嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：唯一「焦」點

—圓上連線數關係之探討

關鍵詞：圓、直線、奇偶性

編號：

摘要

本研究的主要目標為探討一個有趣的「交叉線遊戲」，觀察討論圓上點數之差異，圓內直線連接情況，發現此遊戲與連線數具有奇偶數關係。研究過程發現當截線出現在對稱軸之前時，線段數之總和為奇數，截線與對稱軸之對應位置為先、後手獲勝之重要條件。一特例為一當圖形中的某一直線與圖中的每一條連線相截且對稱軸兩邊各出現一個封閉三角形時，線段數之總和則為偶數。後續研究亦調整線段 a1 所連接的兩個起始點，由不同的最初圖形，尋找出相異的最終圖形，最後列出各種圖形的最終樣貌情形進行討論，發現圖形的最初模樣不同（起始點之選取不同），隨之經由遊戲條件限制下的每一條直線增加，圖形最終之樣貌則出現具有旋轉、對稱性之關係，亦會出現樣貌完全相同之圖形，此外，圖形具有延用性發展。

壹、研究動機

於一次瀏覽關於數學遊戲的網頁時，偶然邂逅「交叉線遊戲」此遊戲，這個看似簡單卻不失韻味的有趣遊戲，它只需紙、筆即可進行。接觸此遊戲後，亦讓我們回想起曾經學過的對角線公式以及未來將會學到的排列組合，發現它的延伸範圍竟如此廣泛，因而觸發心中的那份悸動與好奇心，因此，我們欲探討於此特別的遊戲是否會隱藏著一些規律，甚至是否能發現一通式可以表示其連線數及玩家勝率，藉由更進一步地探討分析，以期體會其奧妙之處。

貳、研究目的

一、圓上固定點數，討論其直線連接方式。

二、探討圓上點數差異對直線連接之影響與變化。

三、探討是否有必定獲勝的直線連接方法。

四、探討連線數之奇偶性與截線之間的關係。

参、研究設備與器材

紙、筆、尺、電腦繪圖軟體 GeoGebra-Windows-Installer-5-0-524-0、小畫家

肆、研究過程與方法

一、文獻探討

「交叉線遊戲」的英文名稱為「Crossline」，為 Rodrigo Jorquera Jorquera 於 2009 年在遊戲雜誌所發表的紙筆遊戲，至今為止已有了十年的歷史。

二、名詞與符號定義

（一）n：圓上的點數。

（二）點 數 ： 圓 上 點 的 個 數 。

（三）藍線 ar(實線)：為遊戲的先手所連接的第 r 條線，r 為數字。

（四）紅線 br(虛線)：為遊戲的後手所連接的第 r 條線，r 為數字。

三、遊戲規則

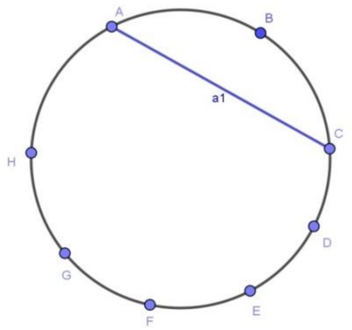
由玩家在白紙上繪製一個大圓，並在大圓周圍畫上間距相近的 n 個圓點，各個圓點可用英文字母標示，接著，起始玩家任選圓上兩個不相鄰的點，以直線進行連結。雙方玩家輪流將圓上兩個不相鄰且尚未連線的點，以直線進行連結。玩家所連接的直線只能剛好交叉一條先前已繪製的直線，不能交叉兩條以上直線，亦不能未與任何直線相交，當玩家無法在圓內增加直線時，遊戲即告結束，並由畫出最後一條直線的玩家贏得遊戲勝利。

四、研究過程

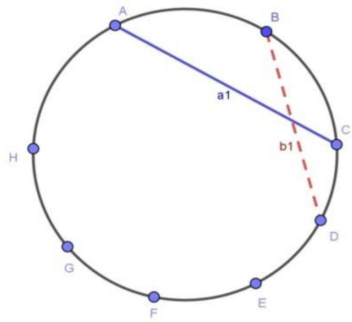
本研究點數的討論為 5≦n≦8 之情況，在圓上以順時針方向由點 A 開始標記，因此，n 個點則標記到第 n 個英文字母，此外，避免圖形有所遺漏，故先由線段 AC 編碼為 a1 開始討論。

(一) 編碼規則：最初的編碼方式為一圖中有幾條線則有幾個數字，即每多出一條直線則多加一個數字編碼，我們以線段 AC 之【圖一】及線段 AC 之【圖二】為例進行說明。此圖為點數等於 8 個之研究，所以編碼的第一個數字為 8，而**第一條線，即 a_1** 直線所連接的兩個起始點分別為 A 點及 C 點，稱為【圖一】為線段 AC 之 8，而【圖二】為線段 AC 之 8-1(線段 BD)，以此方式類推，當再增加一條直線 BE 如【圖三】時，

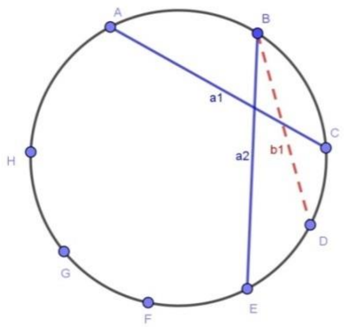
因增加一條連線，故稱之為線段 AC 之 8-1-1，而【圖四】則為第三條線的第二種可能連接方式，因而稱之為線段 AC 之 8-1-2，若第一條線所連接的兩個起始點為 AD，則稱之為 AD 之…，後續的編碼亦依此規則進行，當圖形最後完成時，再將圖形以 n 值之不同進行分類，本研究將針對 n=5、6、7、8，將圖形以最終連線數之多寡分別進行分類、排列與討論。



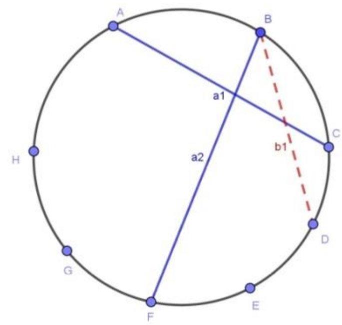
【圖一】



【圖二】



【圖三】



【圖四】

本研究將針對三種實作類型進行討論：

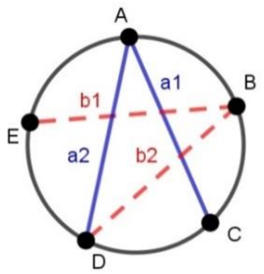
1. 實作一：n 值相同時，討論分析圖形間的關聯。將圖形依連線數之多寡進行分類，分別在點數相同時比較圖形，以找出其關聯性。
2. 實作二：n 值不同時，分析討論圖形間的關聯。依照點數之不同，而連線數相同的圖形進行比較，以找出其關聯性。
3. 實作三：討論截線與連線數之關聯性。在 n=6、7、8 點圖形中，分別尋找圓上的某一點發射出 n-3 條射線，且另有一截線與此 n-3 條射線相截於圖形對稱軸前，找出其與連線數之間的關聯性。

(二) 針對 5≦n≦8 的所有圖形，依連線數之多寡列出各圖形。

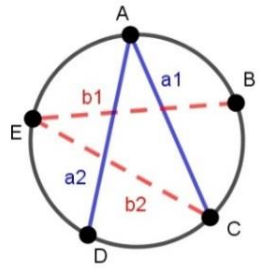
1. n=5 圖形

（1）四條連線

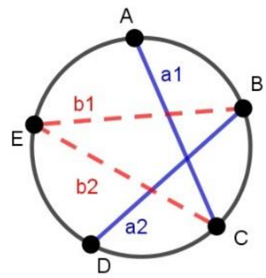
1.



2.



3.

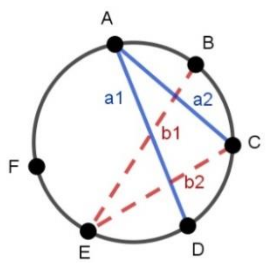


觀察上述整理之圖形，發現點數為 5 時，其連線數僅有四條，在圖形經由旋轉後，可發現圖形僅有一種。

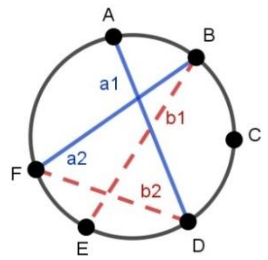
2. n=6 圖形

（1）四條連線

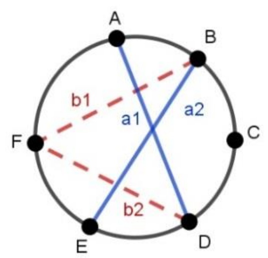
1.



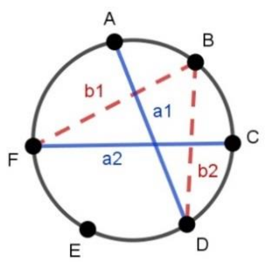
2.



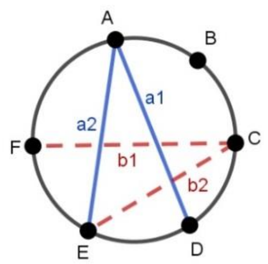
3.



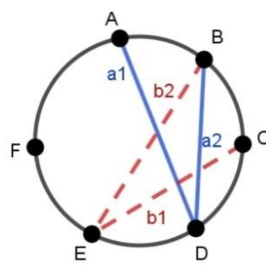
4.



5.



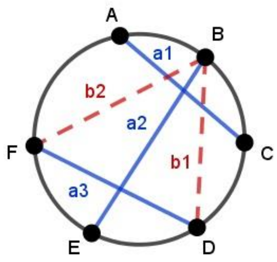
6.



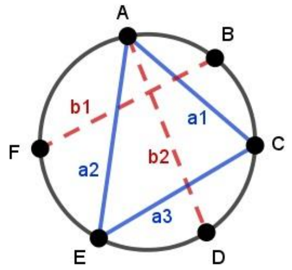
觀察點數為 6 且連線數為四條之圖形，可發現各圖形中皆有一點未使用，亦即缺點數為 1，而所有連線中皆有一條直線為圖形之對稱軸。

（2）五條連線

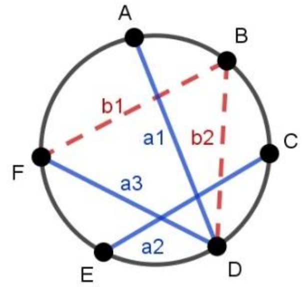
1.



2.



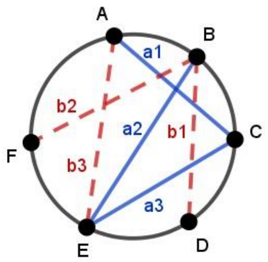
3.



