

嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：擲出我的幸福滿"杯"

～探討投擲筊杯的機率～

關鍵詞：筊杯 銅板 機率（最多三個）

編 號：

摘要

自古以來人類求神問卜，為了尋求神明的旨意，發展出許許多多的方法來和神明溝通。其中最神奇也是最廣為流傳的方法，就是投擲筊杯。透過一對(兩個)形狀像似新月的立體造型筊杯，丟擲於地上，並從筊杯的正、反相合之結果，來尋求心中的疑惑是否獲得神明的指示。

為了瞭解投擲筊杯的意義，以及筊杯所呈現的機率問題，透過實驗找出古老方法背後的科學依據，藉此解除人們對於投擲筊杯的迷思。我們發現，原先我們認為筊杯正、反兩面是不對稱的造型，而銅版的兩面幾近對稱，因此筊杯投擲出來的機率應該會與銅板所擲出來的機率有所差距。經過實驗後發現，在投擲筊杯或銅板的過程中，只要能夠維持固投擲方式，避免外在干擾，就能夠讓投擲出來的機率接近理論值。

壹、研究動機

每年過年陪奶奶到寺廟走春之時，奶奶總是懇求神明賜予一支運勢籤，奶奶說：「要向神明求取籤詩時，是有一定的程序，不是想抽就抽。」首先要先去籤筒抽出一支籤竹，然後到神明面前說明自己的身份，並把心中要請教神明的事情說清楚，接下來必須投擲筊杯，而且必須得到神明賜予連續三個聖杯，才能夠依照籤竹的編號去取籤詩。讓不禁對這一連串的複雜儀式，產生濃厚的興趣，想要揭開背後所隱藏的先人智慧結晶。

今年春節期間，家家戶戶團圓之時，茶餘飯後最熱門的話題，就是全台各宮廟舉行抽出國運籤詩的活動。雖然各個宮廟抽取國運籤的方式並不一樣，但是基本上都必須經過宮廟中主祀神明的同意，才算是完成國運籤的抽取。至於什麼方法才是獲得神明的同意呢？投擲筊杯就成為各個宮廟獲取神明旨意的最有效方法了。

聳動的新聞標題，吸引大家的目光。「南鯤鯓 357 年首度抽不出國運籤」，正當大家為國家未來的命運感到憂心之時，我對於 357 年首度無法抽出國運籤感到疑問。為什麼國運籤這麼難抽？要連續抽出 3 次聖杯有著麼困難嗎？再加上 60 次的機會，居然連一次抽出 3 聖杯的機會如此不容易，讓我想徹底了解，究竟這樣的機會到底是不是微乎其微。

投擲筊杯。看似簡單易懂的儀式，卻是神明與信徒之間溝通的重要工具。究竟筊杯到是在何時出現的？筊杯的結果是如何來決定的？筊杯的機率問題是不是可以透過計算方式來計算出來？國運籤無法抽取出來和筊杯之間的計算機率之間從在何種迷思？慢慢的疑惑出現在我的腦中。要如何釐清這團迷惑呢？我和幾位好朋友討論之後，決定透過這次的數學報告，上網搜尋資料，設計實驗問題，親自實驗，並和老師討論結果，來解開這些謎團。

