

# 嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：不意「外」，一「切」都是「圓」份

關鍵詞：外切圓、規律

編號：

# 不意「外」，一「切」都是「圓」份

## 摘要

圓心排在一條直線上且兩兩互切，畫相鄰兩圓的外切圓，要得到「相鄰兩圓外切圓總和」的最大值最小值，有方法和規律如下：

1. 求最大值：將最小的兩個圓置於最左和最右兩邊，圓的數量與最大值的關係為： $f(n) = n^2 + n - 3$ ， $n$  對所有大於 1 的自然數都成立， $n$  表示從 1~ $n$  的連續  $n$  個圓。
2. 求最小值：將最大的兩個圓置於最左和最右兩邊，圓的數量與最小值的關係為： $g(n) = n^2 - n + 1$ ， $n$  對所有大於 1 的自然數都成立， $n$  表示從 1~ $n$  的連續  $n$  個圓。

## 壹、 研究動機：

題目：半徑分別為 1、2、3、4、5、6、7、8 的八個圓，圓心排在一條直線上且兩兩互切，畫相鄰兩圓的外切圓，將得到的七個外切圓，這七個外切圓半徑總和最大是多少？最小是多少？

在六上數學課教到「解題」與「規律」時，老師給了我們一些範例和概念，上面問題就是我們在一本科學期刊（游森棚（2015）。圓多大。科學研習月刊，54-6 期，P55。）裡面看到的題目，我們覺得這個題目很有挑戰性，所以除了挑戰解題外，我們也開始研究類似問題如何排出最大、最小的外切圓半徑總和，並且找出解題規律。

## 貳、 研究目的：

- 一、 上述問題如何排出最大、最小的外切圓半徑總和。
- 二、 最大、最小的外切圓半徑總和是否有規律與方法可循。
- 三、 利用上面的方法，自訂數個圓的半徑，可進一步討論外切圓半徑之間的關係。

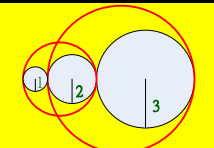
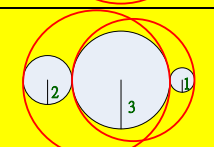
## 參、 研究設備及器材：

- 一、圓多大遊戲表。
- 二、不同半徑的圓牌。
- 三、電腦（excel 軟體分析、visio 繪圖）

## 肆、 研究過程或方法：

- 一、半徑分別為 1、2、3 的三個圓，圓心排在一條直線上且兩兩互切：  
(一) 所有排法：半徑分別為 1、2、3 的三個圓，從左到右的排法有  $3! = 6$  種，分別是

表 1 3 個圓彼此外切的排列方式與總和

數字	外切圓半徑 01	外切圓半徑 02	外切圓半徑總和	圖形
213	$2+1=3$	$1+3=4$	$3+4=7$ 最小	
312	$3+1=4$	$1+2=3$	$4+3=7$ 最小	 312 和 213 排列兩兩外切圓總和相同
123	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+5=8$	
321	$3+2=5$	$2+1=3$	$5+3=8$	 123 和 321 排列兩兩外切圓總和相同
132	$1+3=4$	$3+2=5$	$4+5=9$ 最大	
231	$2+3=5$	$3+1=4$	$5+4=9$ 最大	 132 和 231 排列兩兩外切圓總和相同

由上表我們可以清楚知道，因為我們要求的是「相鄰兩圓外切圓的總和」，所以原本 3 個數字 1、2、3 在一直線上應該有 6 種排法，但是在這個條件下，從左到右排列和從右到左排列，結果必定會一樣，我們只要探討 3 種排法即可。

(二) 外切圓半徑總和探討：3 個圓的外切圓半徑總和最大值是 9，排列方式是 132 或 231；最小值是 7，排列方式是 213 或 312。

二、半徑分別為 1、2、3、4 的 4 個圓，圓心排在一條直線上且兩兩互切：

(一) 所有排法：半徑分別為 1、2、3、4 的四個圓，從左到右的排法有 24 種，但是在要求「相鄰兩圓外切圓的總和」的條件下，從左到右排列和從右到左排列，結果一樣，所以我們討論 12 種排列方式即可：