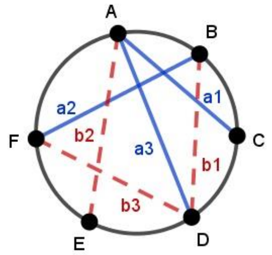
觀察點數為 6 且連線數為五條之圖形，發現圖形經由旋轉後僅呈現一種類型，且所有連線中會出現一個封閉三角形，此外，在連線中會出現一條直線為圖形之對稱軸。

（3）六條連線

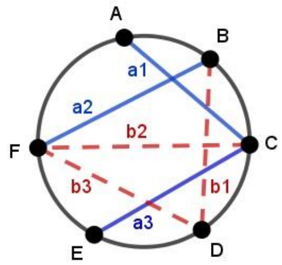
1.



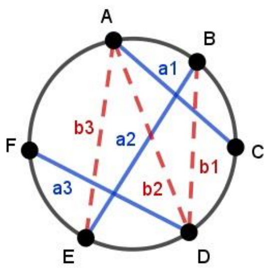
2.



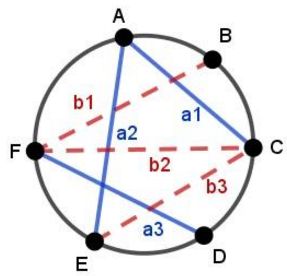
3.



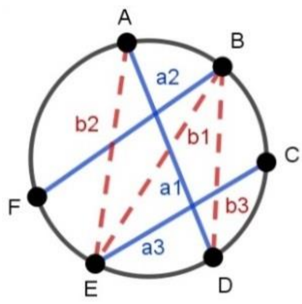
4.



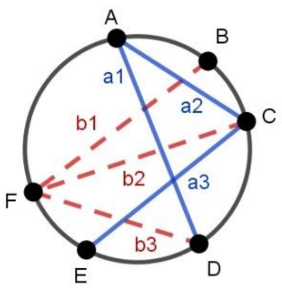
5.



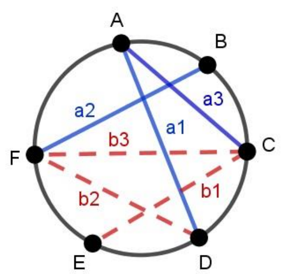
6.



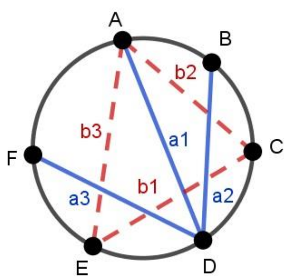
7.

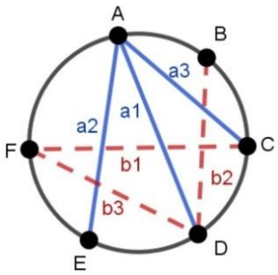


8.



9.

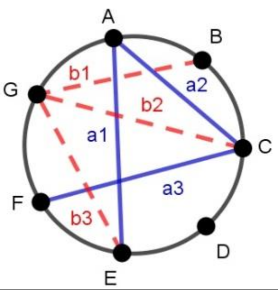
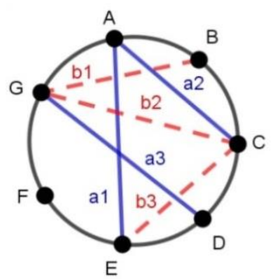
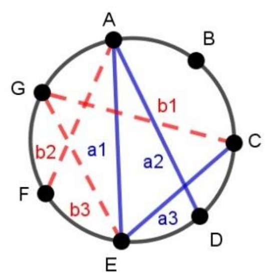


<table>
<tr>
<td>10.
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

觀察上述整理之點數為 6 且連線數為六條之所有圖形，發現圖形樣貌有兩種，一種類型為一封閉三角形與某一點會出現三條連線，而另一類型則為圖形中有相異二點分別皆出現三條連線。

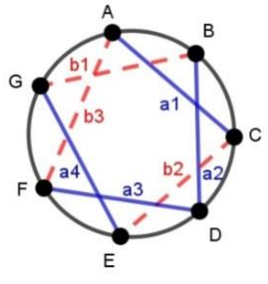
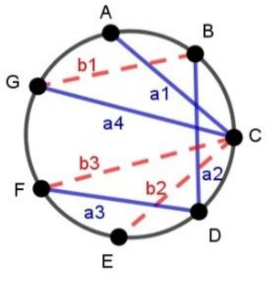
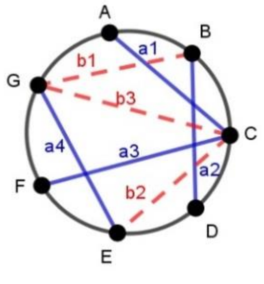
3. n=7 圖形

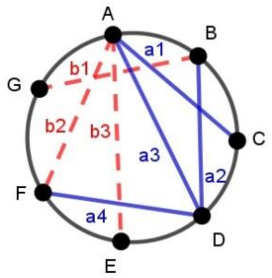
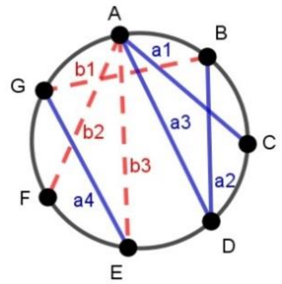
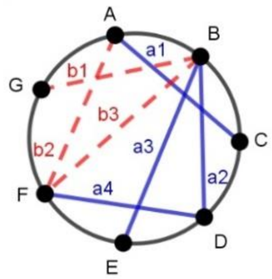
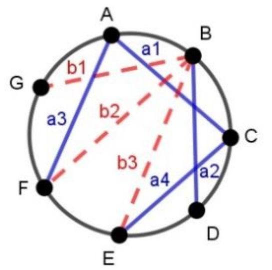
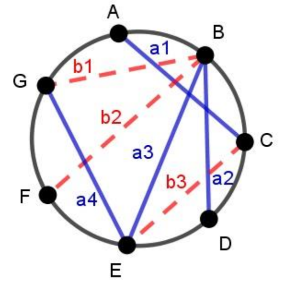
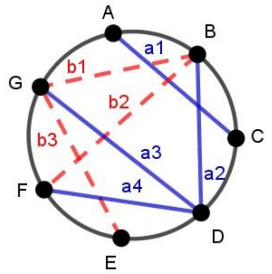
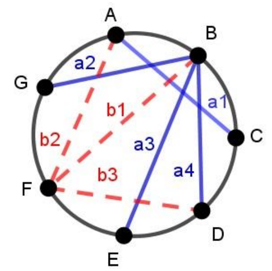
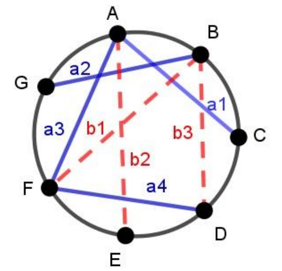
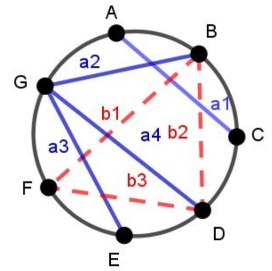
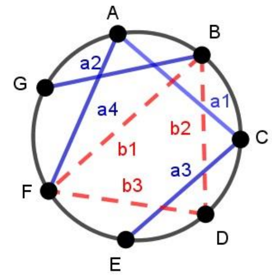
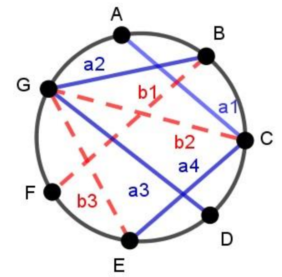
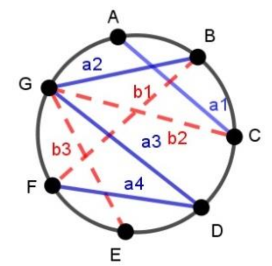
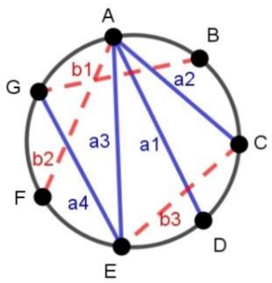
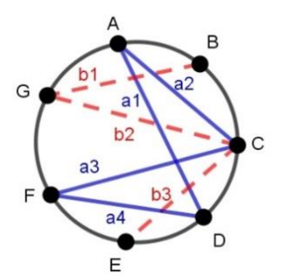
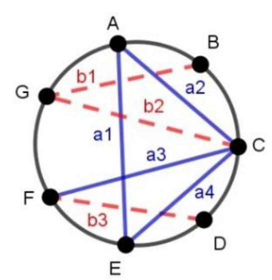
（1）六條連線

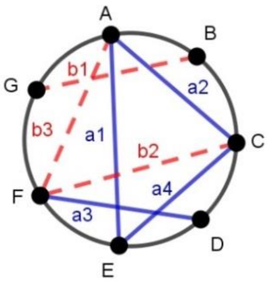
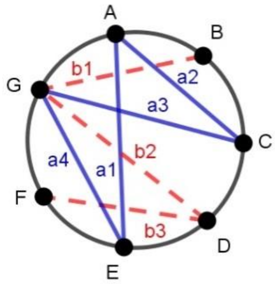
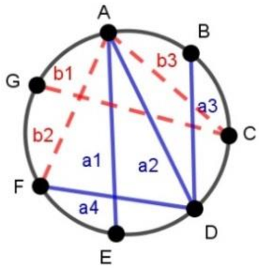
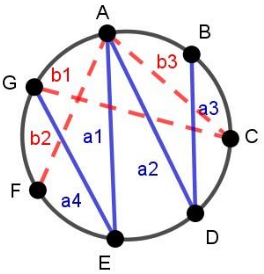
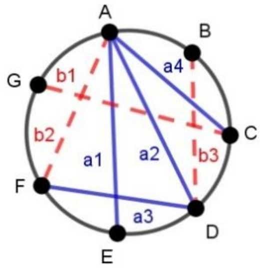
<table>
<tr>
<td>1.
</td>
<td>2.
</td>
<td>3.
</td>
</tr>
</table>

