嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：六點連線

關 鍵 詞：邏輯、圖論、幾何

編　　號：

作品名稱：六點連線

摘要

本研究以六點連線數學遊戲作為研究主題，討論其和局性質與必勝策略，而為求對其深入的瞭解，我們引進了圖論等相關概念，並特殊化棋盤結構與規則，以及藉由三維空間觀點分析此平面遊戲棋盤，以從中歸納性質與作推廣，研究發現單色連線規則，頂點數 4 與頂點數 5 之棋盤有必勝策略，雖仍有發展空間留待後續研究，但透過這次探討棋局的過程，仍提供我們回顧學校所學觀念的機會，也期待我們的研究成果，能吸引更多有興趣的人加入，以及未來我們繼續後續的研究時有紮實的基礎，再發現進而更多有趣的數學性質與觀點。

壹、研究動機

國中數學課程中學到不同的平面幾何圖形與性質，也參與過各類型以數學知識為基礎的活動和遊戲，因此在網路上發現到這個「六點連線」數學遊戲後馬上吸引了我們的注意，其簡單好上手的規則，讓許多老師都有在中小學帶同學進行過，深受師生歡迎，對於不同年齡的學生都能刺激思考，富有討論性，有讓我們想深入一探究竟。

六點連線即是雙方每次可選擇相異兩色其一，以直線連接六個頂點中的任意兩個，先連成同色三角形第三邊的參與方輸。透過幾次嘗試後有了心得：除了參與方失誤的情形外，許多勝負的發生都在於一方在所有可連接的頂點中，無論選擇何種顏色連線，均會連接出一個同色三角形，即讓對方取勝，再上網搜尋資料發現原來這個遊戲和納許棋一樣不會和局，但再深入蒐尋及參考歷屆科展研究成果，卻沒有得到關於它不會和局的相關說明，因此我們想試著找出證明六點連線不會和局的方法，並推廣到七點、八點等更多點連線的不同結構上；且以不會和局的性質為基礎，不考慮失誤的情形下，隨著連線數的增加，當任一方對任意色均會連接成同色三角形時對方滿足勝利條件，也讓我們對策略的運用感興趣，更進而想討論對任一方是否存在必勝策略，同理其在不同頂點數的棋盤上策略異同也富討論性，都加深我們的研究興趣。

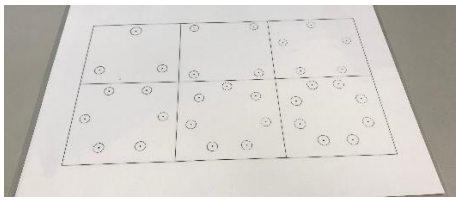
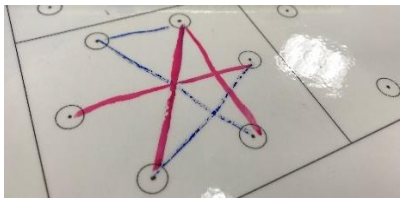
也期待我們對六點連線數學遊戲的研究成果，能吸引對數學和棋類技藝有興趣的人員一起加入討論，探討其在不同變體規則或棋盤結構上進行，所具有的特殊性質，或以此為基礎設計其他相關數學活動。以推廣這樣的富思考性的數學活動，能讓更多人認識、參與。

貳、研究目的

一、研究六點連線不會和局之性質的數學性質。
二、研究六點連線對任意參與方是否存在必勝策略。
三、歸納六點連線不會和局與策略在不同頂點數的性質。
四、歸納六點連線不會和局與策略在變體規則的性質。

參、研究設備及器材

紙、筆、螢光筆、電腦、自製六點連線棋盤

	
透過 GSP 繪圖軟體自製棋盤。本研究以六點為主，另繪製頂點數為 3、4、5 的棋盤探討特殊化情形。	在自製棋盤表面護貝後，由螢光筆書寫即可透過擦拭而重複使用，以利於探討及紀錄研究成果。

肆、研究過程或方法

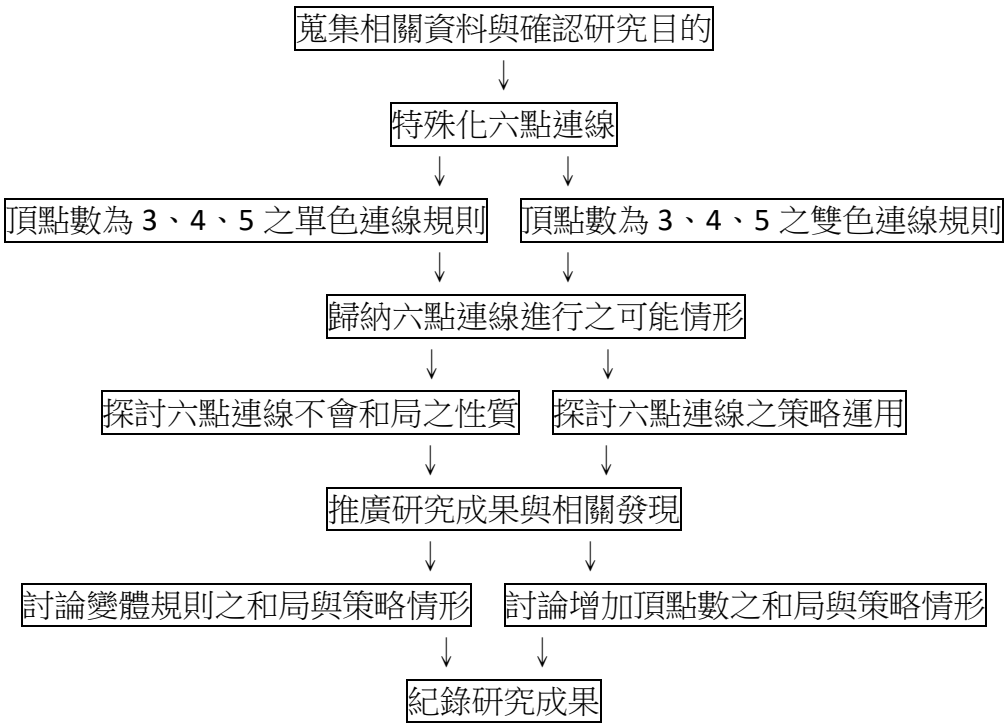
一、歷屆數學科展作品文獻探討

屆別	主題	研究內容
中華民國第 58 屆	步步為「贏」–鋸木塊遊戲之探討	歸納n × n的鋸木塊遊戲中最多可切的單位數公式、路徑和必勝策略。
中華民國第 45 屆	圓舞曲	推算圓上等分點依不同間隔連線的圖形交點數與區塊數之一般式。
中華民國第 56 屆	遨遊棋盤：與直–橫–斜一筆畫共舞	探討一筆畫棋盤迴圈遊戲之最小有解方格、有解方陣與立體迴圈解。
中華民國第 45 屆	黑格連線	歸納共點不共邊黑白格相間能連線全部黑格之棋盤構成邊格數關係。
嘉義市第 36 屆	落「井」下棋——利用井字遊戲探討搶 15、3×3×3 立方體井字遊戲策略	歸納平面搶 15 井字遊戲與 3×3×3 立方體井字遊戲中，依據棋盤上不同棋格使用之相異策略造成先後手必勝、必輸或和局情形。
中華民國第 56 屆	數字迷宮-雙對角線數字和最大值之研究	n × n棋盤中歸納單一對角線與雙對角線數字和最大值公式與數字填法。
中華民國第 54 屆	它鎖的住我？~手機螢幕鍵盤鎖之探究	推算出九宮格圖像的螢幕鍵盤鎖圖形數為 139880 及設計變體鍵盤鎖圖像
中華民國第 47 屆	方塊地板嵌合形式及任意三角形數量計數相關公式之追求與創新	由生活中常見磁磚之不同排列方式，歸納相異排列方式之磁磚中，以每邊格數求得鼎方格總格數及其他相關格數公式
中華民國第 55 屆	層出不窮的彩蛋有「心」「跡」—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討	探討有心六邊形遞延圖形，發現雙心六邊形遞延圖形每層均保有雙心性質且對角線均共交同一點，對邊延長線均共交同一線。轉動後兩者位置不變

綜合討論前述參考之科展作品，數學遊戲方面，「步步為「贏」—鋸木塊遊戲之探討」及『落「井」下棋——利用井字遊戲探討搶 15、3x3x3 立方體井字遊戲策略』討論了在該遊戲進行中參與雙方採行策略之情形；「遨遊棋盤：與直－橫－斜一筆畫共舞」及「黑格連線」則討論該遊戲「有解」的棋盤結構，「數字迷宮-雙對角線數字和最大值之研究」則歸納在其正方形棋盤上數字和最大值的公式；「圓舞曲」、「步步為「贏」—鋸木塊遊戲之探討」、「遨遊棋盤：與直－橫－斜一筆畫共」、「黑格連線」、「它鎖的住我？~手機螢幕鍵盤鎖之探究」則應用到平面上「點與點之間的連線」的性質，探討其數量公式、策略運用與棋盤結構之間的關係；『層出不窮的彩蛋有「心」「跡」—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討』則討論平面上「六邊形」之遞延圖形的幾何性質，從中整理可以得到：棋盤結構可能影響到數學遊戲的「有解」或「和局」的產生；連線類型的遊戲可以討論其路徑長短、回合數的多寡以及其必勝（必輸或和局）策略，進而歸納或公式化。