表 2 4 個圓彼此外切的排列方式與總和

數字	外切圓半徑 01	外切圓半徑 02	外切圓半徑 03	外切圓半徑總和	圖形
1234 同 4321	$1+2=3$	$2+3=5$	$3+4=7$	$3+5+7=15$	
1243 同 3421	$1+2=3$	$2+4=6$	$4+3=7$	$3+6+7=16$	
1324 同 4231	$1+3=4$	$3+2=5$	$2+4=6$	$4+5+6=15$	
1342 同 2431	$1+3=4$	$3+4=7$	$4+2=6$	<b><math>4+7+6=17</math> 最大</b>	
1423 同 3241	$1+4=5$	$4+2=6$	$2+3=5$	$5+6+5=16$	
1432 同 2341	$1+4=5$	$4+3=7$	$3+2=5$	<b><math>5+7+5=17</math> 最大</b>	
2134 同 4312	$2+1=3$	$1+3=4$	$3+4=7$	$3+4+7=14$	
2143 同 3412	$2+1=3$	$1+4=5$	$4+3=7$	$3+5+7=15$	
2314 同 4132	$2+3=5$	$3+1=4$	$1+4=5$	$5+4+5=14$	
2413 同 3142	$2+4=6$	$4+1=5$	$1+3=4$	$6+5+4=15$	
3124 同 4213	$3+1=4$	$1+2=3$	$2+4=6$	<b><math>4+3+6=13</math> 最小</b>	
3214 同 4123	$3+2=5$	$2+1=3$	$1+4=5$	<b><math>5+3+5=13</math> 最小</b>	

(二) 外切圓半徑總和探討：4個圓的外切圓半徑總和最大值是 17，排列方式是(1432 或 2431)、(1432 或 2341)；最小值是 13，排列方式是(3124 或 4213)、(3214 或 4123)。

三、半徑分別為 1、2、3、4、5 的 5 個圓，圓心排在一條直線上且兩兩互切：

(一) 所有排法：半徑分別為 1、2、3、4、5 的五個圓，從左到右的排法有  $5! = 120$  種，但是在要求「相鄰兩圓外切圓的總和」的條件下，從左到右排列和從右到左排列，結果一樣，所以我們討論 60 種排列方式即可，為了整理與分析方便，我們利用 EXCEL 軟體進行數據的分析與整理，並將最大與最小外切圓總和整理如下表。

表 3 5 個圓彼此外切，相鄰兩圓之外切圓的總和最大情形

數字	外切圓半徑 01	外切圓半徑 02	外切圓半徑 03	外切圓半徑 04	外切圓半徑和	圖形
13452 同 25431	4	7	9	7	27	
13542 同 24513	4	8	9	6	27	
14352 同 25341	5	7	8	7	27	
14532 同 23541	5	9	8	5	27	
15342 同 24351	6	8	7	6	27	
15432 同 23451	6	9	7	5	27	

最大的排法有 6 種。

表 4 5 個圓彼此外切，相鄰兩圓之外切圓的總和最小情形

數字	外切圓 半徑 01	外切圓 半徑 02	外切圓 半徑 03	外切圓 半徑 04	外切圓 半徑和	圖形
41235 同 53214	5	3	5	8	21	
41325 同 52314	5	4	5	7	21	
42315 同 51324	6	5	4	6	21	
43215 同 51234	7	5	3	6	21	
43125 同 52134	7	4	3	7	21	
42135 同 53124	6	3	4	8	21	

最小的排法有 6 種。

(二) 外切圓半徑總和探討：5 個圓的外切圓半徑總和最大值是 27，排列方式是 (13452 同 25431)、(13542 同 24531)、(14352 同 25341)、(14532 同 23541)、(15342 同 24351)、(15432 同 23451)；最小值是 21，排列方式是 (41235 同 53214)、(41325 同 52314)、(42315 同 51324)、(43215 同 51234)、(43125 同 52134)、(42135 同 53124)。

