

(b)如果在這5次猜數中都被喊「遜」的話，因為有6個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為 $5+3=8$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多8次必可確定答案。

(8) $3*10$ (3列10行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次
猜數	29	17	36	24	32	20

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

- (a)在這個過程中，我們總共猜了6次，如果在這6次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為6+2=8次。
- (b)如果在這6次猜數中都被喊「遜」的話，因為有5個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為6+3=9次。
- 由(a)、(b)知，總次數至多9次必可確定答案。

2. 四列的情況：

(1) 4*4(4列4行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次
猜數	22	10	41

10	11	12	13
20	21	22	23
30	31	32	33
40	41	42	43

- (a)在這個過程中，我們總共猜了3次，如果在這3次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為3+2=5次。
- (b)如果在這3次猜數中都被喊「遜」的話，因為有4個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為3+2=5次。
- 由(a)、(b)知，總次數至多5次必可確定答案。

(2) 4*5(4列5行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次
猜數	32	11	24	40

10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

(a)在這個過程中，我們總共猜了4次，如果在這4次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為4+2=6次。

(b)如果在這4次猜數中都被喊「遜」的話，因為有4個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為4+2=6次。

由(a)、(b)知，總次數至多6次必可確定答案。

(3) 4*6(4列6行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
猜數	35	14	22	43	10

10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45

(a)在這個過程中，我們總共猜了5次，如果在這5次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為5+2=7次。

(b)如果在這5次猜數中都被喊「遜」的話，因為有4個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為5+3=8次。

由(a)、(b)知，總次數至多8次必可確定答案。

(4) 4*7(4列7行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次
猜數	12	15	20	33	41	45

10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	36
40	41	42	43	44	45	46

(a)在這個過程中，我們總共猜了6次，如果在這6次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為6+2=8次。

(b)如果在這6次猜數中都被喊「遜」的話，因為有3個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為6+2=8次。

由(a)、(b)知，總次數至多8次必可確定答案。

(5) 4*8(4列8行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次
猜數	12	15	20	27	33	41	46

10	11	12	13	14	15	16	17
20	21	22	23	24	25	26	27
30	31	32	33	34	35	36	37
40	41	42	43	44	45	46	47

(a)在這個過程中，我們總共猜了7次，如果在這7次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為7+2=9次。

(b)如果在這7次猜數中都被喊「遜」的話，因為有3個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為7+2=9次。

由(a)、(b)知，總次數至多9次必可確定答案。

(6) 4*9(4列9行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次
猜數	10	31	23	15	44	37	18

10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48

(a)在這個過程中，我們總共猜了7次，如果在這7次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為7+2=9次。

(b)如果在這7次猜數中都被喊「遜」的話，因為有7個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為7+3=10次。

由(a)、(b)知，總次數至多10次必可確定答案。

(7) 4*10(4列10行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次
猜數	23	11	18	45	37	30	15	42	49

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49

(a)在這個過程中，我們總共猜了9次，如果在這9次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為9+2=11次。

(b)如果在這9次猜數中都被喊「遜」的話，因為有3個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為9+2=11次。

由(a)、(b)知，總次數至多11次必可確定答案。

3. 五列的情形：

(1) 5*5(5列5行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
猜數	20	50	42	23	54

10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44
50	51	52	53	54

(a)在這個過程中，我們總共猜了5次，如果在這5次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $5+2=7$ 次。

(b)如果在這5次猜數中都被喊「遜」的話，因為有5個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為 $5+3=8$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多8次必可確定答案。

(2) $5*6$ (5列6行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次
猜數	35	54	23	42	20	50

10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55

(a)在這個過程中，我們總共猜了6次，如果在這6次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $6+2=8$ 次。

(b)如果在這6次猜數中都被喊「遜」的話，因為有5個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為 $6+3=9$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多9次必可確定答案。

(3) $5*7$ (5列7行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次
猜數	20	50	12	42	54	25	46

10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	36
40	41	42	43	44	45	46
50	51	52	53	54	55	56

(a)在這個過程中，我們總共猜了7次，如果在這7次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為7+2=9次。

(b)如果在這7次猜數中都被喊「遜」的話，因為有6個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為7+3=10次。

由(a)、(b)知，總次數至多10次必可確定答案。

(4) 5*8(5列8行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次
猜數	55	14	22	26	51	43	47	10

10	11	12	13	14	15	16	17
20	21	22	23	24	25	26	27
30	31	32	33	34	35	36	37
40	41	42	43	44	45	46	47
50	51	52	53	54	55	56	57

(a)在這個過程中，我們總共猜了8次，如果在這8次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為8+2=10次。

(b)如果在這8次猜數中都被喊「遜」的話，因為有6個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為8+3=11次。