但經我們蒐集的資料，卻未找到以我們「六點連線」為題材的研究作品，僅有「課堂上的數學遊戲」網站有其相關性質的探討，其簡介中提到六點連線不會和局，但並未附上證明，且策略運用、相異棋盤與變體規則的介紹也較未提及，我們蒐集的資料與網路資源也都沒有相關佐證和討論，因此我們將參考前述歷屆科展作品，擬定研究方向，探討六點連線數學遊戲之棋盤結構和和局構成條件與必勝策略之間的關係。

二、研究流程圖



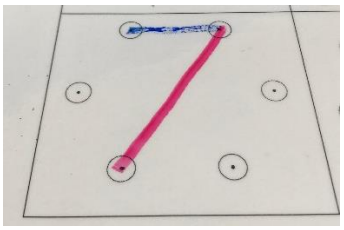
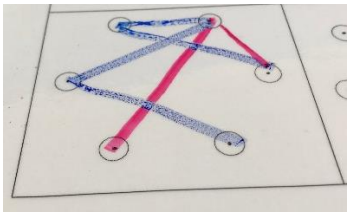
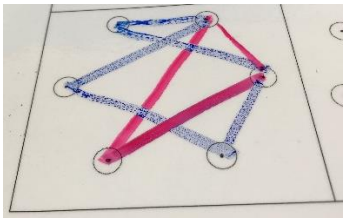
三、名詞釋義

對本六點連線數學性質研究常出現的名詞定義，整理如下表：

編號	名詞	說明
(一)	頂點	存在於六點連線棋盤上提供參與方建立連線的點。
(二)	連線	在六點連線棋盤上連接相異兩頂點的直線，稱為連線。
(三)	三角形	在相異三頂點間連成的三條連線均為同色之結構。
(四)	勝利條件	一參與方連出同色三角形的同時另一方滿足勝利條件。
(五)	棋盤頂點數	本研究均以「六點連線」稱之，改變頂點數為 n 時即改變其盤結構，稱為「頂點數 n 之六點連線」。
(六)	棋盤連線數	「頂點數 n 之六點連線」相異兩點間可建立的連線數，即 n 邊形邊數與對角線數之和：$n+\frac{(n-3)n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$。
(七)	Path	若共頂點的連線上存在 n 個頂點則稱 n-path。
(八)	cycle	若 n 個頂點間共頂點連線形成一封閉結構稱為 n-cycle。

四、比較分析

(一) 六點連線規則說明

		
1. 雙方決定先後順序後依序每次在相異兩頂點間建立一條連線。	2. 雙方在輪到各自的回合建立連線時可使用兩種顏色其中一種。	3. 當一方連接一同色三角形的第三邊時，另一方滿足勝利條件。

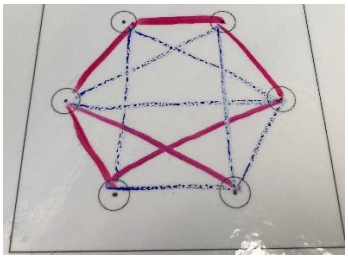
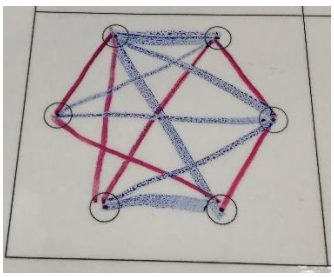
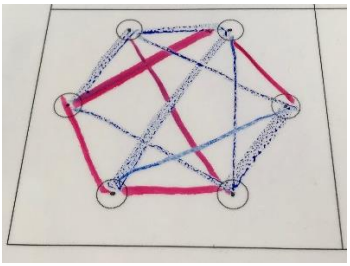
(二) 六點連線規則分析

參考課堂上的數學遊戲網站，六點連線規則判別勝利條件之同色三角形以原棋盤上的六個頂點為主，過程中連線產生的交點不列入考量，連接出同色三角形第三邊的參與方輸，且雙方兩種顏色都能用於連線，惟一次僅可使用一種顏色，連接完成後換另一方建立連線。

比較常見連線類或平面幾何圖形科展常見研究題材，如前述討之探討之「井字遊戲」、「鋸木遊戲」、「黑格連線」或如「五子棋」、「納許棋」等，六點連線較具討論性之特點有：「雙方兩種顏色均可使用」，若以棋子顏色區別雙方路徑等則一般棋藝參與方均以使用單一顏色棋子較為常見，即六點連線中彼此建立的連線均可能影響對方勝利條件之滿足；且六點連線「不會和局」，依網站說明與我們實際嘗試後，不存在平手的情形，存在和局情形之常見平面遊戲如三階井字遊戲，已證具不會和局性質的數學遊戲則如納許棋等。又棋盤的頂點數是否影響不會和局情形的成立，此部分即後續本研究討論之。

(三) 六點連線勝利條件探討

「連接同色三角形的第三邊」者構成另一方滿足勝利條件且該局結束，即六點連線勝利方之產生是依據「另一參與方輪」的邏輯關係，此規則為參考課堂上的數學遊戲網站之原版六點連線規則。在「不會和局」性質與「連成同色三角形者滿足另一方勝利條件」規則下，我們發現下列情形：

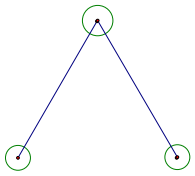
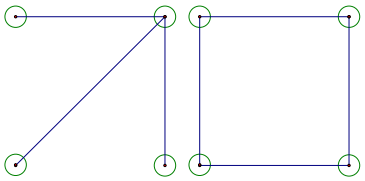
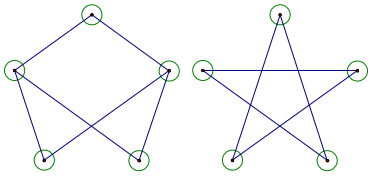
		

上述情形對輪到該回合之參與方而言，在剩下的可能連線中，無論建立何種顏色的連線均構成另一方滿足勝利條件（即對該回合參與方來說必輸），故若能建構出類似結構，使得另一方之所有可行之連線均構成同色三角的第三邊，即可作為擬定滿足勝利條件之策略。

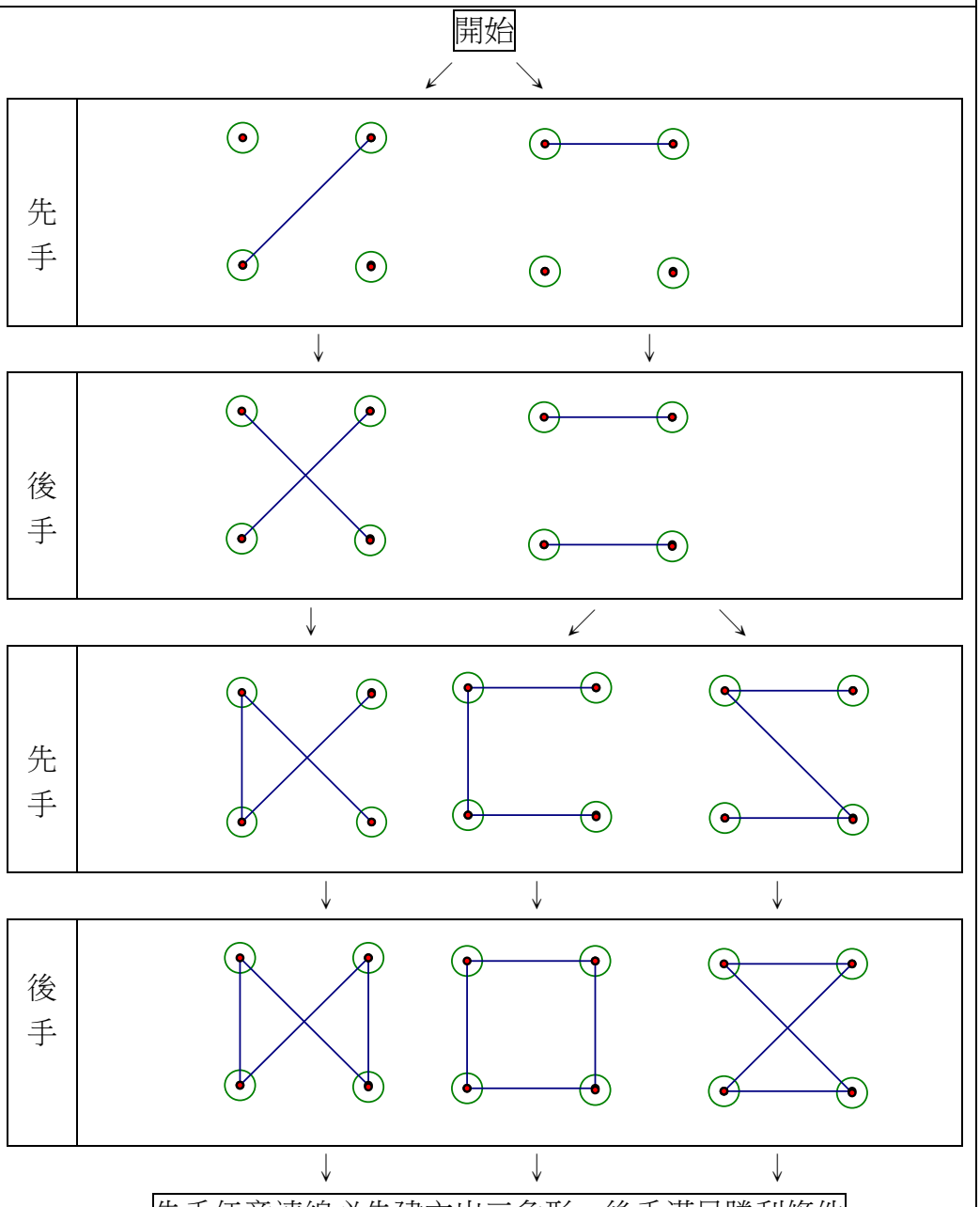
且如前述所提，此勝利條件規則參考網站介紹的原版遊戲，故若「先連成同色三角形的第三邊者滿足勝利條件」（即與原版規則相反之），可作為變體規則探討其策略運用與原版規則之異同。