觀察點數為 7 且連線數為六條之圖形，發現僅有兩種樣貌之圖形，其圖形種類與 n=6 之六條連線之圖形一致，唯圖形會出現缺點數為 1 之情形。

（2）七條連線

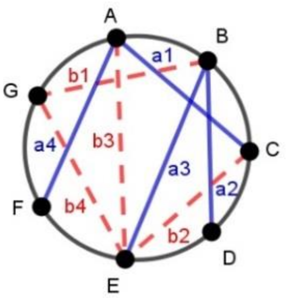
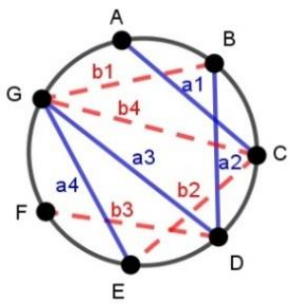
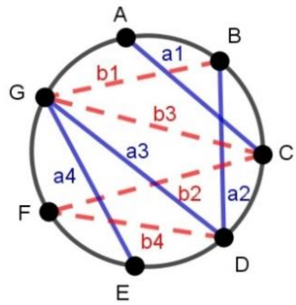
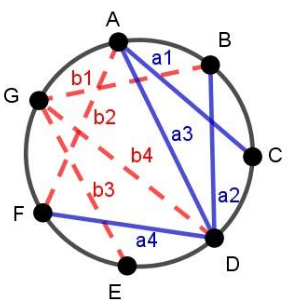
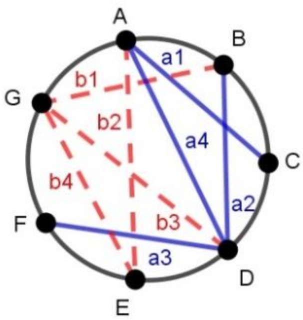
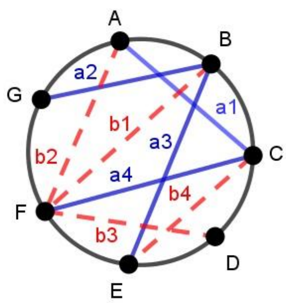
<table>
<tr>
<td>1.
</td>
<td>2.
</td>
<td>3.
</td>
</tr>
</table>

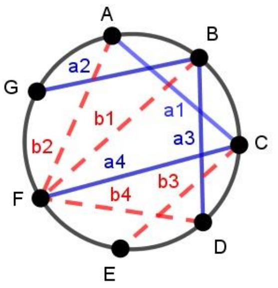
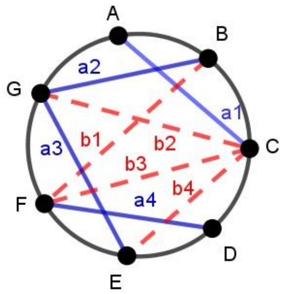
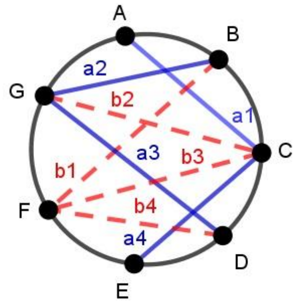
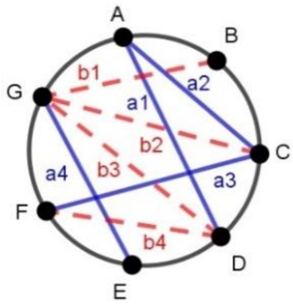
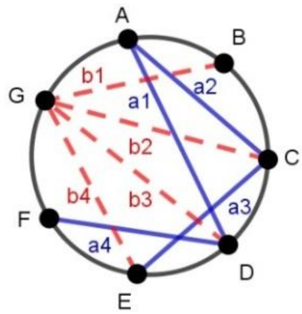
4. 	5. 	6. 
7. 	8. 	9. 
10. 	11. 	12. 
13. 	14. 	15. 
16. 	17. 	18. 

19. 	20. 	21. 
22. 	23. 	

觀察上述整理之點數為 7 且連線數為七條之所有圖形，發現共有四種相異樣貌之圖形，分別為圖形編號 1（類似星形），圖形編號 9＝圖形編號 12＝圖形編號 19，圖形編號 11 以及其他剩餘圖形，而多數圖形之共同點皆為圖形中某一點會有四條連線，而此四條連線皆會被另一直線所截。

（3）八條連線

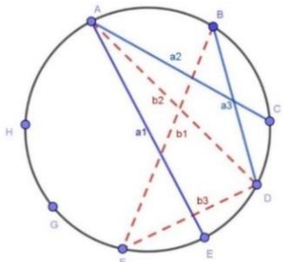
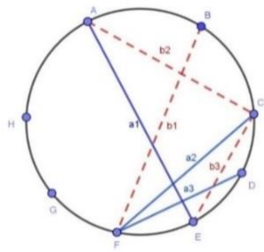
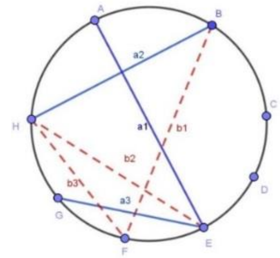
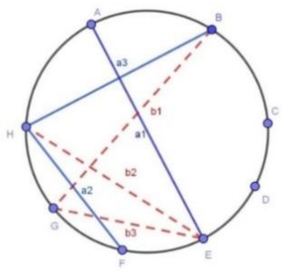
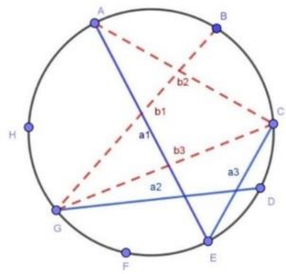
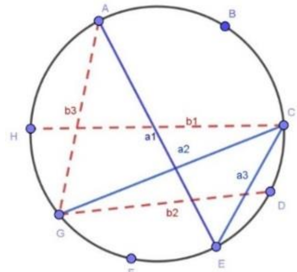
1. 	2. 	3. 
4. 	5. 	6. 

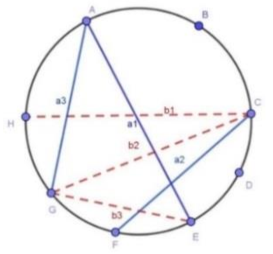
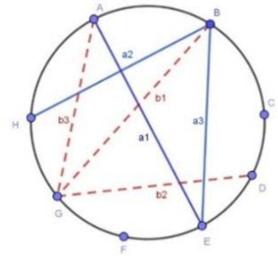
<table>
<tr>
<td>7.
</td>
<td>8.
</td>
<td>9.
</td>
</tr>
<tr>
<td>10.
</td>
<td>11.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

觀察點數為 7 且連線數為八條之所有圖形，發現圖形經由旋轉後，僅有一種類型，圖形中會有某一點會出現四條連線，而這些連線並未全部被另一直線所截。

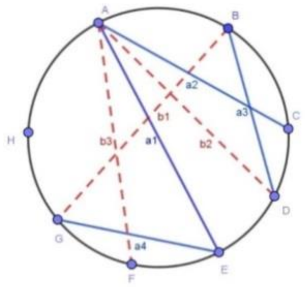
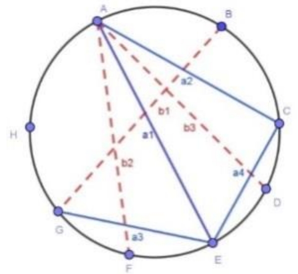
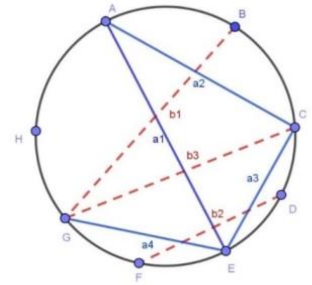
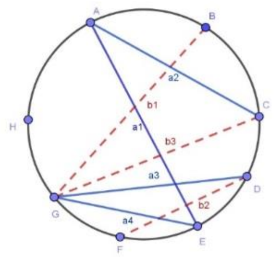
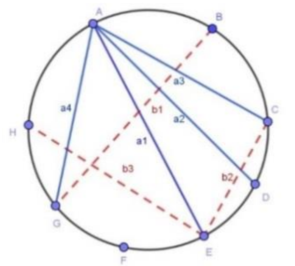
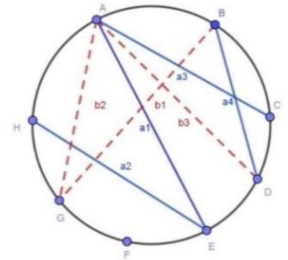
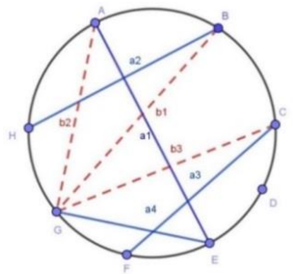
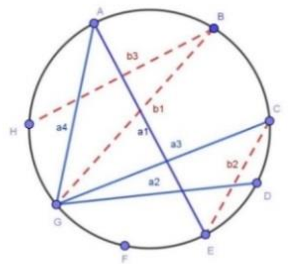
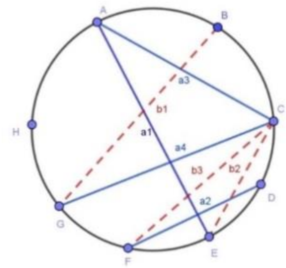
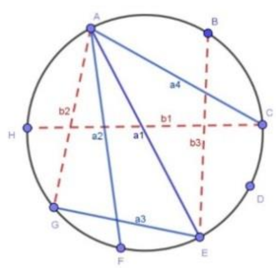
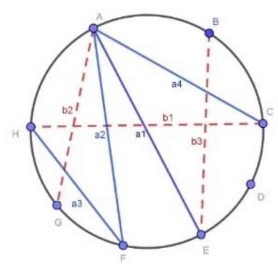
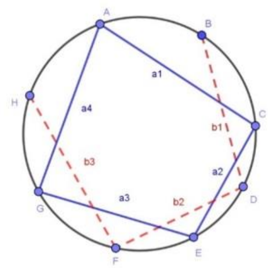
4. n=8 圖形