由(a)、(b)知，總次數至多11次必可確定答案。

(5) 5*9(5列9行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次
猜數	55	14	17	22	38	40	43	36	10

10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58

(a)在這個過程中，我們總共猜了9次，如果在這9次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為9+2=11次。

(b)如果在這9次猜數中都被喊「遜」的話，因為有8個洞，故必須加4次才能確定答案，故總次數為9+4=13次。

由(a)、(b)知，總次數至多13次必可確定答案。

(6) 5*10(5列10行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次
猜數	11	24	27	40	53	32	45	48	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

(a)在這個過程中，我們總共猜了9次，如果在這9次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為9+2=11次。

(b)如果在這9次猜數中都被喊「遜」的話，因為有10個洞，故必須加5次才能確定答案，故總次數為9+5=14次。

由(a)、(b)知，總次數至多14次必可確定答案。

4. 六列的情形：

(1) 6*6(6列6行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次
猜數	10	14	22	43	40	61	65	35

10	11	12	13	14	15
20	21	22	23	24	25
30	31	32	33	34	35
40	41	42	43	44	45
50	51	52	53	54	55
60	61	62	63	64	65

(a)在這個過程中，我們總共猜了8次，如果在這8次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為8+2=10次。

(b)如果在這8次猜數中都被喊「遜」的話，因為有4個洞，故必須加2次才能確定答案，故總次數為8+2=10次。

由(a)、(b)知，總次數至多10次必可確定答案。

(2)6*7(6列7行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次
猜數	20	50	12	62	43	24	65	16	46

10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	36
40	41	42	43	44	45	46
50	51	52	53	54	55	56
60	61	62	63	64	65	66

(a)在這個過程中，我們總共猜了9次，如果在這9次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為9+2=11次。

(b)如果在這9次猜數中都被喊「遜」的話，因為有5個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為9+3=12次。

由(a)、(b)知，總次數至多12次必可確定答案。

(3)6*8(6列8行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次
猜數	12	20	33	50	62	54	26	66	47

10	11	12	13	14	15	16	17
20	21	22	23	24	25	26	27
30	31	32	33	34	35	36	37
40	41	42	43	44	45	46	47
50	51	52	53	54	55	56	57
60	61	62	63	64	65	66	67

(a)在這個過程中，我們總共猜了 9 次，如果在這 9 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $9+2=11$ 次。

(b)如果在這 9 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 9 個洞，故必須加 4 次才能確定答案，故總次數為 $9+4=13$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 13 次必可確定答案。

(4)6*9(6 列 9 行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	10	60	41	22	53	34	15	65	46	27
猜數順序	第11次									
猜數	58									

10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58
60	61	62	63	64	65	66	67	68

(a)在這個過程中，我們總共猜了 11 次，如果在這 11 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $11+2=13$ 次。

(b)如果在這 11 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 6 個洞，故必須加 4 次才能確定答案，故總次數為 $11+4=15$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 15 次必可確定答案。

(5)6*10(6 列 10 行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	20	60	41	12	33	63	15	55	36	28
猜數順序	第11次	第12次								
猜數	67	59								

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69

(a)在這個過程中，我們總共猜了12次，如果在這12次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $12+2=14$ 次。

(b)如果在這12次猜數中都被喊「遜」的話，因為有8個洞，故必須加4次才能確定答案，故總次數為 $12+4=16$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多16次必可確定答案。

5. 七列的情形：

(1)7*7(7列7行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	20	50	71	12	42	63	24	75	16	56

10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	36
40	41	42	43	44	45	46
50	51	52	53	54	55	56
60	61	62	63	64	65	66
70	71	72	73	74	75	76

(a)在這個過程中，我們總共猜了10次，如果在這10次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $10+2=12$ 次。

(b)如果在這10次猜數中都被喊「遜」的話，因為有7個洞，故必須加3次才能確定答案，故總次數為 $10+3=13$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 13 次必可確定答案。

(2) 7*8(7 列 8 行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	20	50	71	12	42	63	24	45	75	16
猜數順序	第11次	第12次								
猜數	37	67								

10	11	12	13	14	15	16	17
20	21	22	23	24	25	26	27
30	31	32	33	34	35	36	37
40	41	42	43	44	45	46	47
50	51	52	53	54	55	56	57
60	61	62	63	64	65	66	67
70	71	72	73	74	75	76	77

(a) 在這個過程中，我們總共猜了 12 次，如果在這 12 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $12+2=14$ 次。

(b) 如果在這 12 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 4 個洞，故必須加 2 次才能確定答案，故總次數為 $12+2=14$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 14 次必可確定答案。

(3) 7*9(7 列 9 行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	12	16	20	24	37	42	45	50	63	67
猜數順序	第11次	第12次								
猜數	71	75								