(四) 不會和局性質探討

為了討論六點連線不會和局的性質，我們特殊化六點連線來做討論，分別以較少之頂點數（頂點數 3、4、5）討論單色連線或雙色連線規則，再透過觀察圖形規納其規律以推廣至六點連線探討其不會和局性質。

特殊化單色連線規則		
頂點數 3	頂點數 4	頂點數 5
		
頂點數 3 之特殊化單色連線規則為先手必輸，根據連線順序三角形第三邊之連線必由先手建立之。	頂點數 4 之特殊化單色連線規則不會和局，且雙方均可滿足勝利條件。如左圖輪到後手，無論如何連線均連成三角形；右圖反之由先手連成。	頂點數 5 之特殊化單色連線規則不會和局，且雙方均可滿足勝利條件。如左圖輪到先手，無論如何連線均連成三角形；右圖反之由後手連成。

再以特殊化之規則討論必勝策略，我們先以單色連線規則歸納不同頂點數之棋盤的策略，以期延伸至原六點連線規則。如上圖所示，單色連線規則之頂點數 3 的棋盤先手必輸是顯而易見的，故首先我們先以頂點數 4 之棋盤進行討論，分析其先手或後手滿足勝利條件之關係，探討如下。

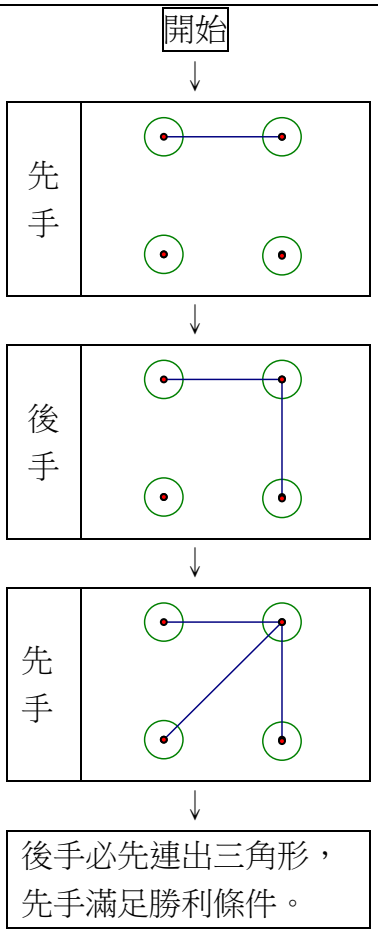
特殊化頂點數 4 棋盤之單色連線規則必勝策略探討	
說明	以上述討論和局情形的結構為基礎，當 結構出現時，後手必輸，故後手策略在避免此結構的建立；又 結構出現時，先手僅剩兩條連線可以建立，且任意一條均會連出三角形，故後手策略在連接其結構。以此原則反覆嘗試進行棋局，我們發現先手必輸，無論先手第一步如何建立連線，後手依據先手的每一步，如下圖所示均滿足勝利條件。
圖示	
結論	在頂點數 4 的棋盤，以單色連線之特殊化規則進行棋局，則先手必輸。此時我們思考，雖然四個存在於平面上的頂點看起來位置不同，但以圖論的觀點僅探討點與點之間的連線關係，則四個點對彼此的意義都是等價的，故以此發現再繼續討論頂點數 5 之策略情形。

頂點連線探討

延續前述結論，相對於單色連線頂點數 3 之棋盤為「後手必勝」，頂點數 4 為「後手具有必勝策略」，如右圖情形為先手滿足勝利條件。

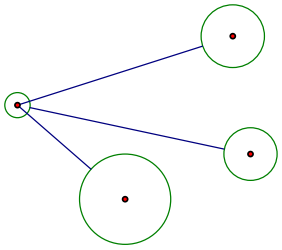
分析右圖後手未執行必勝策略而使得先手滿足勝利條件之情形，與前述後手必勝策略做比較，發現在後手的第一步建立的連線，其「與先手第一步之連線有共點」，對照上述後手必勝策略，則後手第一步所建立的連線需連接不存在於先手第一步連線上之剩餘兩點，即「後手之必勝策略其第一步連線與先手第一步連線不共點」。

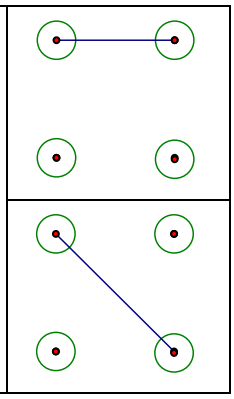
深入探討其原因，其雙方第一步連線不共點為後手必勝策略的必要條件，我們發現：「此連線遊戲雖看似在二維平面棋盤上進行，但實際其和在三維空間中進行意義相同」。遊戲進行所需用到的頂點，其任意兩點間的關係只有「連線」與「未連線」兩種，且相異頂點之位置不影響遊戲進行，頂點也不具序列性，本遊戲可視為在三維空間中進行。



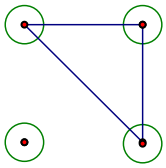
以上述三維空間的觀點討論，則此四個頂點間的連線關係即不具有「邊」與「對角線」的區別，因其在空間中的意義是相同的，如下圖所示。

在平面上視為邊與對角線的兩種連接方式，在空間中是相同的，即右圖的兩種連接方式具相同意義，因為以空間的觀點來看，這兩種連線都是左圖空間中頂點連接方式的其中一種。故本遊戲頂點與頂點間只有「連線」與「未連線」兩種關係；連線與連線間也只有「共點」與「不共點」兩種關係。



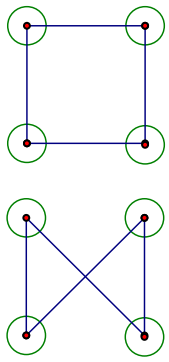


再以前述空間中頂點間關係的觀點為基礎，透過老師的介紹，我們引進圖論的「cycle」、「path」兩個觀念來討論必勝策略。「path」指三個以上頂點建立的相異連線有共點；「cycle」指三個以上的頂點連線構成至少一個環狀區域，即起點與終點為相同點的「path」。故本遊戲的判斷勝利條件是否滿足的「三角形」即為一個「cycle」，其通過三個頂點，我們以「3-cycle」稱之，如圖所示。以下再以不同頂點數之「path」與「cycle」討論。



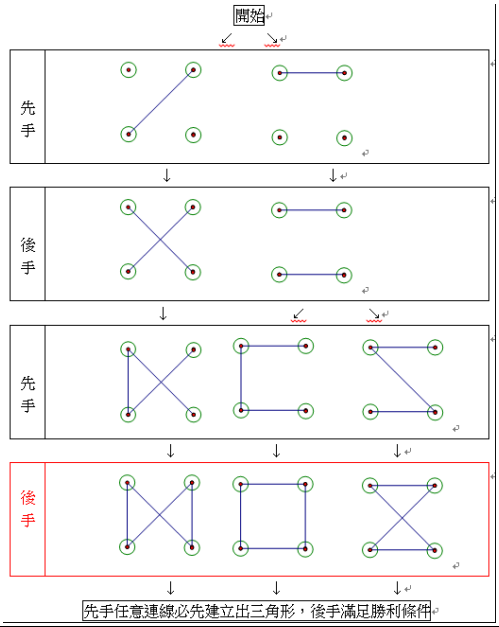
頂點連線探討

在接著探討「4-cycle」，其通過四個頂點，且以空間觀點「頂點與頂點僅有連線與否的關係」，下圖所示連線情形皆為「4-cycle」且意義相同。

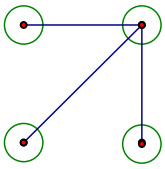


左圖兩種情形皆為「4-cycle」，如同手指將橡皮筋撐開成矩形，即使透過旋轉使其交叉，仍為連接了四個頂點的封閉路徑，故其在頂點間的連線意義相等。

如右圖以「4-cycle」觀點討論頂點數 4 單色連線規則的必勝策略，會發現在後手必勝策略的最後一步，均為一個「4-cycle」的結構，此時先手無論如何連接頂點，皆會使得後手滿足勝利條件。因在「4-cycle」形成之後，再進行任意的連線均會形成一個「3-cycle」，即滿足對方勝利條件之「三角形」。