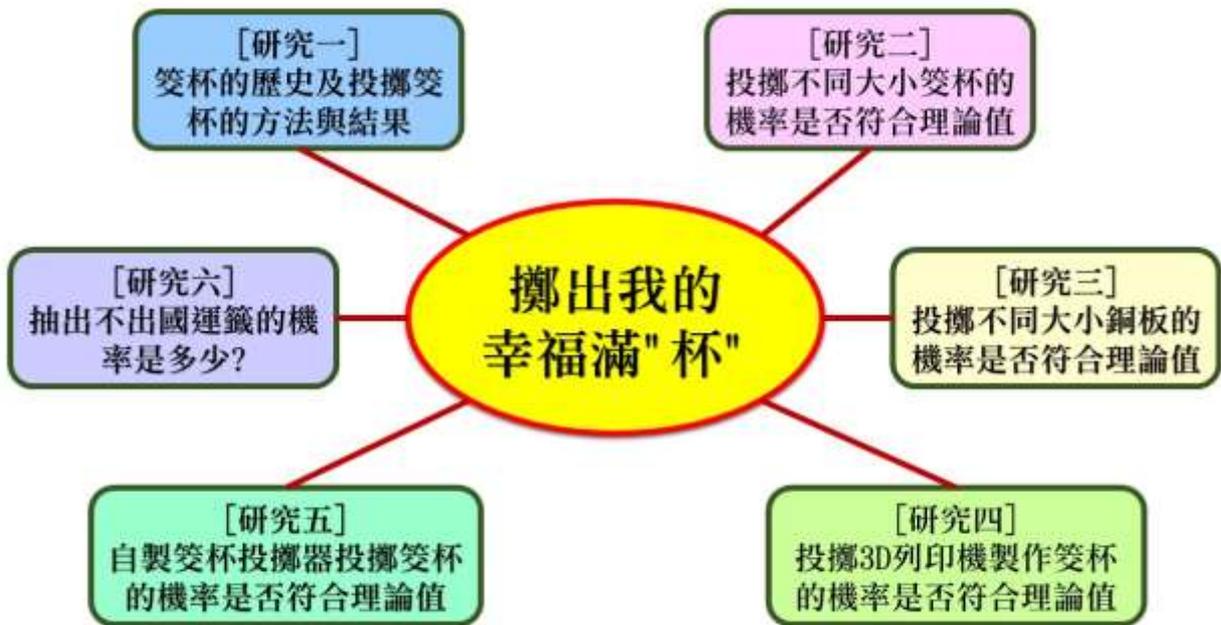
貳、研究計畫與目的

(一)實驗進度表

我們將這一次實驗的進度表列出，這樣一來就可以提醒我們在什麼時候該達到什麼目標，讓我們亦步亦趨，確實完成工作目標。

日期 工作項目	107年12月1日 107年12月15日	107年12月16日 107年12月31日	108年1月1日 108年1月27日	108年2月1日 108年2月28日	108年3月1日 108年3月15日	108年3月10日 108年3月17日
討論研究主題						
收集投擲筊杯的資料						
收集寺廟舉行國運籤的資料						
整理全部資料						
準備實驗材料						
學習實驗技巧						
正式進行實驗						
整理實驗數據						
完成書面資料						

(二)實驗概念圖



(三)研究目的

- 一、搜集資料，了解筊杯的由來與使用方法。
- 二、了解投擲筊杯的機率。
- 二、了解投擲銅板的機率。
- 三、3D 列印筊杯的投擲筊杯機率。
- 四、筊杯投擲器投擲筊杯、銅板和3D 列印筊杯的機率。
- 五、討論抽不出國運籤(60 次連續抽不出 3 次聖杯)的機率。

參、研究設備及器材

- 1.筊杯：大筊杯(長度 10.8cm、38.4g)、中筊杯(長度 8.6cm、22.3g)、小筊杯(長度 7.5cm、17g) 各一對。
- 2.銅板：50 元(直徑:28mm、10g)、10 元(直徑:26mm、7.5g)、5 元(直徑:22mm、4.4g)各一雙。
- 3.3D 列印筊杯一對(長度 8cm、7.2g)。
- 4.自製筊杯投擲器
- 5.計算機