10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58
60	61	62	63	64	65	66	67	68
70	71	72	73	74	75	76	77	78

(a)在這個過程中，我們總共猜了 12 次，如果在這 12 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $12+2=14$ 次。

(b)如果在這 12 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 9 個洞，故必須加 5 次才能確定答案，故總次數為 $12+5=17$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 17 次必可確定答案。

(4) $7*10$ (7 列 10 行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	20	50	71	12	42	63	24	45	75	16
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次					
猜數	37	67	19	49	79					

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79

(a)在這個過程中，我們總共猜了 15 次，如果在這 15 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $15+2=17$ 次。

(b)如果在這 15 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 6 個洞，故必須加 3 次才能確定答案，故總次數為 $15+3=18$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 18 次必可確定答案。

6. 八列的情形：

(1) $8*8$ (8 列 8 行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	20	50	71	12	42	63	24	84	45	16
猜數順序	第11次	第12次								
猜數	66	37								

10	11	12	13	14	15	16	17
20	21	22	23	24	25	26	27
30	31	32	33	34	35	36	37
40	41	42	43	44	45	46	47
50	51	52	53	54	55	56	57
60	61	62	63	64	65	66	67
70	71	72	73	74	75	76	77
80	81	82	83	84	85	86	87

(a)在這個過程中，我們總共猜了12次，如果在這12次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $12+2=14$ 次。

(b)如果在這12次猜數中都被喊「遜」的話，因為有10個洞，故必須加5次才能確定答案，故總次數為 $12+5=17$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多17次必可確定答案。

(2) $8*9$ (8列9行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	30	70	11	51	82	23	63	44	15	75
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次					
猜數	56	37	87	18	68					

10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58
60	61	62	63	64	65	66	67	68
70	71	72	73	74	75	76	77	78
80	81	82	83	84	85	86	87	88

(a)在這個過程中，我們總共猜了15次，如果在這15次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $15+2=17$ 次。

(b)如果在這 15 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 6 個洞，故必須加 3 次才能確定答案，故總次數為 $15+3=18$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 18 次必可確定答案。

(3) $8*10$ (8 列 10 行)：

(A)第一種作法：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	20	50	80	12	42	72	24	54	84	16
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次					
猜數	46	76	28	58	88					

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89

(a)在這個過程中，我們總共猜了 15 次，如果在這 15 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $15+2=17$ 次。

(b)如果在這 15 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 13 個洞，故必須加 7 次才能確定答案，故總次數為 $15+7=22$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 22 次必可確定答案。

(B)第二種作法：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	11	13	16	19	25	32	37	40	44	49
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次	第16次	第17次	第18次		
猜數	52	56	60	65	77	81	85	89		

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89

(a)在這個過程中，我們總共猜了18次，如果在這18次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加2次就可確定答案，故總次數至多為 $18+2=20$ 次。

(b)如果在這18次猜數中都被喊「遜」的話，因為有10個洞，故必須加4次才能確定答案，故總次數為 $18+4=22$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多22次必可確定答案。

7. 九列的情形：

*9(9列9行)：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	30	80	11	61	42	92	23	73	54	35
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次	第16次	第17次			
猜數	85	16	66	47	97	28	78			

10	11	12	13	14	15	16	17	18
20	21	22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	36	37	38
40	41	42	43	44	45	46	47	48
50	51	52	53	54	55	56	57	58
60	61	62	63	64	65	66	67	68
70	71	72	73	74	75	76	77	78
80	81	82	83	84	85	86	87	88
90	91	92	93	94	95	96	97	98

(a)在這個過程中，我們總共猜了 17 次，如果在這 17 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $17+2=19$ 次。

(b)如果在這 17 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 4 個洞，故必須加 3 次才能確定答案，故總次數為 $17+3=20$ 次。

由(a)、(b)知，總次數至多 20 次必可確定答案。

二、探討並證明原問題：

小華先從 10, 11, ..., 99 這些二位數中任意挑選一個數後，再由小明來猜這個數。若小明猜的數屬於下列三種情形之一：

(I)完全正確；

(II)個位數是正確的，且十位數字相差為 1；

(III)十位數是正確的，且個位數字相差為 1，

則小華說「帥」，否則就說「遜」。

(例如：小華所挑的數字為 65，若小明說出 65、55、75、64 或 66 之一，則小華說「帥」，否則小華就說「遜」。)

(1)試證：在不超過 18 次猜測的限制下，小明沒有任何策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。

(2)在不超過 24 次猜測的限制下，請幫小明找一種策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。

(3)在不超過 22 次猜測的限制下，是否有一種策略可以保證小明能正確地推導出小華所挑選的數？

(一)、試證：在不超過 18 次猜測的限制下，小明沒有任何策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。