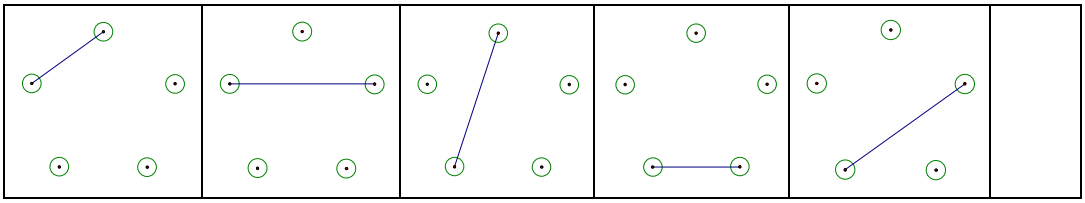


對照「先手滿足勝利條件」之結構

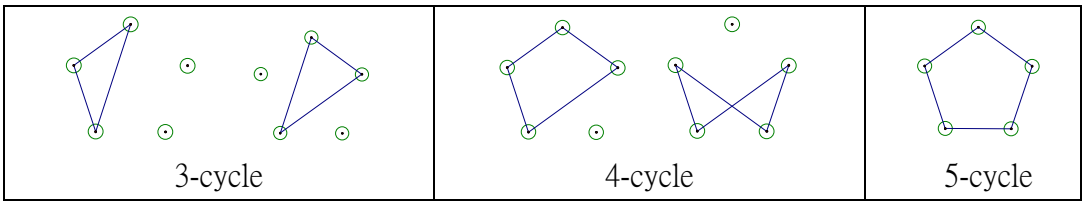


此時尚未形成任意一個 4-cycle，而後手任意連線均形成「3-cycle」，先手滿足勝利條件。

再以前述發現為基礎探討頂點數 5 知單色連線規則，雙方是否存在必勝策略。首先以「頂點間關係只有連線與未連線」的觀點，沒有「邊」或「對角線」的區別，我們歸納下列幾種情形均為相同意義的。

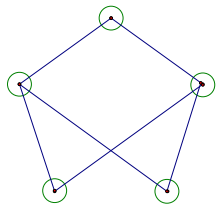


而頂點數 5 之棋盤可能形成的 cycle 有下列幾種：

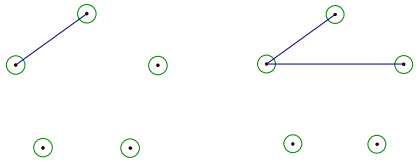
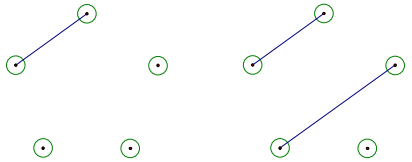


頂點連線探討

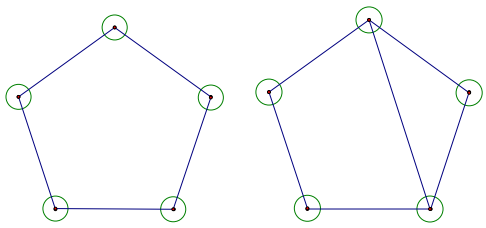
前述幾種頂點數 5 棋盤中可能出現的「cycle」情形，相同頂點數的 cycle 在頂點的連線關係中均具有相同的結構。

而在頂點數 5 的棋盤中存在如右圖之特殊結構，雖五個頂點都存在於 path 上，但未同時連接五個頂點為同一 cycle，故其僅存在三個 4-cycle，而非「5-cycle」。且棋局進行中，此結構尚未連接三角形，即「3-cycle」，但此時任意連線即使對方滿足勝利條件。	 三個 4-cycle

接著再探討先手與後手雙方策略，以先手而言，其第一步建立的連線皆為相同的意義，僅單純「五個頂點中取兩個建立連線」；但後手的第一步則有兩種情形：「與先手第一步建立之連線有共頂點」和「與先手第一步建立之連線無共頂點」，此時也分別建立「一個 2-path」與「兩個 1-path」，如下圖所示

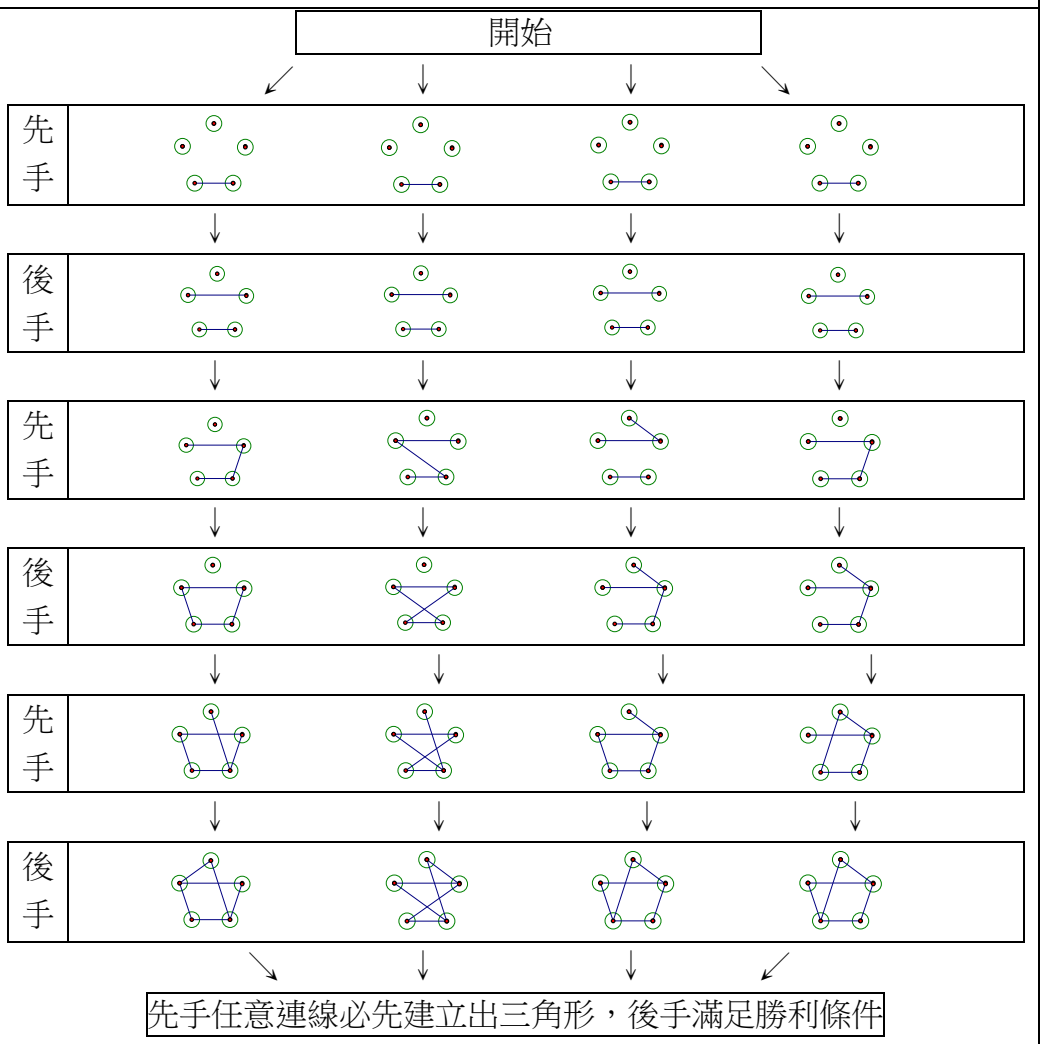
 先手第一步　　後手第一步	 先手第一步　　後手第一步
共頂點	無共頂點

再接著以下表討論「3-cycle」、「4-cycle」與「5-cycle」之間的關係

「5-cycle」形成後，任意兩頂點再做連線即同時形成一個「4-cycle」和一個「3-cycle」，即此時後手無論如何連線均使先手滿足勝利條件，因三角形必會被建立。	