四、半徑分別為 1、2、3、4、5、6 的 6 個圓，圓心排在一條直線上且兩兩互切：

(一) 所有排法：半徑分別為 1、2、3、4、5、6 的六個圓，從左到右的排法有  $6! = 720$  種，但是在要求「相鄰兩圓外切圓的總和」的條件下，從左到右排列和從右到左排列，結果一樣，所以我們討論 360 種排列方式即可，為了整理與分析方便，我們利用 EXCEL 軟體進行數據的分析與整理，並將最大與最小外切圓總和整理如下表。

表 5 6 個圓彼此外切，相鄰兩圓之外切圓的總和最大情形

圓半徑	圓半徑	圓半徑	圓半徑	圓半徑	圓半徑	外切圓 半徑 01	外切圓 半徑 02	外切圓 半徑 03	外切圓 半徑 04	外切圓 半徑 05	外切圓 半徑和
1	6	5	4	3	2	7	11	9	7	5	39
1	6	5	3	4	2	7	11	8	7	6	39
1	6	4	5	3	2	7	10	9	8	5	39
1	6	4	3	5	2	7	10	7	8	7	39
1	6	3	5	4	2	7	9	8	9	6	39
1	6	3	4	5	2	7	9	7	9	7	39
1	5	6	4	3	2	6	11	10	7	5	39
1	5	6	3	4	2	6	11	9	7	6	39
1	5	4	6	3	2	6	9	10	9	5	39
1	5	4	3	6	2	6	9	7	9	8	39
1	5	3	6	4	2	6	8	9	10	6	39
1	5	3	4	6	2	6	8	7	10	8	39
1	4	6	5	3	2	5	10	11	8	5	39
1	4	6	3	5	2	5	10	9	8	7	39
1	4	5	6	3	2	5	9	11	9	5	39
1	4	5	3	6	2	5	9	8	9	8	39
1	4	3	6	5	2	5	7	9	11	7	39
1	4	3	5	6	2	5	7	8	11	8	39
1	3	6	5	4	2	4	9	11	9	6	39
1	3	6	4	5	2	4	9	10	9	7	39
1	3	5	6	4	2	4	8	11	10	6	39
1	3	5	4	6	2	4	8	9	10	8	39
1	3	4	6	5	2	4	7	10	11	7	39
1	3	4	5	6	2	4	7	9	11	8	39

最大的排法有 24 種。

表 6 6 個圓彼此外切，相鄰兩圓之外切圓的總和最小情形

圓半徑	圓半徑	圓半徑	圓半徑	圓半徑	圓半徑	外切圓 半徑 01	外切圓 半徑 02	外切圓 半徑 03	外切圓 半徑 04	外切圓 半徑 05	外切圓 半徑和
6	4	3	2	1	5	10	7	5	3	6	31
6	4	3	1	2	5	10	7	4	3	7	31
6	4	2	3	1	5	10	6	5	4	6	31
6	4	2	1	3	5	10	6	3	4	8	31
6	4	1	3	2	5	10	5	4	5	7	31
6	4	1	2	3	5	10	5	3	5	8	31
6	3	4	2	1	5	9	7	6	3	6	31
6	3	4	1	2	5	9	7	5	3	7	31
6	3	2	4	1	5	9	5	6	5	6	31
6	3	2	1	4	5	9	5	3	5	9	31
6	3	1	4	2	5	9	4	5	6	7	31
6	3	1	2	4	5	9	4	3	6	9	31
6	2	4	3	1	5	8	6	7	4	6	31
6	2	4	1	3	5	8	6	5	4	8	31
6	2	3	4	1	5	8	5	7	5	6	31
6	2	3	1	4	5	8	5	4	5	9	31
6	2	1	4	3	5	8	3	5	7	8	31
6	2	1	3	4	5	8	3	4	7	9	31
6	1	4	3	2	5	7	5	7	5	7	31
6	1	4	2	3	5	7	5	6	5	8	31
6	1	3	4	2	5	7	4	7	6	7	31
6	1	3	2	4	5	7	4	5	6	9	31
6	1	2	4	3	5	7	3	6	7	8	31
6	1	2	3	4	5	7	3	5	7	9	31