證明：因為題目共有 90 個二位數，而猜數一次最多涵蓋 5 個數，

$$90 \div 5 = 18,$$

在"假設"每一個猜數都可以涵蓋 5 個數的條件下，要猜 18 次才能涵蓋到 90

個數。可是有兩個問題：

(1)若猜到第 18 次才被喊「帥」，為了確定答案就不只 18 次了。

(2)10、19、90、99 這四個數不在猜數能涵蓋到 5 個數之中，所以找到 18 個猜數能涵蓋到 90 個數是不可能的。

所以**在不超過 18 次猜測的限制下，小明沒有任何策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。**

(二)、在不超過 24 次猜測的限制下，請幫小明找一種策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。

解：用以下的方法是可以辦到的。

9*10(9 列 10 行)之 1：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	31	50	90	71	12	43	93	24	64	85
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次	第16次				
猜數	16	47	97	28	68	89				

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(a)在這個過程中，我們總共猜了 16 次，如果在這 16 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 $16+2=18$ 次。

(b)如果在這 16 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 18 個洞，故必須加 8 次才能確定答案，故總次數為 $16+8=24$ 次。

「洞」的猜數順序：76→55→49→72→36→29→20→10 或 19

(答「遜」才要往後猜)

由(a)、(b)知，總次數至多 24 次必可確定答案。

所以**在不超過 24 次猜測的限制下，小明有一種策略可以保證能正確地推導出小華所挑選的數。**

(三)、在不超過 22 次猜測的限制下，是否有一種策略可以保證小明能正確地推導出小華

所挑選的數？

答：用以下的方法是可以辦到的。

9*10(9 列 10 行)之 2：

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	40	21	71	52	33	83	14	64	45	95
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次	第16次	第17次			
猜數	26	76	57	38	88	19	69			

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(a)在這個過程中，我們總共猜了 17 次，如果在這 17 次猜數中被喊「帥」的話，則只要再加 2 次就可確定答案，故總次數至多為 17+2=19 次。

(b)如果在這 17 次猜數中都被喊「遜」的話，因為有 11 個洞，故必須加 5 次才能確定答案，故總次數為 17+5=22 次。

「洞」的猜數順序：91→98→70→11→17 或 49

(答「遜」才要往後猜)

由(a)、(b)知，總次數至多 22 次必可確定答案。

所以在不超過 22 次猜測的限制下，小明有一種策略可以保證能正確地推導出小華所挑選的數。

伍、研究結果：

小華先從 10, 11, ..., 99 這些二位數中任意挑選一個數後，再由小明來猜這個數。

若小明猜的數屬於下列三種情形之一：

(I)完全正確；

(II)個位數是正確的，且十位數字相差為 1；

(III)十位數是正確的，且個位數字相差為 1，

則小華說「帥」，否則就說「遜」。

一、試證：在不超過 18 次猜測的限制下，小明沒有任何策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。

證明：因為題目共有 90 個二位數，而猜數一次最多涵蓋 5 個數，

$90 \div 5 = 18$ ，在「假設」每一個猜數都可以涵蓋 5 個數的條件下，要猜 18 次才能涵蓋到 90 個數。

可是有兩個問題：

1. 若猜到第 18 次才被喊「帥」，為了確定答案就不只 18 次了。

2. 10、19、90、99 這四個數不在猜數能涵蓋到 5 個數之中，

所以找到 18 個猜數能涵蓋到 90 個數是不可能的。

二、在不超過 24 次猜測的限制下，請幫小明找一種策略可以保證他能正確地推導出小華所挑選的數。

答：用以下的方法是可以辦到的。

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	31	50	90	71	12	43	93	24	64	85
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次	第16次				
猜數	16	47	97	28	68	89				

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

「洞」的猜數順序：76→55→49→72→36→29→20→10 或 19

（答「遜」才要往後猜）

三、在不超過 22 次猜測的限制下，是否有一種策略可以保證小明能正確地推導出小華所挑選的數？

答：用以下的方法是可以辦到的。

猜數順序	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
猜數	40	21	71	52	33	83	14	64	45	95
猜數順序	第11次	第12次	第13次	第14次	第15次	第16次	第17次			
猜數	26	76	57	38	88	19	69			

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

「洞」的猜數順序：91→98→70→11→17 或 49
 （答「遜」才要往後猜）

陸、研究討論及展望：

雖然我們的探討解決了原問題，可是還是有一個疑問，22 次是最少的嗎？
 有沒有少於 22 次的？這是可以挑戰下去的方向。
 希望我們能找到更少的，也希望可以在複審時跟評審老師們報告。

柒、參考資料：

一、International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽 2001 春季賽 國中組高級卷 2001/03/18