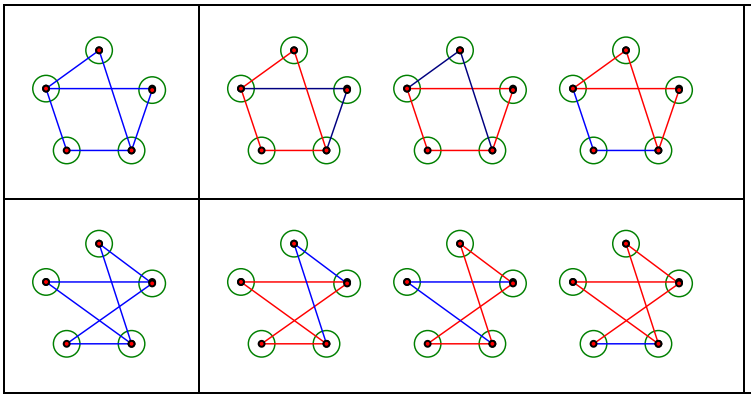
與頂點數 4 棋盤作比較，雖頂點數只增加 1 個，但頂點間的連線關係複雜許多，透過頂點數 4 的棋盤我們歸納了頂點與連線之性質，且也嘗試出後手必勝的策略；但在頂點數 5 的棋盤中，以窮舉法探討策略是相當有難度的，且部分性質與頂點數 4 之棋盤具有差異，如「頂點數 4 棋盤連接 4-cycle 則後手必勝」，但「頂點數 5 棋盤連接 5-cycle 則先手必勝」，故為了探討其策略，我們對頂點數 5 之棋盤做歸納，統整前述發現，以下列幾個原則探討單色連線規則之必勝策略，就可以類化至所有具相同意義的頂點連線過程。

1.「頂點與頂點間只有連線與未連線兩種關係。」
2.「連線與連線間只有共頂點與未共頂點兩種關係。」
3. 相同頂點數的「cycle」具相同意義，即對勝利條件的達成有相同影響。
4. 「5-cycle」內任意兩點連線同時建立一個「4-cycle」與一個「3-cycle」；頂點數 5 之棋盤可同時存在「兩個 4-cycle」。

特殊化頂點數 5 棋盤之單色連線規則必勝策略探討	
說明	以上述討論為基礎，先手的第一步僅為單純將五個頂點間任取兩個做連線，其意義皆為相同的，以下以 作為先手的第一步探討，可類推至其他情形。而後手的第一步僅有兩種：與先手第一步連線共頂點或不共頂點，我們發現，若後手第一步連線不與先手共頂點，則後手必勝，以 討論之並類推，即頂點數 5 之單色連線規則為後手必勝。
圖示	
結論	在窮舉頂點數 5 之所有頂點連接情形較為困難的前提之下，我們依據「頂點與頂點間只有連線與未連線兩種關係」之原則，以部分情形類推至全部，可以確認在單色連線的規則下，仍是後手必勝。其策略在於「後手第一步之連線須與先手第一步連線不共頂點」，而 與 或 都是意義相同的，皆滿足雙方第一步連線不共點之情形，且為後手勝利的策略。又 和 皆為「兩個 4-cycle」，而「5-cycle」之 結構則明顯是後手滿足勝利條件，因此時任一連線皆同時產生一個「3-cycle」和「4-cycle」，故歸納「一個 5-cycle 與三個 4-cycle」均使後手滿足勝利條件。頂點數 5 之單色連線規則後手必勝。

頂點連線探討

討論前述情形，在後手行使必勝策略的情形下，於頂點數 5 之棋盤建構出「三個 4-cycle」時，則先手無論如何連線均會連出一個三角形，而由前述探討可以知道，頂點間的連線若以「path」和「cycle」的觀點來看，符合相同頂點間連線關係結構可視為意義相同的，如下圖探討 和 「三個 4-cycle」之分析。



如左圖，這兩種情形雖然視覺上具有差異，但實際上是意義相同的結構，如紅色標註的連線均連接了 4 個頂點，形成三個「4-cycle」。以此為基礎類推至其他結構。

有了上述「三個 4-cycle」的概念後，我們接著分析其與後手必勝策略的邏輯關係，主要在後手第一步連線「須與先手第一步連線不共點」，又我們知道如 都是雙方第一步連線不共點之相同意義的結構。前述的討論即以 為主作類推，而當後手第一步連線與先手第一步連線不共點時，可讓接下來先手第二步連線必與前兩條雙方連線共頂點，如下圖所示，可能形成「3-path」或「一個 1-path 和一個 2-path」。

先手

而後手接著先手的 path，可連接出「4-path」以及 的結構如下圖。

後手

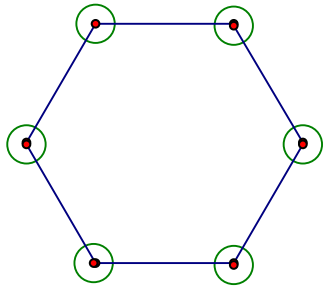
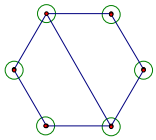
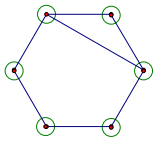
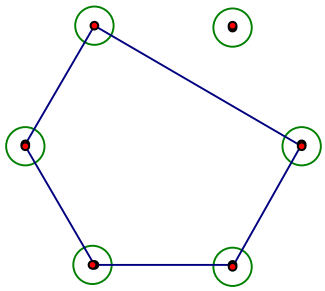
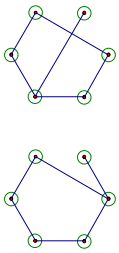
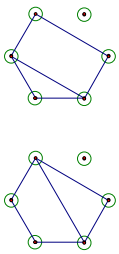
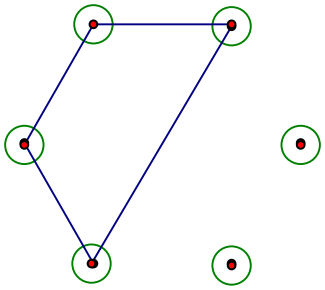
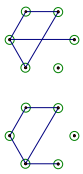
如前述頂點數 4 棋盤探討 4-cycle 在單色連線的規則下對連接成三角形的影響，在頂點數 5 的棋盤中，當產生上圖的結構時，將有利於後手最終建立出如 和 等「三個 4-cycle」的結構，並使得先手必連出三角形。

而若後手第一步連線與先手第一步連線共點如 則此情形不為後手的必勝策略，除非先手再將其連接回 之結構，否則後手未必能滿足勝利條件，而當後手第一步與先手第一步不共點後，策略以連成三個 4-cycle 為主，使先手先連成一個 3-cycle，即滿足勝利條件。

統整前述研究發現，在單色連線規則下，頂點數 4 與頂點數 5 之棋盤後手均具必勝策略，且我們也發現 4-cycle 對於雙方先連成三角形的影響。以下再以此為基礎，討論單色連線規則頂點數 6 之棋盤，雙方的策略運用。

頂點數 6 單色連線探討

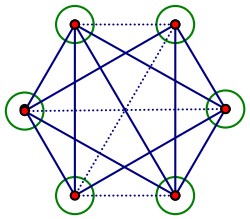
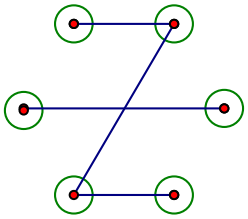
延續前述「cycle」之觀念，探討頂點數 4 單色連線規則之頂點間連線關係，討論如下表：

6-cycle		
		頂點數 6 之棋盤當建構出 6-cycle 時，此時輪到先手再做下一步連線，可以發現存在建構出兩個 4-cycle 的情形。
		除了上述兩個 4-cycle 之情形外，也可能由先手分割出一個 5-cycle 與一個 3-cycle，此時後手滿足勝利條件。
5-cycle		
		5-cycle 建構出來後，此時再輪到後手連線，其僅能就 cycle 內再連線，或與剩餘一頂點連線做選擇，若以 cycle 內任一點與剩餘頂點連線，則會形成一個 5-cycle 與一個 1-path。
		若在 cycle 內再做分割，在此 5-cycle 之頂點中任取兩頂點做連線，必形成出一個 4-cycle 與一個 3-cycle，如圖所示，此時因後手連出一個三角形，先手滿足勝利條件。
4-cycle		
		4-cycle 結構建立後，此時輪到先手連線，若考慮對 cycle 外進行連線，可能建構出一個 4-cycle 和一個與 cycle 共頂點的 1-path。
		而若對剩餘的兩個頂點做連線，則建構出一個與 cycle 不共頂點的 1-path
		cycle 內任意取兩個頂點做連線，則必形成 3-cycle(後手滿足勝利條件)。

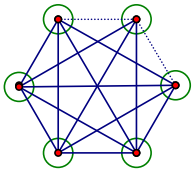
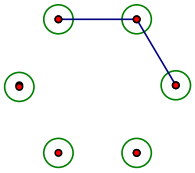
在單色連線規則下，頂點數 5 之棋盤出現 5-cycle 時與頂點數 4 之棋盤出現 4-cycle 時，下一步連線者必連出 3-cycle，使對方滿足勝利條件；但頂點數 6 之棋盤，卻可能使雙方再繼續連出「4-cycle」。