（1）六條連線

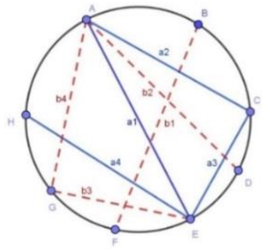
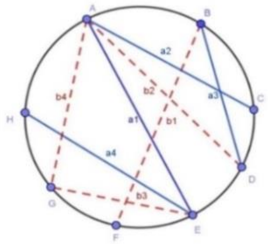
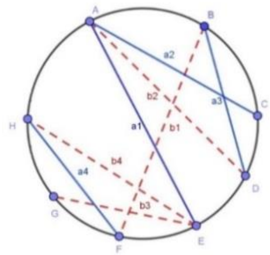
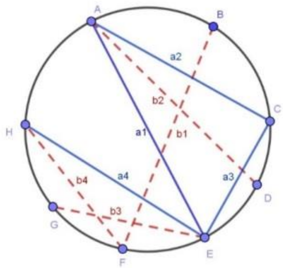
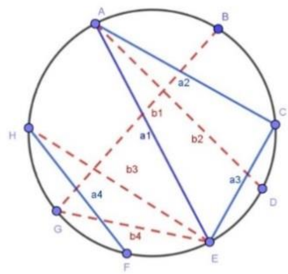
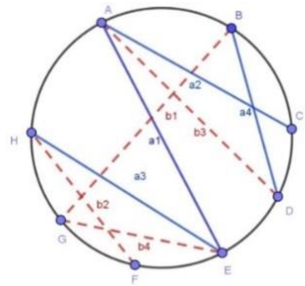
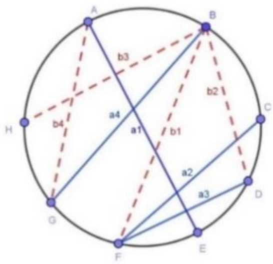
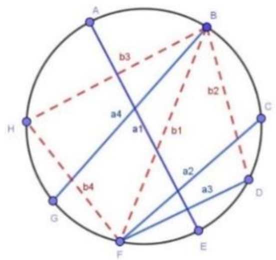
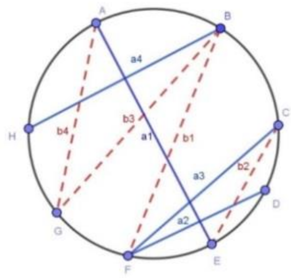
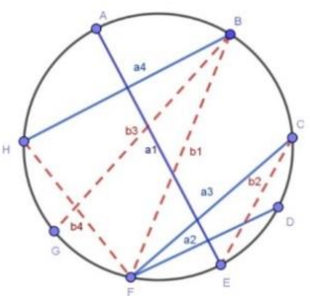
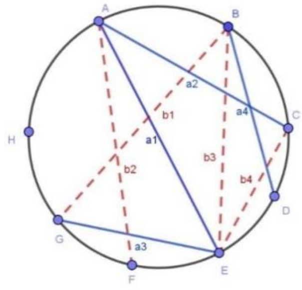
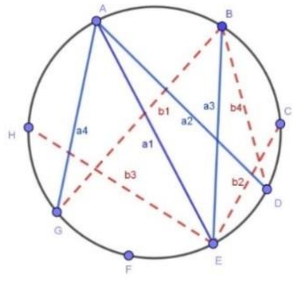
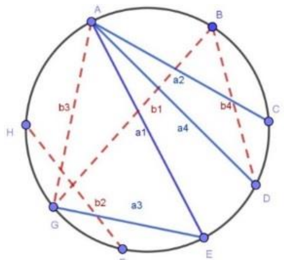
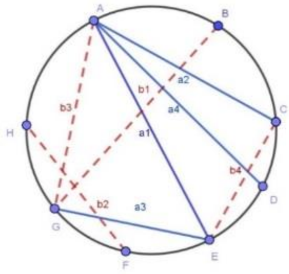
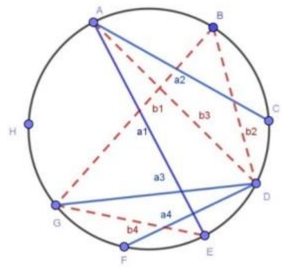
<table>
<tr>
<td>1.
</td>
<td>2.
</td>
<td>3.
</td>
</tr>
<tr>
<td>4.
</td>
<td>5.
</td>
<td>6.
</td>
</tr>
</table>

7. 	8. 	

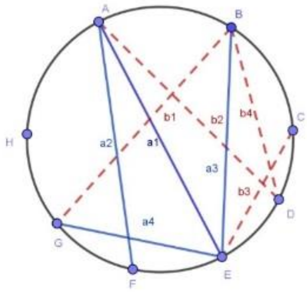
（2）七條連線

1. 	2. 	3. 
4. 	5. 	6. 
7. 	8. 	9. 
10. 	11. 	12. 

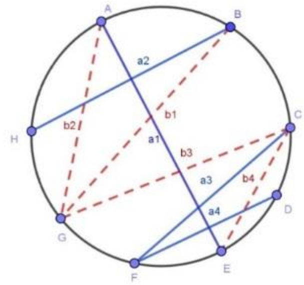
（3）八條連線

1. 	2. 	3. 
4. 	5. 	6. 
7 	8. 	9. 
10. 	11. 	12. 
13. 	14. 	15. 

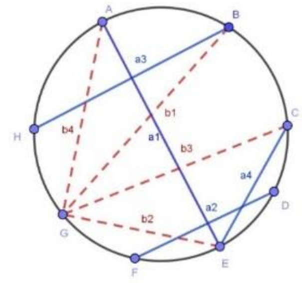
16.



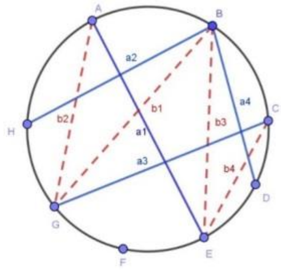
17.



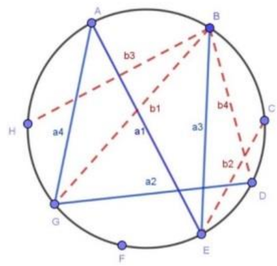
18.



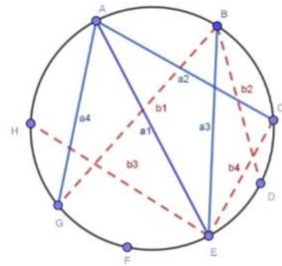
19.



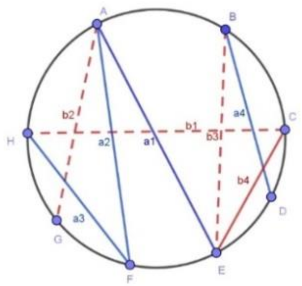
20.



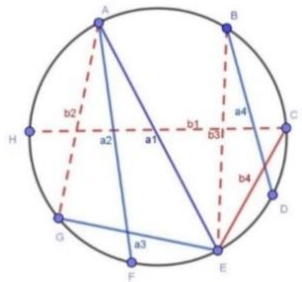
21.



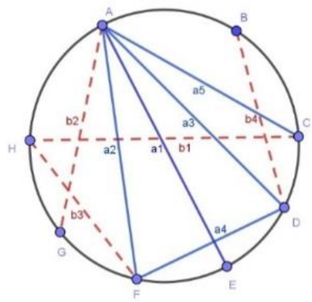
22.



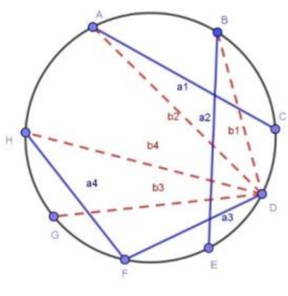
23.



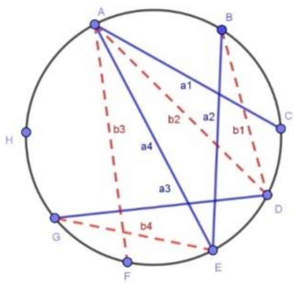
24.



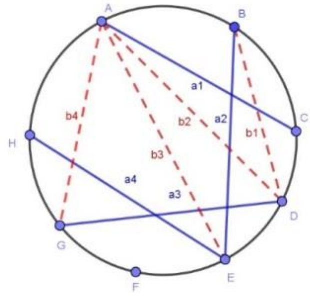
25.



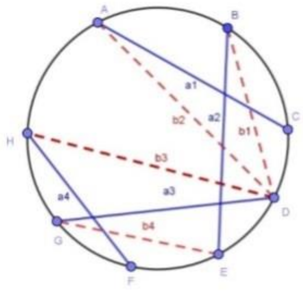
26.



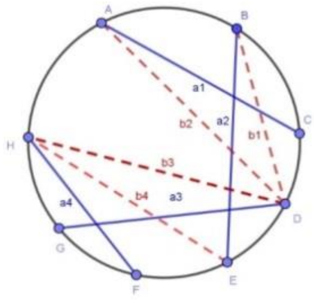
27.



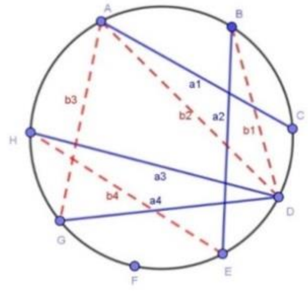
28.



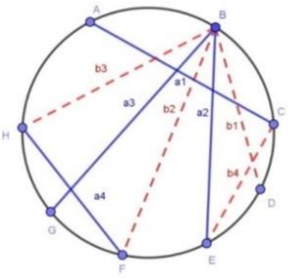
29.



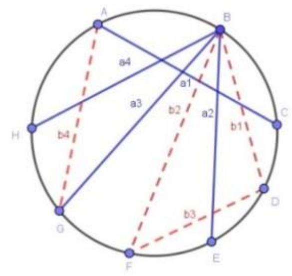
30.



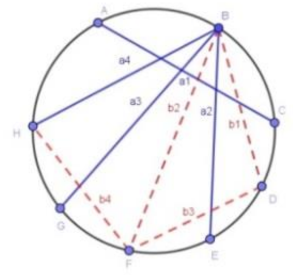
31.



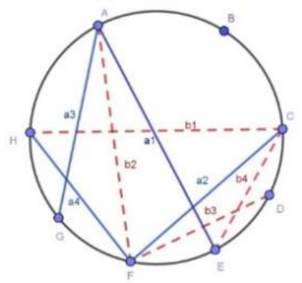
32.



33.

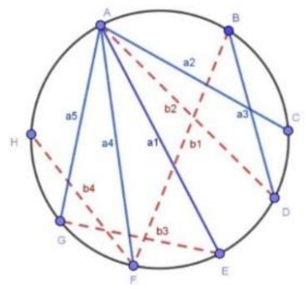


34.

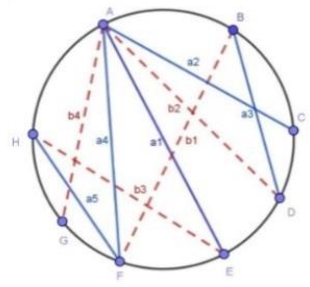


（4）九條連線

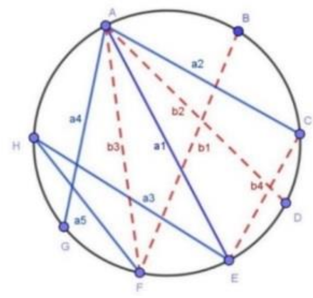
1.



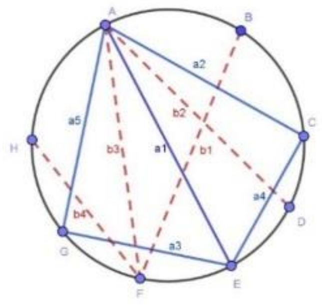
2.



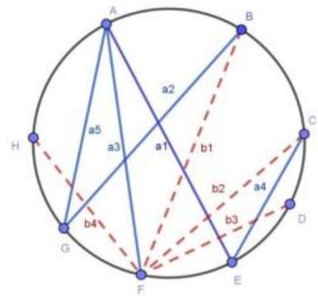
3.



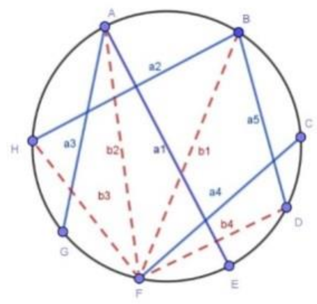
4.