最小的排法有 24 種。

(二) 外切圓半徑總和探討：6 個圓的外切圓半徑總和最大值是 39，排列方式如表 5；最小值是 31，排列方式如表 6。

五、半徑分別為 1、2、3、4、5、6、7 的 7 個圓，圓心排在一條直線上且兩兩互切：

(一) 排列分析：半徑分別為 1、2、3、4、5、6、7 的 7 個圓，從左到右的排法是  $7! = 5040$  種，我們利用 EXCEL 進行分析與排列，其中最大與最小的排法都各有  $5! = 60$  種。

(二) 外切圓半徑總和探討：從 EXCEL 表格分析中我們找到 7 個圓的外切圓半徑總和最大值是 53；最小值是 43。



## 伍、 研究結果：

一、 綜合上述，整理圓的數量與兩兩外切圓半徑總和的最大最小值關係如下表 7：

表 7 相鄰兩圓之外切圓總和整理

圓的數量	圓半徑大小	兩兩外切圓半徑總和最大值	兩兩外切圓半徑總和最小值
2	1、2	3	3
3	1、2、3	9	7
4	1、2、3、4	17	13
5	1、2、3、4、5	27	21
6	1、2、3、4、5、6	39	31
7	1、2、3、4、5、6、7	53	43

二、 從表 7 我們發現，圓的半徑從  $1\sim n$ ，兩兩外切圓半徑總和最大值符合以下規律：

$$f(n)=n^2+n-3, 8>n\geq 2 \quad (n \text{ 表示從 } 1\sim n \text{ 的連續 } n \text{ 個圓})$$

三、 從表 7 我們發現，圓的半徑從  $1\sim n$ ，求兩兩外切圓半徑總和最小值符合以下規律：

$$g(n)=n^2-n+1, 8>n\geq 2 \quad (n \text{ 表示從 } 1\sim n \text{ 的連續 } n \text{ 個圓})$$

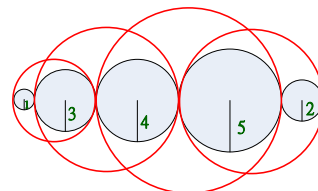
四、 從表 1 到表 6，我們發現在「相鄰兩圓外切圓的總和」的條件下，要得到最大的值，圓的排列原則是：將最小的兩個圓置於最左和最右兩邊，剩下的數則可以隨意填入這兩數之間，原因如下：

(一) 因為要求「相鄰兩圓外切圓的總和」，由這個條件可以知道，除了最左與最右兩邊的數加到一次，所有的數都會被加到兩次，以 5 個圓為例如下：

假設圓的排列如表 3，由左到右圓半徑分別為 13452，那麼

「相鄰兩圓外切圓的總和」為：

$$(1+3)+(3+4)+(4+5)+(5+2)=1+(3+4+5) \times 2 + 2$$



(二) 我們可以很清楚看到，不管有多少個圓，要得到「相鄰兩圓外切圓的總和」的最大值，作法就是將最小的兩個圓置於最左和最右兩邊，而此時圓的數量與最大值的關係推導如下：

$$f(n)=1+(3+\dots+n) \times 2 + 2 = 1 + [(n+1) \times n \div 2 - 3] \times 2 + 2$$

$$= n^2 + n - 3, n \text{ 對所有大於 } 1 \text{ 的自然數都成立, } n \text{ 表示從 } 1\sim n \text{ 的連續 } n \text{ 個圓。}$$

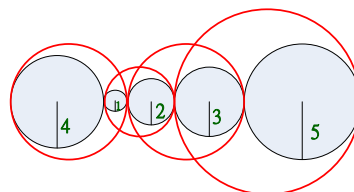
五、 從表 1 到表 6，我們發現在「相鄰兩圓外切圓的總和」的條件下，要得到最小的值，圓的排列原則是：將最大的兩個圓置於最左和最右兩邊，剩下的數則可以隨意填入這兩數之間，原因如下：