頂點數 6 單色連線探討

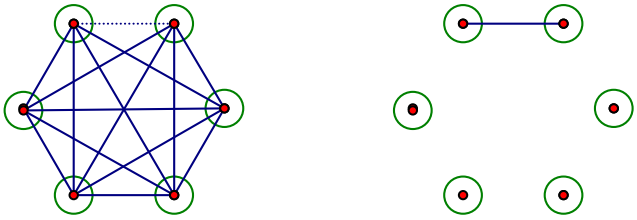
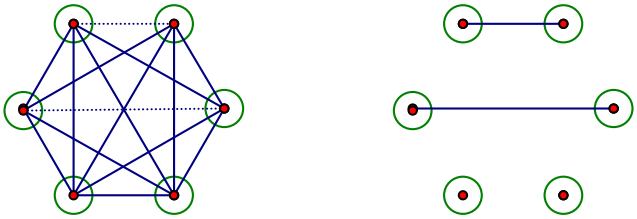
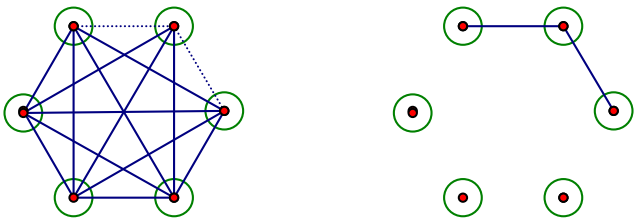
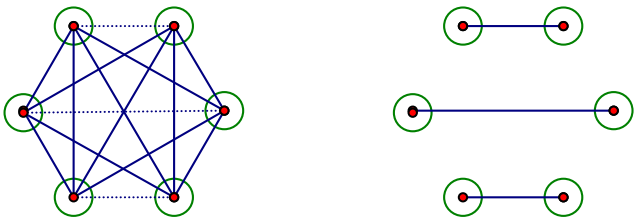
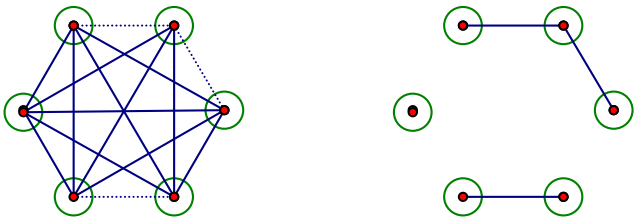
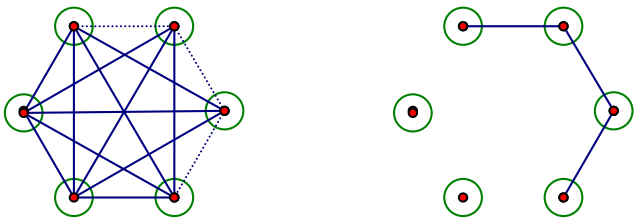
而有了前述基礎後，我們仿照前面頂點數 4、頂點數 5 探討必勝策略的方式建構棋局，但卻發現，即使我們以「頂點與頂點間只有連線與未連線之兩種關係」的原則，歸納相同結構的棋局形式做類推，頂點數 6 的棋盤仍然複雜許多，相同意義的棋盤結構在判定上較不直觀，因此我們調整作法，想到以「逆推」的方式，模擬其可能的策略進行，再以「互補」的原則推倒其「順向進行的棋局」，以下表說明之。

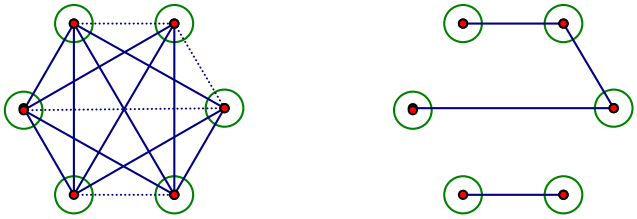
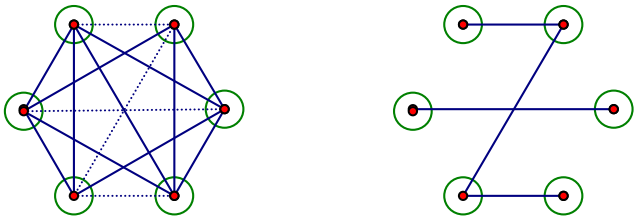
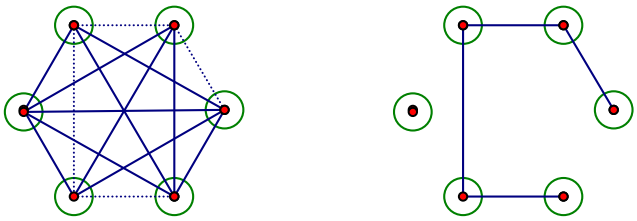
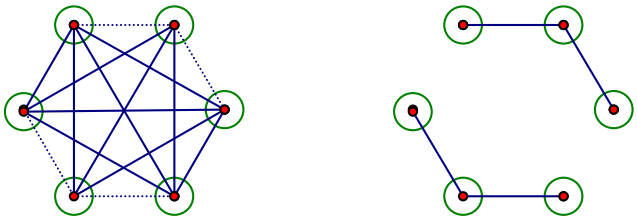
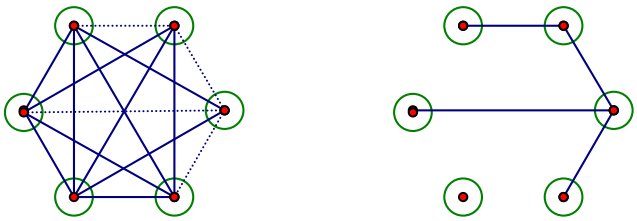
例如我們想知道「已連成 11 條連線的棋局」結構，不考慮各連線出現順序，列出其中一種情形如右圖，並以虛線表示未連成的連線，並改變其虛線與實線之間的相對位置關係，模擬並歸納相同連線數之各種可能的棋盤結構，以分類後討論與分析頂點數 6 之棋盤可能的策略運用。	
而前述的「逆推」模擬棋局進行的結果，若將「虛線」（未連成的連線）改為實線，並同時去掉其他已連成的連線，即為另一種已連成連線數不同的另一種棋局結構，我們稱之為「互補結構」，兩種結構構成六邊形 6 個邊與所有對角線。可幫助我們同時探討多種不同的棋局結構，增進資料的完整性。	

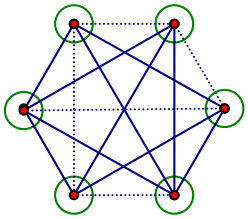
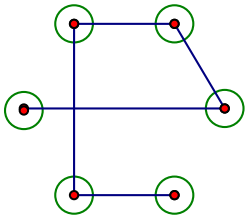
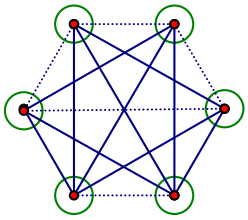
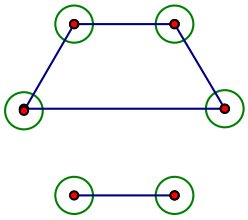
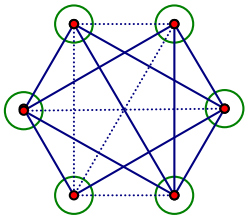
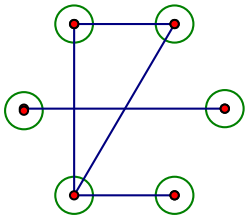
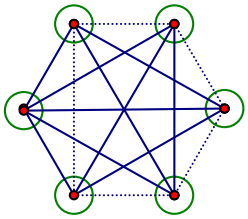
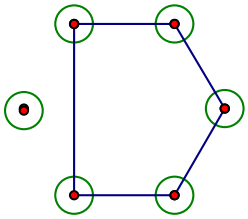
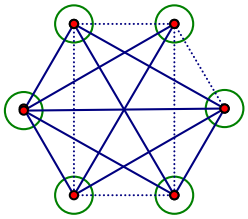
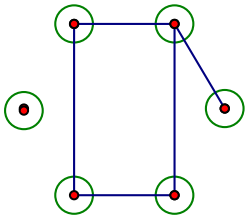
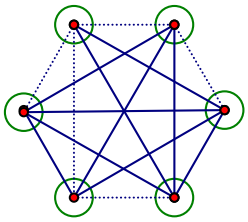
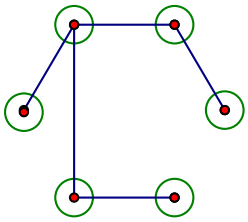
而為求對頂點數 6 之棋盤可能棋局結構瞭解的增進，我們先以窮舉法盡可能列出各種不同已連線數之結構，歸納相同意義結構，紀錄不同連線關係，我們先已盡量列出為原則，將已連成三角形的結構一起納入討論，因其「互補結構」可能即符合正式遊戲規則。