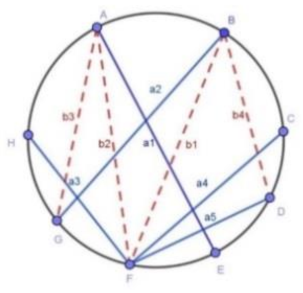
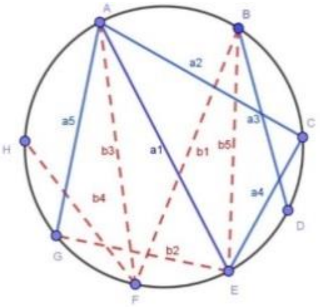
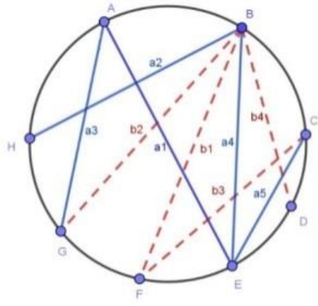
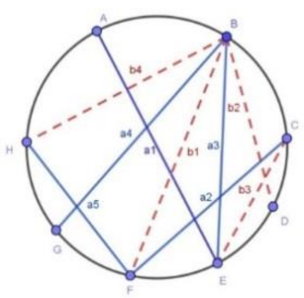
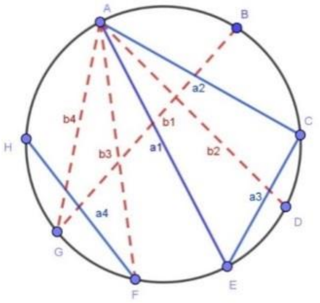
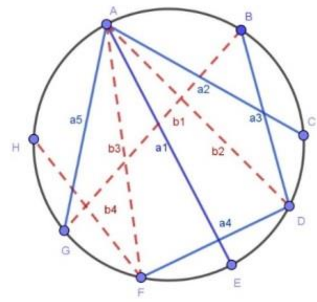
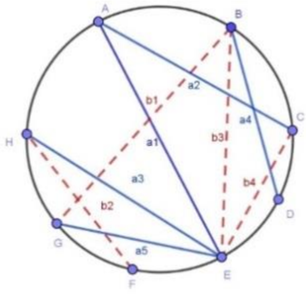
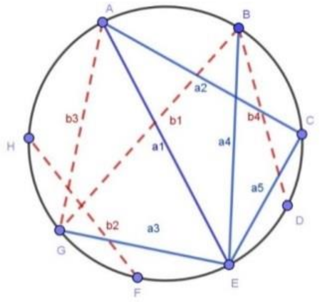
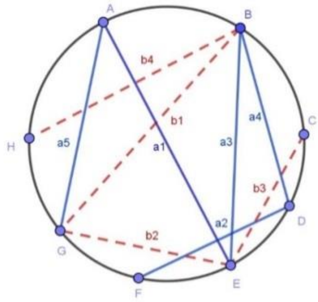
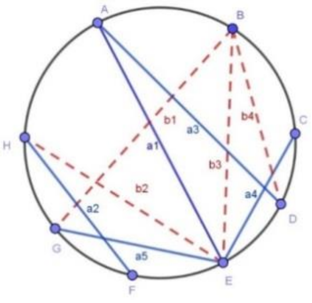
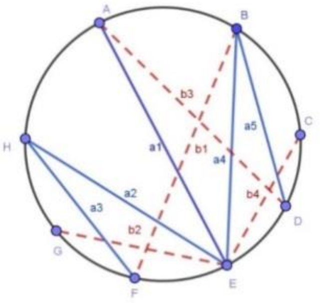
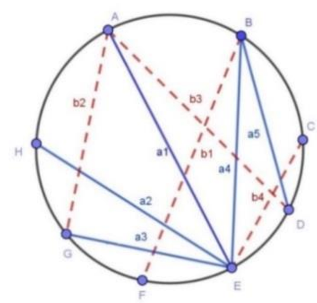
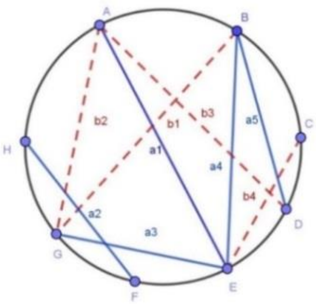
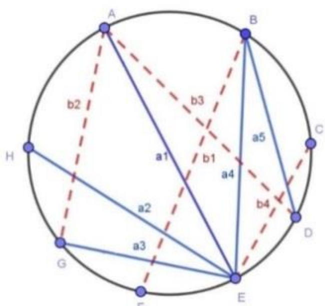
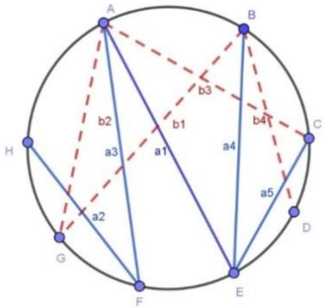


5.

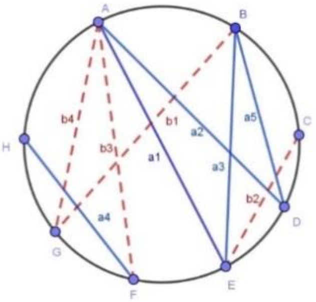


6.

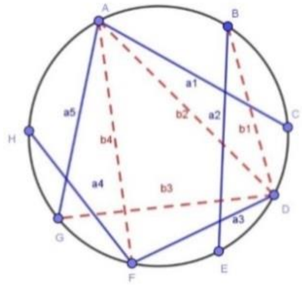


7. 	8. 	9. 
10. 	11. 	12. 
13. 	14. 	15. 
16. 	17. 	18. 
19. 	20. 	21. 

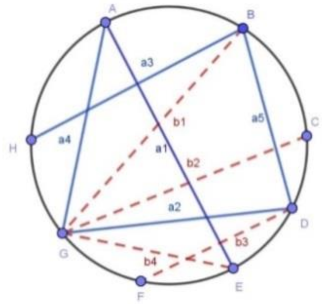
22.



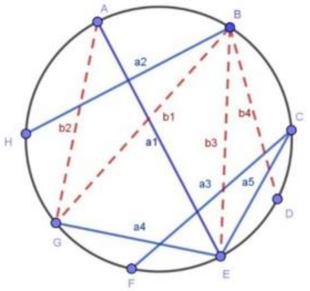
23.



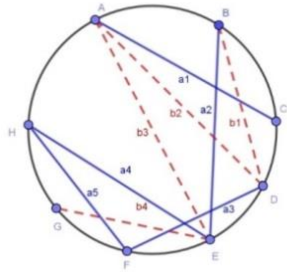
24.



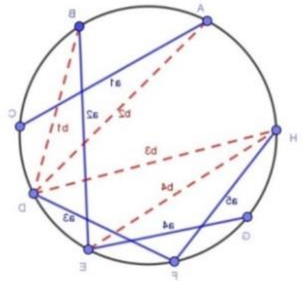
25.



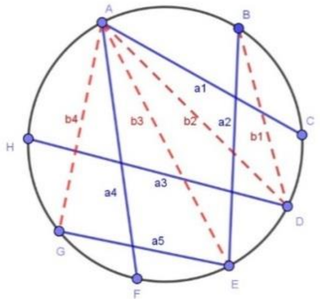
26.



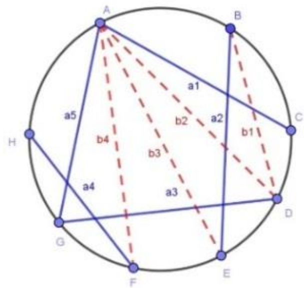
27.



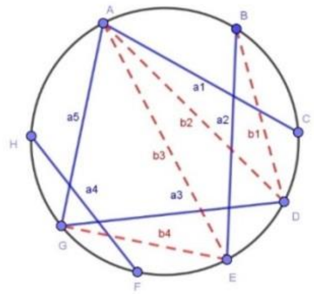
28.



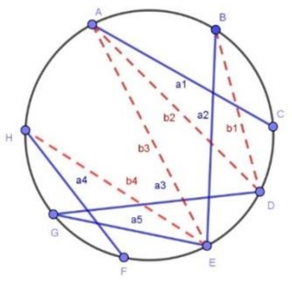
29.



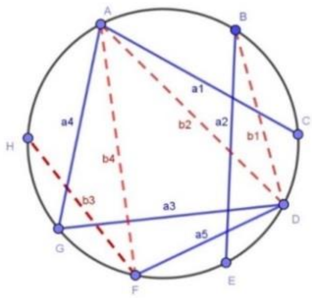
30.



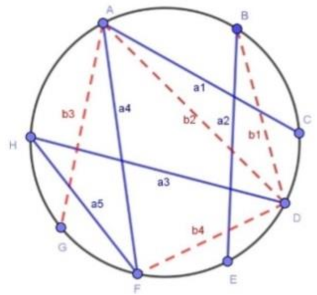
31.



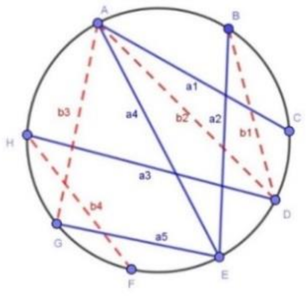
32.



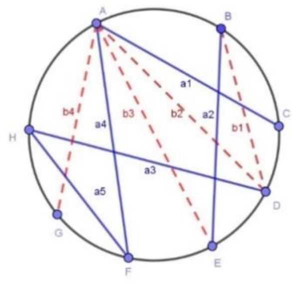
33.



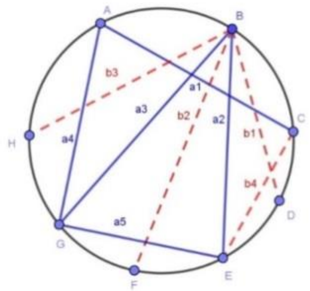
34.