(一) 因為要求「相鄰兩圓外切圓的總和」，由這個條件可以知道，除了最左與最右兩邊的數加到一次，所有的數都會被加到兩次，以 5 個圓為例如下：

假設圓的排列如表 4，由左到右圓半徑分別為 41235，那麼

「相鄰兩圓外切圓的總和」為：

$$(4+1)+(1+2)+(2+3)+(3+5) = 4 + (1+2+3) \times 2 + 5$$



(二) 我們可以很清楚看到，不管有多少個圓，要得到「相鄰兩圓外切圓的總和」的最小值，作法就是將最大的兩個圓置於最左和最右兩邊，而此時圓

的數量與最小值的關係推導如下：

$$g(n) = (n-1) + (1+2+\dots+n-2) \times 2 + n = \left[ \frac{(n-2+1) \times (n-2)}{2} \right] \times 2 + 2n - 1$$

$$= n^2 - n + 1, n \text{ 對所有大於 } 1 \text{ 的自然數都成立, } n \text{ 表示從 } 1 \sim n \text{ 的連續 } n \text{ 個圓。}$$

六、綜合上述，原問題半徑分別為 1、2、3、4、5、6、7、8 的八個圓，七個外切圓半徑總和最大是  $f(8) = 8 \times 8 + 8 - 3 = 69$ ；最小是  $g(8) = 8 \times 8 - 8 + 1 = 57$ 。

## 陸、討論與結論

一、「相鄰兩圓外切圓總和」的最大值：

(一)圓心排在一條直線上且兩兩互切，畫相鄰兩圓的外切圓，要得到「相鄰兩圓外切圓總和」的最大值，作法是將最小的兩個圓置於最左和最右兩邊，剩下的數則可以隨意填入這兩數之間。

(二)最大值符合  $f(n) = n^2 + n - 3$ ， $n$  對所有大於 1 的自然數都成立， $n$  表示從 1~ $n$  的連續  $n$  個圓。

二、「相鄰兩圓外切圓總和」的最小值：

(一)圓心排在一條直線上且兩兩互切，畫相鄰兩圓的外切圓，要得到「相鄰兩圓外切圓總和」的最小值，作法是將最大的兩個圓置於最左和最右兩邊，剩下的數則可以隨意填入這兩數之間。

(二)最小值符合  $g(n) = n^2 - n + 1$ ， $n$  對所有大於 1 的自然數都成立， $n$  表示從 1~ $n$  的連續  $n$  個圓。

三、在探討與研究這個遊戲的過程中，我們發現如果排列 1~ $n$  的連續  $n$  個圓這個條件，改成連續  $n$  個質數，那麼相鄰兩圓的外切圓半徑，將可以找到一部分的「哥德巴赫分拆數」(任一大於 2 的偶數，都可表示成兩個質數之和)，現將部分資料整理如下表 8，建議往後的研究者有興趣可以朝這個方向探究看看。

表 8 連續質數圓的外切圓半徑關係整理

圓的數量	質數	可得到的「哥德巴赫分拆數」	外切圓總和 最小值	外切圓總和 最大值
2	2、3	無	5	5
3	2、3、5	3+5=8	15	12
4	2、3、5、7	3+5=8；3+7=10；5+7=12	29	22
5	2、3、5、7、11	3+5=8；3+7=10；5+7=12 11+3=14；11+5=16；11+7=18 可得到 8 到 18 間的哥德巴赫分拆數	51	38

## 柒、參考資料及其他

1. 所有排列組合。線上檢索日期：2018 年 11 月 10 日。網址：<https://reurl.cc/OMkLg>。
2. 哥德巴赫猜想。線上檢索日期：2019 年 03 月 01 日。網址：<https://reurl.cc/Vz5qb>
3. 游森棚(2015)。圓多大。科學研習月刊，54-6 期，P55。