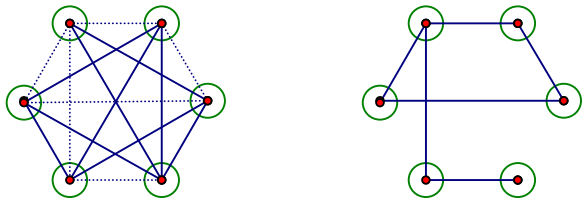
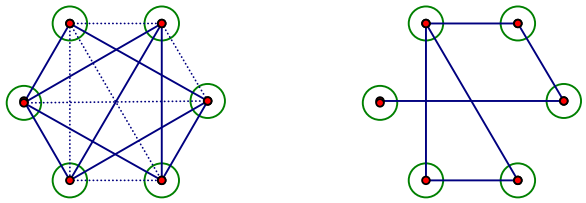
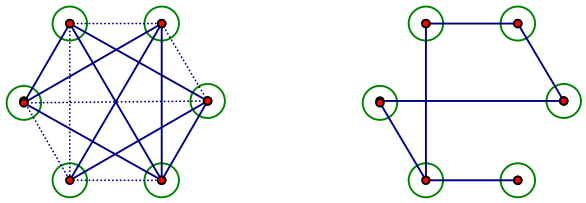
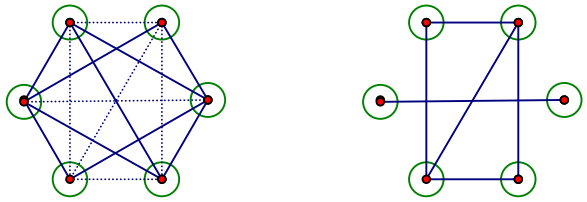
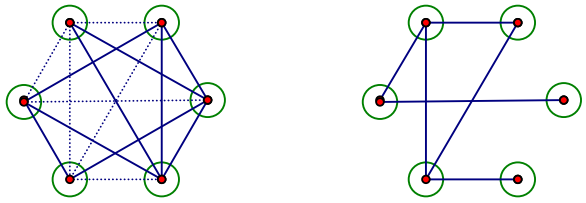
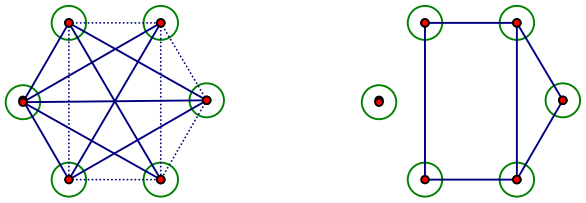
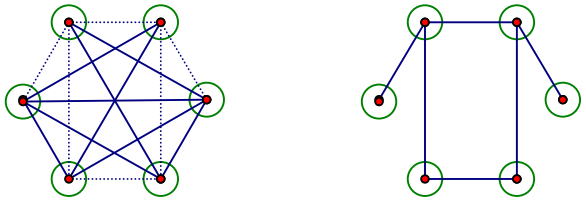
 	如左圖，逆推「已連出 13 條連線」之結構，雖其現實上不可能出現，因已連成三角形，但我們一起列入討論，從其出現的三角形數與互補結構分析規律。

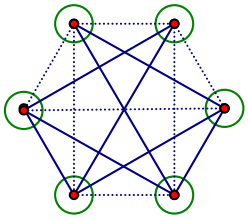
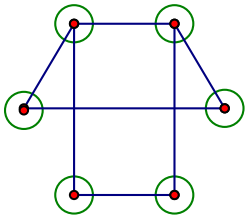
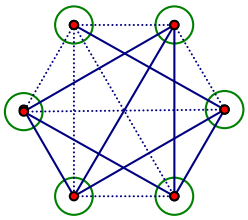
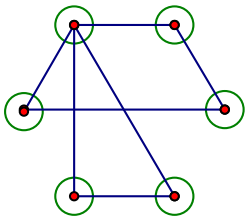
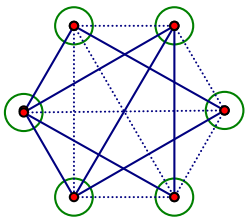
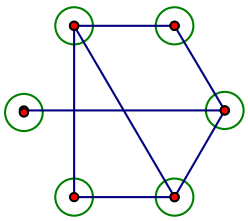
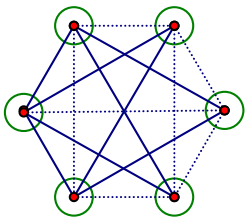
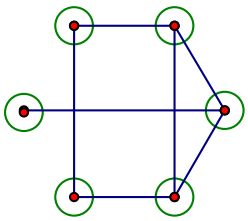
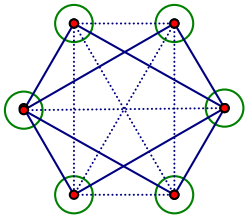
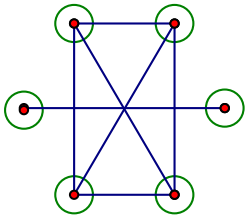
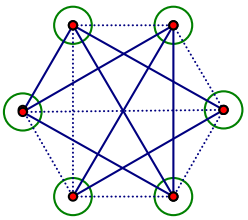
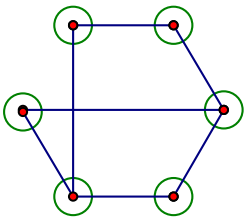
我們同時列出不同已連線數之棋局模擬與其互補結構，同時並列之如下表所示，檢驗其頂點間連線關係，「cycle」與「path」的構成，其中雖涵蓋不可能在正式棋局規則出現的結構，但因其同時也對應另一個互補結構，可透過互補結構討論其已連線數的情形，我們先盡量窮舉之，再行歸納分析後，探討雙方策略運用。六邊形對角線數與邊數和為 15，即我們模擬的棋局已連線數和其互補結構連線數和為 15，以下主要以「不同以連線數之棋局與其互補結構」兩種情形分別整理，詳列於下。

頂點數 6 單色連線探討	
已連線數 14 互補結構即為遊戲開始的第一步連線，6 個頂點中任取 2 個，僅一種結構。	
已連線數 13 在已連出 13 條連線的結構中，若以互補結構的觀點來看，則僅有「兩條連線共頂點」與「兩條連線不共頂點」兩種，即已連線數 13 僅兩種結構。	
	
已連線數 12 如前述以「互補結構」的觀點探討，則有「三個 1-path」、「一個 2-path 與一個 1-path」和「一個 3-path」等情形，即以連線數 12 僅三種意義不同的結構。	
	
	

<table>
<tr><th colspan="2">頂點數 6 單色連線探討</th></tr>
<tr><td rowspan="5">已連線數 11
我們以「逆推」和「互補」來分析頂點數 6 之棋盤可能情形，以做歸納與簡化，但從已連線數 11 開始，可能連線情形又更複雜化，如圖可以觀察到，以「互補結構」來看，可能出現「一個 3-path 和一個 1-path」、「四個 1-path」、「一個 4-path」、「兩個 2-path」等等的結構。</td><td>  </td></tr>
<tr><td>  </td></tr>
<tr><td>  </td></tr>
<tr><td>  </td></tr>
<tr><td>  </td></tr>
</table>

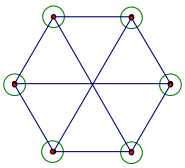
頂點數 6 單色連線探討		
已連線數 10 再繼續討論已連線數 10，若原結構未出現三角形，其互補結構可能出現。互補結構連線數為 5，其可能出現「5-path」、「4-cycle 和 1-path」、「3-cycle 和兩個 1-path」、「5-cycle」、「3-path 和 2-path」等結構。		
		
		
		
		
		

頂點數 6 單色連線探討	
已連線數 9 互補結構連線數 6，可能出現結構有：「4cycle 和 2-path」、「3-cycle 和 3-path」、「6-path」、「兩個 3-cycle 和 1-path」、「4-cycle 和 3-cycle」及「4cycle 和 1-path」等等。	
	
	
	
	
	
	

頂點數 6 單色連線探討		
已連線數 8 互補結構連線數為 7，可能出現「兩個 4-cycle」、「4-cycle 與 3-cycle」、「4-cycle、3cycle 與 1-path」、「四個 3-cycle 與 1-path」、「5-cycle 與 4-cycle」等不同的結構。		
		
		
		
		
		

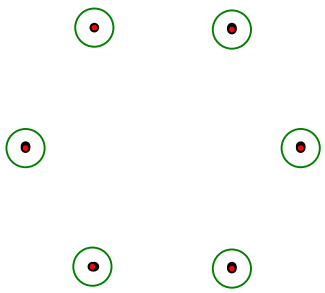
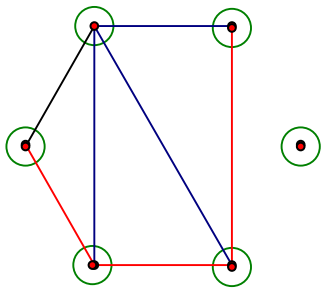
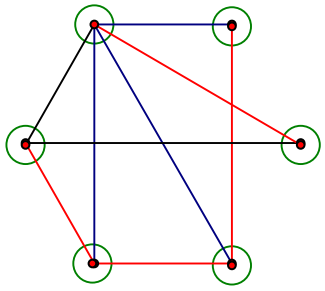
頂點數 6 單色連線探討