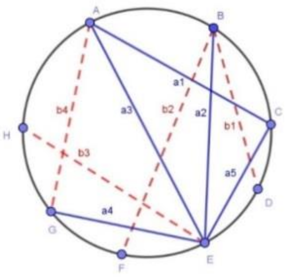
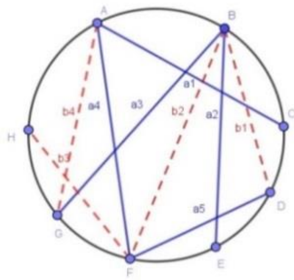
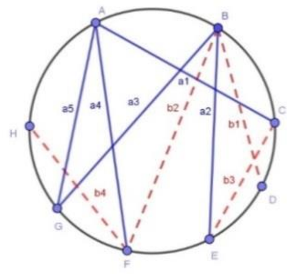
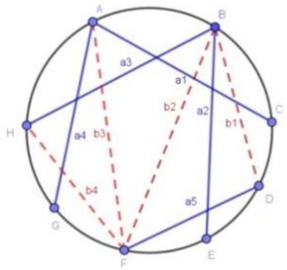
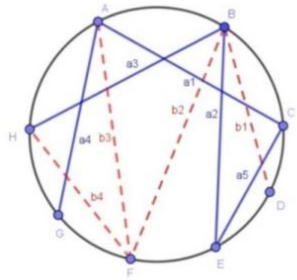
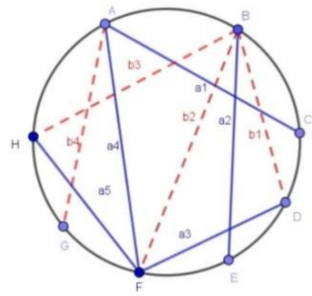
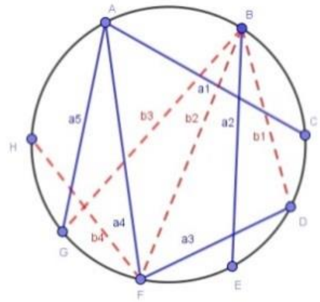
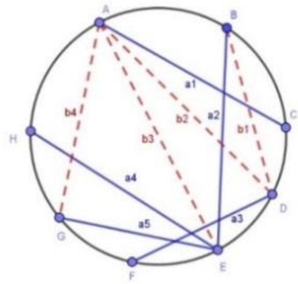
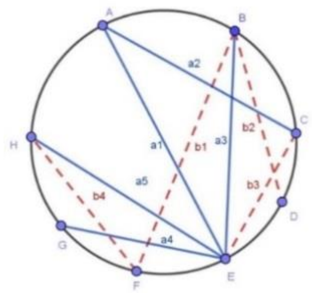


35.

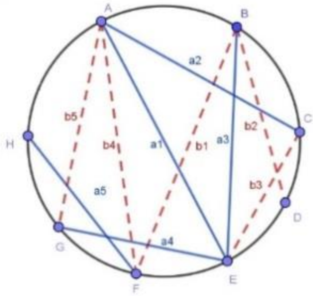
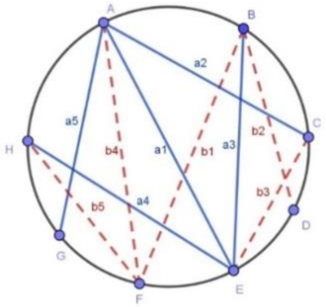
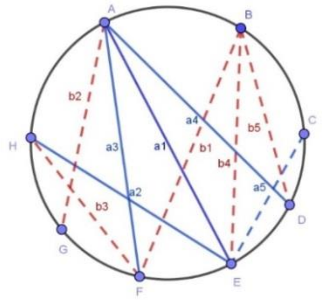


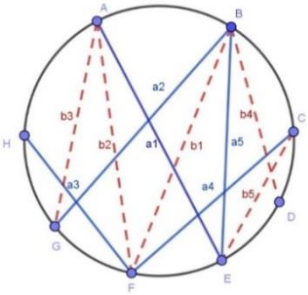
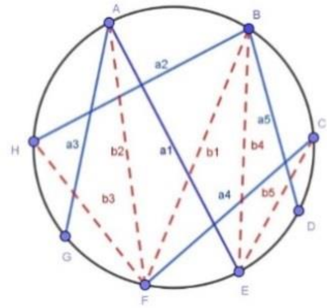
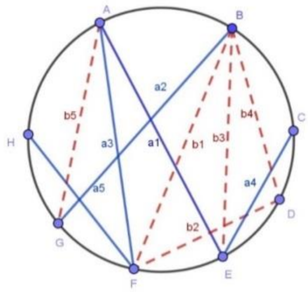
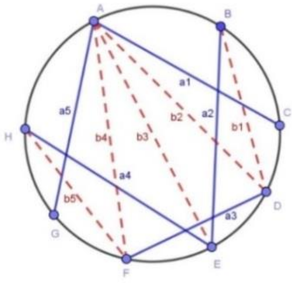
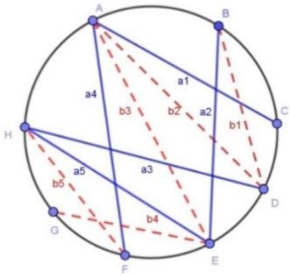
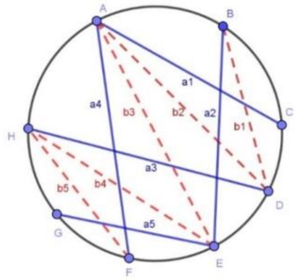
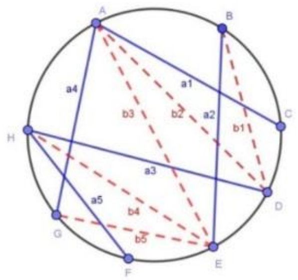
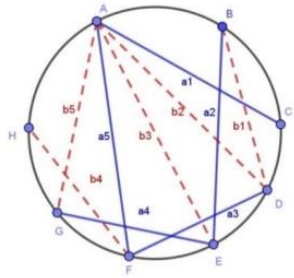
36.



37. 	38. 	39. 
40. 	41. 	42. 
43. 	44. 	45. 

（5）十條連線

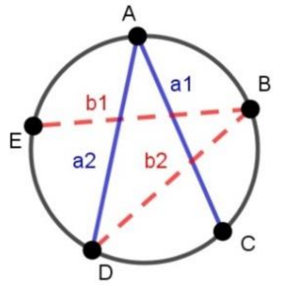
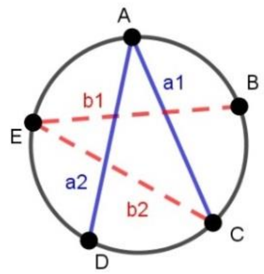
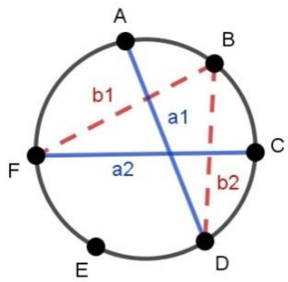
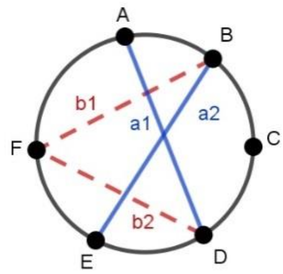
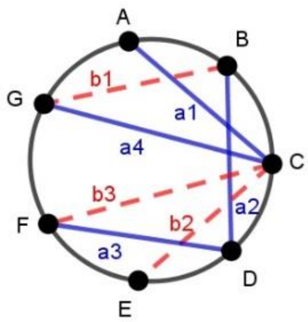
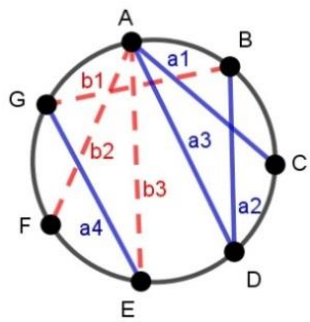
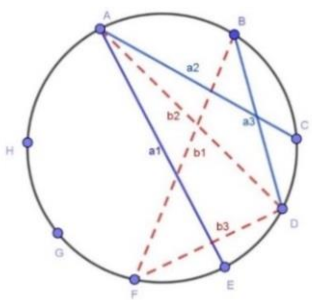
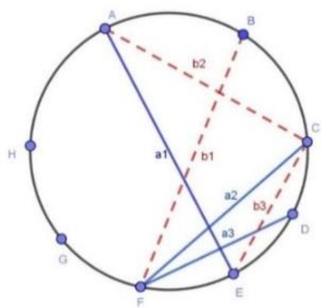
1. 	2. 	3. 

4. 	5. 	6. 
7. 	8. 	9. 
10. 	11. 	

以上為實際操作過後的所有圖形，為了方便後續討論與紀錄，故在後續的敘述中將稱 n=5 圖形之四條連線的第一個圖為 5-4-1，第二個圖則為 5-4-2，n=6 圖形之四條連線的第一個圖則為 6-4-1，依此類推。

伍、研究結果與討論

一、n 值相同時，圖形間的關聯

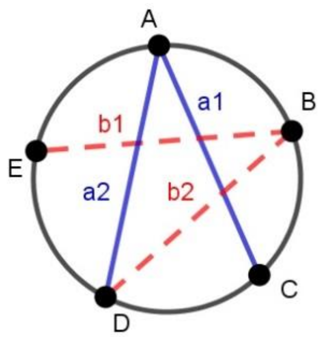
【5-4-1】 	【5-4-2】 
【6-4-4】 	【6-4-5】 
【7-7-2】 	【7-7-5】 
【8-6-1】 	【8-6-2】 