時間的關係，我們討論還未能明確歸納其必勝策略存在與否，但在這些棋局結構的的資料中，我們發現考慮正式遊戲規則，連成三角形則另一方滿足勝利條件，其已連線數（不含最後畫完三角形的那一條連線），不超過 10，且僅存在此已連線數 9 之結構（即六邊形的全對角線與六個邊），且未形成任何三角形，如圖所示，此時任意將兩頂點連線即建立出一個三角形。



又我們分析發現，此頂點間連線的遊戲，其結構其實可以轉換成「數數奪標」遊戲思考。常見的「數數奪標」遊戲即「雙方規定每次可數的數量及最後數到何數為輸」，例如：規定每人一次最多可數 3 個數，數到 15 的人輸，此類遊戲也有相當多的探討和研究，歸納先手或後手的必勝策略。

而之所以兩個遊戲結構類似，以下舉例說明：

	如圖，棋局每次開始時，雙方任取兩點建立連線，所有可能連線數總共為 15（邊數與對角線數和），故遊戲開始後，先手連接第一步連線，總連線數即減 1，剩 14 條可進行連線，此時輪到後手，若其第一步連線與先手不共點，則總連線數再減 1；若共頂點則總連線數再減 2。
	又如雙方各連接兩條連線後，如圖紅色的部分即為連了就產生三角形的連線，故雖然僅連 4 條，實際上總連線數卻是減 7（4 條已連與 3 條不能連），雙方不同的連線會對總連線數的減量產生不同影響，可能僅少 1 條或同時減少 2~3 條等，此情形即類似數數奪標一次要數 1~3 個數的意義。
	延續上圖，此時先手再連接一條，原本總連線數減 7，但再連圖示的這一條後，總連線數即再減 2（包含不能連的紅色連線），故此遊戲即從總連線數 15，雙方每次減不同的連線數，將 15 減完時遊戲結束且僅有一方滿足勝利條件，過程中可估計需減的連線數量做為策略考量。

但兩種遊戲間卻也存在差異，如傳統數數奪標遊戲雙方每一回和都可自由決定欲數的數量（至規定上限），但在此連線規則中，先手第一步均僅能使總連線數減 1，後手第一步則有減 1 或減 2 的選擇；數數奪標可以透過分析歸納哪一方具必勝策略，故我們猜想單色連線頂點數 6 六點連線也能歸納之。

伍、研究結果

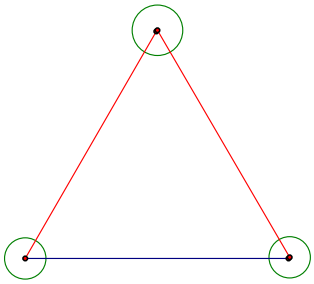
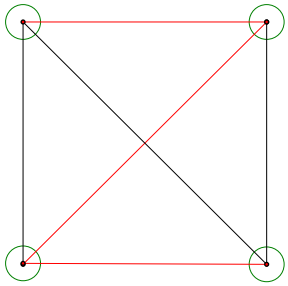
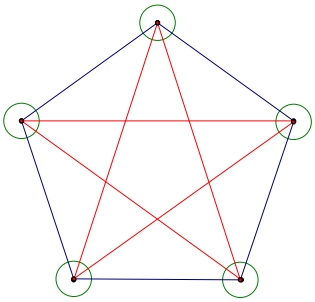
雖本研究規劃先特殊化單色連線規則後，再討論雙色連線，以求得其不會和局與必勝策略之相關分析，但時間的關係，我們僅探討到單色連線之特殊化規則，但從中連想到以圖論的「cycle」與「path」觀念，或者參考數數奪標遊戲結構，探討其必勝策略，相信也為日後的研究立下基礎，也引起我們繼續研究的興趣。而我們歸納目前的研究結果如下：

一、單色連線規則頂點數 4 之棋盤，後手有必勝策略：後手第一步連線不與先手第一步連線共頂點，建立 4-cycle 後其後手必勝。

二、單色連線規則頂點數 5 之棋盤，後手有必勝策略：後手第一步連線不與先手第一步連線共頂點，建立三個 4-cycle 後其後手必勝。

陸、討論

除了簡化棋盤頂點數，我們也初步嘗試將雙色連線規則特殊化為單色，從連線數偶數或奇數即可瞭解輪到先手或先手下。頂點數 3 之情形先手必輸；而頂點數 4 及頂點數 5 則雙方均可能連成三角形，以致對方滿足勝利條件，再以此為基礎，回復原雙色連線規則再以頂點數 3 至 5 探討如下。

雙色連線規則		
頂點數 3	頂點數 4	頂點數 5
		
頂點數 3 存在和局情形，只要出現和先手不同顏色之連線必構成和局結果。	頂點 4 存在和局情形，若欲建構三角形必須連接對角線，故對角線與邊異色即構成和局	頂點數 5 存在和局情形，如頂點數 4 對角線與邊的關係，對角線與邊異色即構成和局。

另外我們也探討本次研究對雙色規則的類推，如同頂點數 6 之棋盤其 cycle 與 path 的關係涵蓋頂點數 5 或頂點數 4 的結構（如頂點數 6 棋盤存在 5-cycle、4-cycle 等），我們認為目前對單色規則頂點數 6 的結構探討皆為包含在雙色規則的子結構，且如前所述在單色連線規則頂點數 6 之棋盤，若以數數奪標的遊戲進行方式做對應，我們猜測其也有必勝策略存在，推廣雙色規則亦然。

故我們規劃未來研究方向，也提供有興趣研究的人建議：歸納單色連線規則頂點數 6 棋盤之必勝策略、分析單色連線規則之各頂點數棋盤與如數數奪標等其他數學遊戲之關係、推廣至雙色連線規則分析頂點數 6 以上之棋盤其必勝策略運用。

柒、結論

一、此六點連線遊戲，無論頂點數與頂點間距離如何，頂點間的連線關係可以由三維空間的觀點解釋，僅具連線與未連線兩種關係，以平面圖形觀點來看的「邊」或「對角線」等在此遊戲中其實是具相同意義的。因此引進圖論「cycle」、「path」觀點，連接相同頂點數 cycle 與 path 對棋局策略有相同影響。

二、此六點連線遊戲，在特殊化單色連線規則中，頂點數 4 的棋盤後手有必勝策略：其雙方各自的第一步連線需不共頂點，連成 4-cycle 之結構後手必勝；頂點數 5 的棋盤後手亦具必勝策略，雙方各自第一步連線不共頂點，連成三個 4-cycle 後手必勝。

三、後續研究方向有：驗證單色連線規則頂點數 6 之棋盤具必勝策略的猜想、歸納六點連線與其他如數數奪標等數學遊戲之邏輯關係、類推雙色連線規則必勝策略之探討等。

捌、參考資料

一、書籍與著作

(一) 科學家的餘興節目 / 國立臺灣師範大學　數學系　許志農　教授

http://pisa.math.ntnu.edu.tw/popular-science/game/2013-10-03-03-07-42

(二) 戲說數學　/　國立臺灣師範大學　數學系　許志農　教授

http://pisa.math.ntnu.edu.tw/popular-science/game/2014-03-14-01-38-49

二、科展作品說明書

(一) 中華民國第 58 屆中小學科學展覽會 / 步步為「贏」–鋸木塊遊戲之探討

(二) 中華民國第 45 屆中小學科學展覽會 / 圓舞曲

(三) 中華民國第 56 屆中小學科學展覽會 / 遨遊棋盤：與直–橫–斜一筆畫共舞

(四) 中華民國第 45 屆中小學科學展覽會 / 黑格連線

(五) 嘉義市第 36 屆中小學科學展覽會 / 落「井」下棋——利用井字遊戲探討搶 15、3×3×3 立方體井字遊戲策略

(六) 中華民國第 56 屆中小學科學展覽會 / 數字迷宮-雙對角線數字和最大值之研究

(七) 中華民國第 54 屆中小學科學展覽會/它鎖的住我？~手機螢幕鍵盤鎖之探究

(八) 中華民國第 47 屆中小學科學展覽會 / 方塊地板嵌合形式及任意三角形數量計數相關公式之追求與創新

(九) 中華民國第 55 屆中小學科學展覽會 / 層出不窮的彩蛋有「心」「跡」 —圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討

三、網站及網路資料

(一) 課堂上的數學遊戲

http://blog.magiclass.net/2012/02/blog-post.html

(二) 昌爸工作坊

http://www.mathland.idv.tw/