由上述整理表格之圖形發現，相同的 n 值會出現經由旋轉後而產生相同的圖形。例如：5-4-1 將 A 點逆時針轉至 E 點，圖形則與 5-4-2 相同。

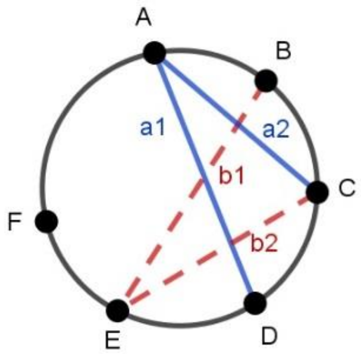
二、n 值不同時，圖形間的關聯

（一）5-4 圖形與 6-4 圖形之關聯

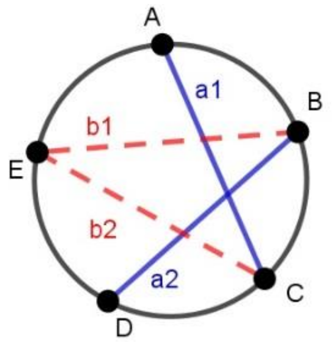
5-4-1



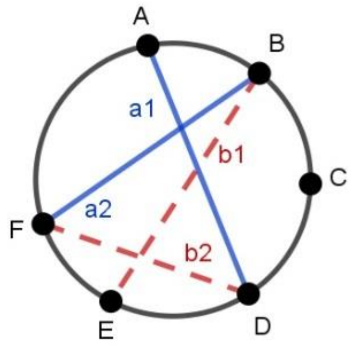
6-4-1



5-4-3

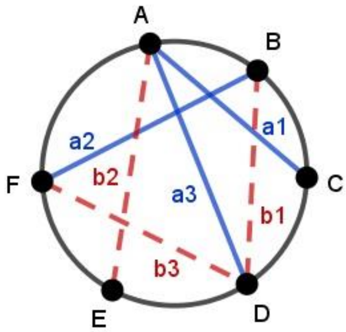


6-4-2

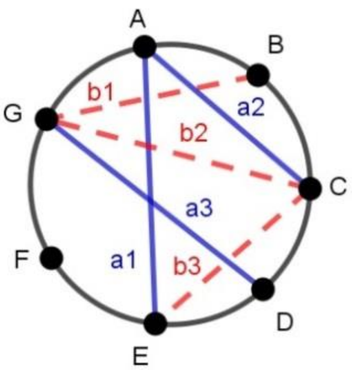


（二）6-6 圖形、7-6 圖形與 8-6 圖形之關聯

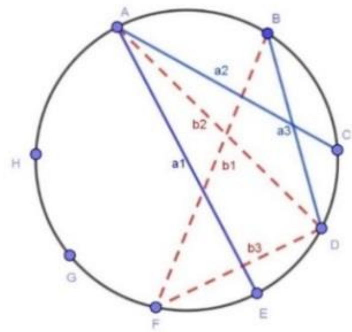
6-6-2



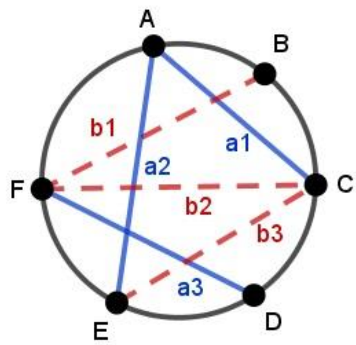
7-6-2



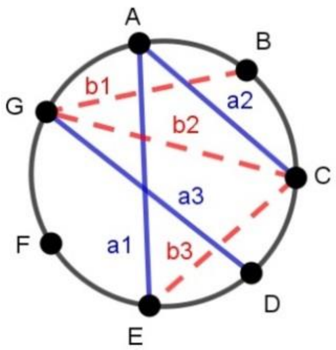
8-6-1



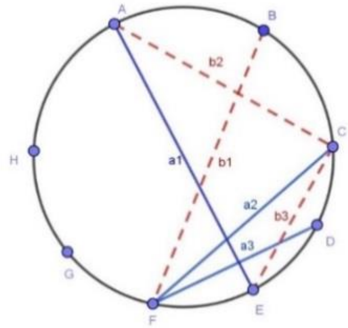
6-6-5

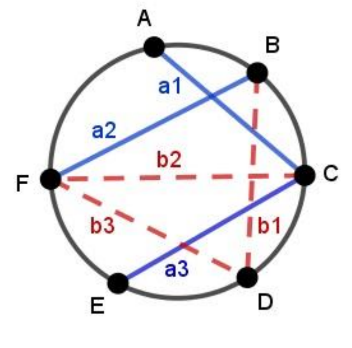
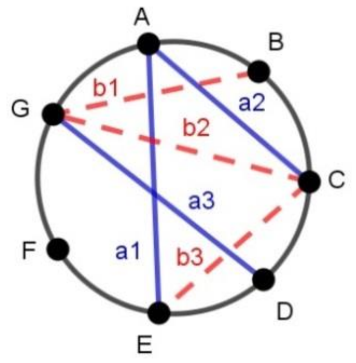
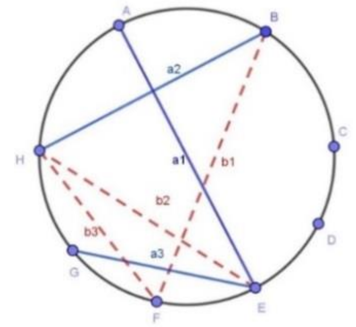
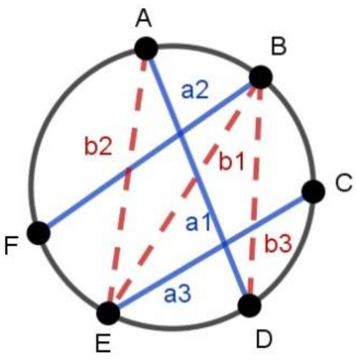
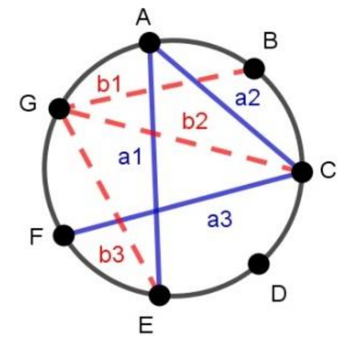
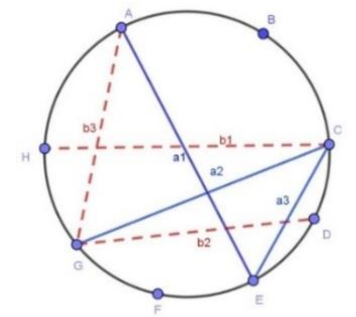
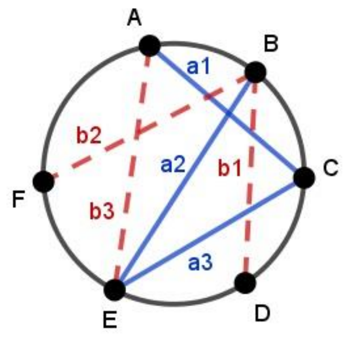
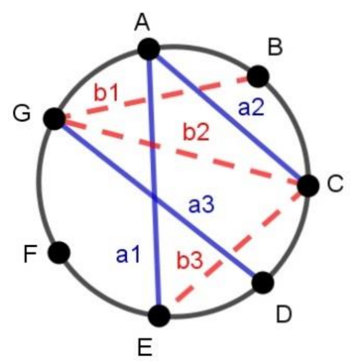
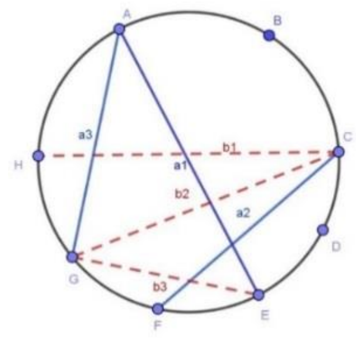
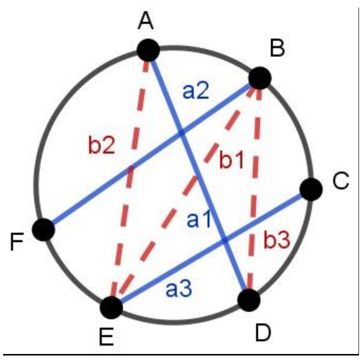
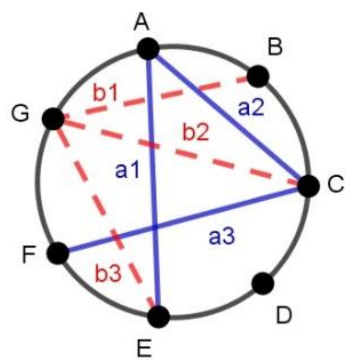
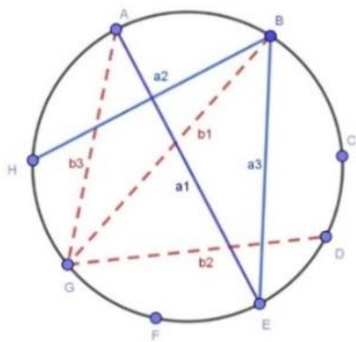


7-6-2

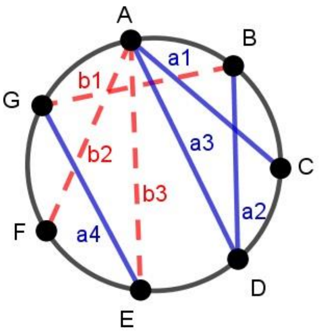
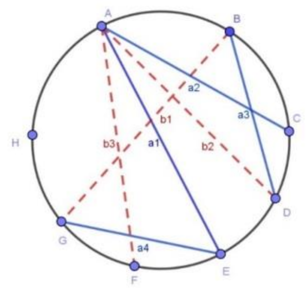
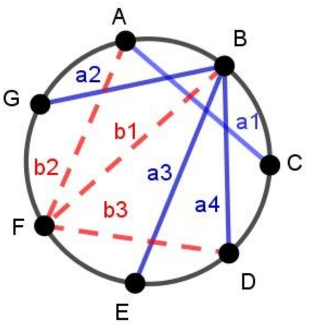
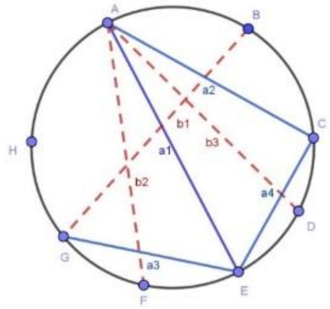
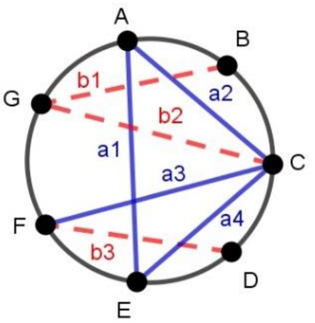
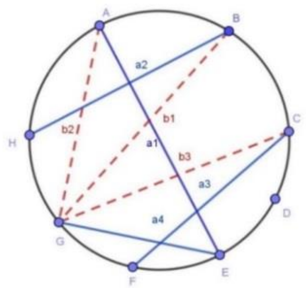


8-6-2



6-6-3 	7-6-2 	8-6-3 
6-6-6 	7-6-1 	8-8-6 
6-6-1 	7-6-2 	8-6-7 
6-6-6 	7-6-1 	8-6-8 

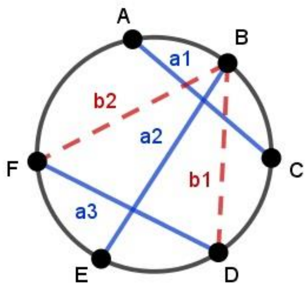
（三）7-7 圖形與 8-7 圖形之關聯

7-7-5 	8-7-1 
7-7-10 	8-7-2 
7-7-18 	8-7-7 

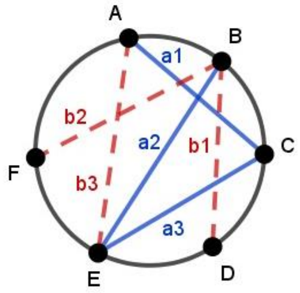
檢視以上表格所整理之各圖形，發現若使用的點數相同，會出現相同的圖形。例如：第（一）類型中，點數為 6 點的圖形有發生一點未使用，即缺點數為 1 時，與 5 點的四條連線出現相同之圖形。在第（二）類型中，點數為 7 點的圖形有一點未使用以及點數為 8 點之圖形有兩點未使用，皆可以出現與點數為 6 點的六條連線相同之圖形，第（三）類型之圖形亦以此模式類推而獲得相同之圖形。

三、截線與連線數之間的關聯

（一）六點圖形



【圖 6-5-1】



【圖 6-6-1】

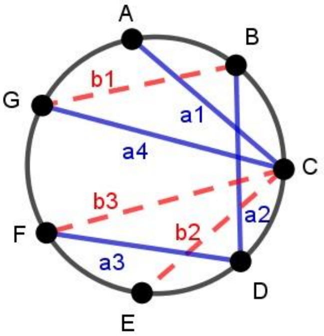
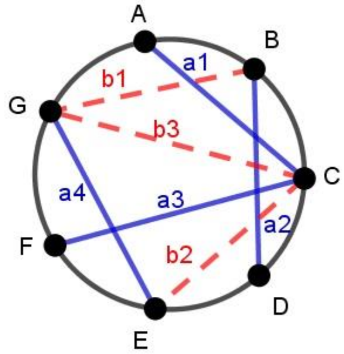
【圖 6-5-1】：此圖中共有五條線段（分別為 AC,BD,BE,BF 及 DF），其中，由 B 為起始點的三條連線分別為線段 BF,BE,BD，皆被過此三條連線的 AC 所截，而 DF 則為通過點 D 及點 F 且截 BE 之線段。

【圖 6-6-1】：此圖中共有六條線段（分別為 AC,AE,BD,BE,BF 及 CE），其中，由 B 為起始點的三條連線分別為線段 BF,BE,BD，皆被過此三條連線的 AC 所截，而另兩條線段，AE 及 CE 則分別與線段 BF 與 BD 交於一點。

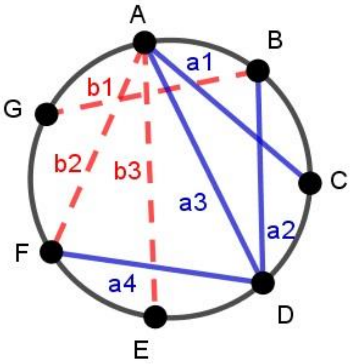
綜上所述，發現這兩種圖形皆有一個封閉三角形出現，但【圖 6-5-1】的截線未出現在三角形的邊上，而【圖 6-6-1】的截線則為 ΔACE 的 $\overline{AC}$ 邊。

（二）七點圖形

1.有截線

7-7-3	7-7-4
	

7-7-5



7-7-6

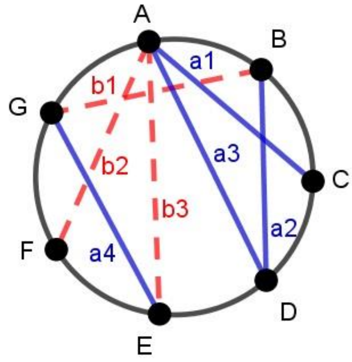
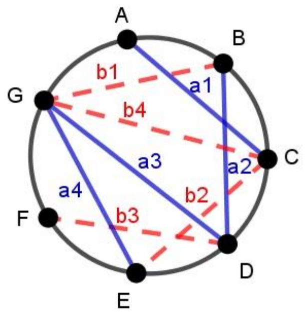


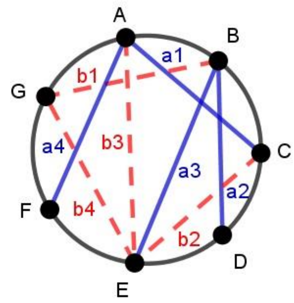
圖 7-7-3 之截線為線段 BD、C 點為起始點、截線開口方向向左，圖 7-7-4 之截線為線段 BD、C 點為起始點、截線開口方向向下，圖 7-7-5 之截線為線段 BG、A 點為起始點、截線開口方向向左，圖 7-7-6 之截線為線段 BG、A 點為起始點、截線開口方向向下，由上述可知，當點數為 7 點，同一起始點，截線相同時，會出現兩種相異的截線開口方向。

2.無截線

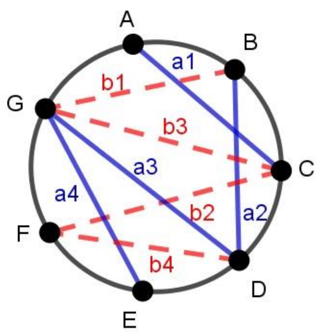
7-8-1



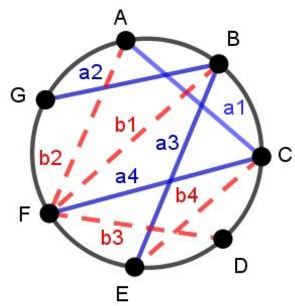
7-8-2



7-8-3



7-8-6

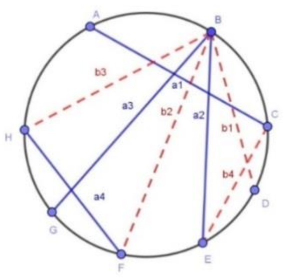
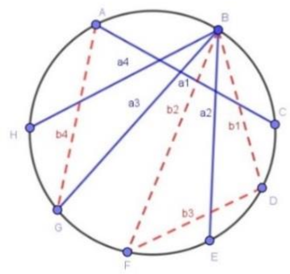
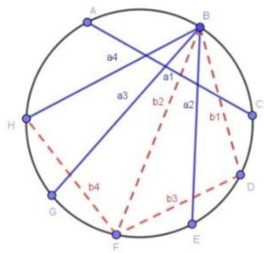


由上述可發現在點數為 7 個點之圖形，可找到一個點最多有四條的連線，由這四條線是否有被另一條線所截來判斷其總條數的奇偶數，若四條連線被截，其總條數為七條（奇

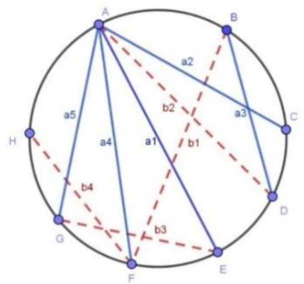
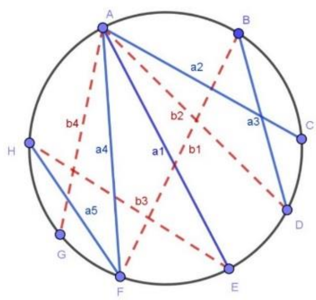
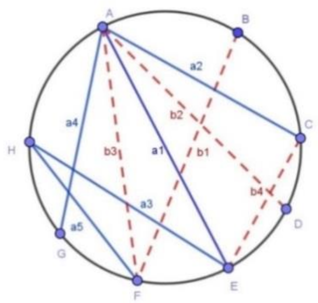
數）。

（三）八點圖形

1.有截線

8-8-31 	8-8-32 
8-8-33 	

2.無截線

8-9-1 	8-9-2 
8-9-3 	

觀察上述整理之圖形，可發現在點數為 8 個點中可找到一個點最多有五條的連線，由這五條連線是否有被另一條線所截來判斷其總條數的奇偶數，若五條連線被截，則總條數為八條（偶數）。

陸、結論

一、n 值相同時，圖形間的關聯

經實際操作後得知，在部分乍看之下不同的圖形中，有些只要經過旋轉即為同樣的圖形，例如：6 點圖形之四條連線的第 3 張及第 4 張圖，將圖 3 順時針旋轉兩個點即為圖 4，後續的 7 點圖形與 8 點圖形皆有出現此情形，如上圖所示。

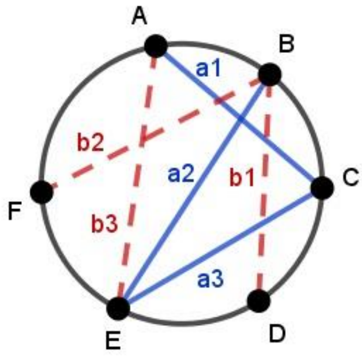
二、 n 值不同時，圖形間的關聯

由實作過程得知，n 的增加，圖形的變化亦會隨之增加，而在如此變化多端的圖形中，從中找出一些 n 值不同其圖形之間的關聯性。在 8-6（即 n=8 之六條連線）的八個圖形中，皆有一個共通點一每個圖形中都有兩個點是完全沒有與其他點連接的，即圖形只使用六個點進行相互連接，由此可發現，該情況與 6-6 的圖形有些相似，於是進一步將其圖形兩兩進行比較，發現有六個 8-6 的連線方式和 6-6 圖形的連線方式相同，兩者的差別只在於 8-6 圖形的圓上多出兩個未連接的點。同理，7-7 與 8-7 的圖形和 5-4 與 6-4 的圖形亦有此關係。

三、截線與連線數之間的關聯

從上述 n=6 的例子可得知，只要圖形中射線（即由某一點出現所有的連線數）的截線在圖形對稱軸以前，得到的連線段數總和為奇數，即為先手獲勝，反之，若圖形中射線的截線在圖形對稱軸以後，得到的連線段數總和為偶數，即為後手獲勝。但其中有一個特例，如下圖的【圖 6-1-1-1】，因為此圖中被截線所截的射線並不是封閉三角形的邊，因此在這個圖形中截線的規律並不成立。而其餘圖形中，截線規律皆成立。在 7 點及 8 點圖形中，整理、分類所有圖形後，可發現在 7 點圖形中若有一個點所連接的四條所有射線皆被同一條線所截，則連線段數之總和為七，但若射線沒有全部被截線所截，則連線段數之總和為八；而在 8 點

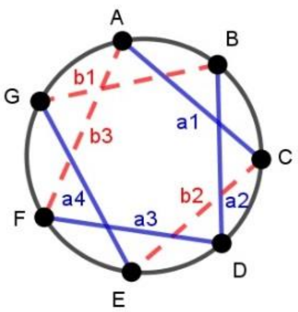
圖形中若有一個點所連接的五條所有射線皆被同一條線所截，則連線段數總和為八，但若射線沒有全部被截線所截，則連線段數總和為九，此敘述也恰好符合前述結論「在 7 點圖形中，若截線在對稱軸以前，連線段數之總和為奇數，反之，若截線在對稱軸以後，連線段數之總和為偶數。」。



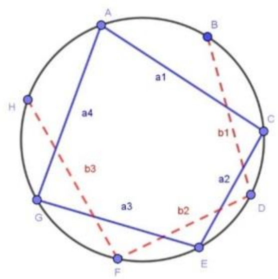
【圖 6-1-1-1】

柒、參考資料及其他

本研究，因時間之緣故，無法討論到遊戲作者所設計的 10 個點，實作過程中亦從 8 點的圖發現有一些未能遵循推論所得之結論進行解釋的狀況，此外，還有一些特例出現，例如:7 個點中只有一個圖非常罕見，如下圖【圖 7-7-1】，此為曾見過的七星形圖形，而在發現此狀況時，亦想知道點數為 8 個點時是否也會發生此種圖形，故以此形式嘗試完成【圖 8-7-12】，此圖形也是唯一使用八個點但卻出現只有七條連線的圖，研究過程中，一直希望可以找出先手或後手的必勝要素，倘若有機會再做更深入的研究，希望可以找出更多的必勝要件，亦可感受到作者當初設計這個遊戲的趣味性。



【圖 7-7-1】



【圖 8-7-12】

話說「交叉線」遊戲（2017）。http://j9981168.pixnet.net/blog/post/459392716