肆、研究過程或方法

[研究一]：筊杯的歷史及投擲筊杯的方法與結果

[研究器材]：電腦、網路

[研究步驟]：

- 1.上網搜尋有關筊杯的歷史及投擲筊杯的方法
- 2.由組員相互分享所找到的資料
- 3.整理所搜尋到的資料

[研究結果]：

- 1.有關於文獻中記載人類最早求神問卜的資料源自於古代殷商時期，巫師用乾燥後的龜甲鑽洞燒灼後龜甲表面產生裂紋，等龜甲冷卻後，巫師再根據裂紋的形狀來判斷神明的旨意。這是甲骨文的由來，也是人類和神明之間溝通的記載。
- 2.古代在金屬製作的銅幣發明以前，民間多以天然形式的貝幣，做為流通交易的單位。由於取得方便且便於隨身攜帶，因此一般人

民逐漸習慣以投擲蚌殼，作為占卜的工具。不過蚌殼過於脆弱，投擲之時容易碎裂，於是原本的蚌殼逐漸演變為木製或竹製，至於形狀還是仿製蚌殼的外型，狀似月牙，這也是現今筊杯的由來。

- 3.筊杯為一雙立體月牙狀之木製占卜工具。凸面稱為陰面(反面)，平面稱為陽面(正面)。而現今筊杯的正、反面意義，來自於東漢時期的孝子丁蘭。丁蘭的母親以為丁蘭要打她，撞上一棵梨樹而亡，丁蘭為了紀念母親把砍下梨樹，將梨木雕刻成母親的樣貌作為紀念，這成了後人為祖先立牌位的典故。丁蘭還用梨木裁了兩塊有陰、陽面之木板，並且結合易經流傳下來的占卜概念，成為現在筊杯的起源。
- 4.投擲筊杯的結果將決定神明是否應允所求之事，因此必須了解筊杯會出現哪些結果。
①聖筊：筊杯呈現一陰一陽(一正一反)代表向神明祈求的事情，神明有許可。
②笑筊：筊杯呈現二陽(兩正，平面朝上)。代表神明對所祈求的事情不置可否，有可能是因為問題陳述不清或是神明認為機緣不足，也有可能是信眾對於問題自有主張，神明裁示何必多此一問。不過通常會解釋為神明主意未決，因此信眾可以換個問法再重新請神明重新請示。
③哭筊：筊杯呈現二陰(兩反，凸面朝上)，代表神明對於信眾所求的事情持否定的態度或對所求的事不應許。
④立筊：投擲筊杯後，杯筊未倒下而站立，稱為立筊。基本上這樣的狀況不容易出現，若出現「立筊」，則會被視為神蹟保留下來。

[研究討論]：

根據上述資料我們發現，筊杯出現的歷史若從殷商時期計算，至今約有三千餘年的歷史。若從東漢丁蘭削木占卜結合易經算起，也有千餘年的時光。因此用投擲筊杯的方式來探悉神明旨意，能夠一直流傳至今，自然有其值得令人敬服的地方。本次的研究單純從

筊杯的機率是否符合我們對於一般統計學上機率的設定，做一個數學上的分析探討，並不討論神明的意旨，是否對於投擲筊杯的結果有超感應能力的干擾。

回歸到筊杯的結果在機率上的表現來分析，一個筊杯有兩面，分別是正面(平面)與反面(凸面)，每次投擲兩個筊杯後出現的結果是：正正，正反，反正，反反。因此正正出現的理論擲機率應該 $\frac{1}{4}$ 、正反出現的機率是 $\frac{1}{2}$ ，反反出現的機率是 $\frac{1}{4}$ 。所以我們決定在下一個實驗中使用不同大小的筊杯來測試，是不是筊杯出現的機率符合上述的理論值。

[研究二]：投擲不同大小筊杯的機率是否符合理論值

[研究器材]：大筊杯(長度 10.8cm)、中筊杯(長度 8.6cm)、小筊杯(長度 7.5cm) 各一對。

[研究步驟]：

- 1.將大筊杯平放置於桌上，使用 30 公分長尺將筊杯推落桌下(高度 75 公分)。
- 2.將結果記錄於表格內，並重複 99 次。
- 3.將大筊杯更換為中筊杯及小筊杯，重複步驟 1 及步驟 2。

[研究結果]：紅色-高於理論值，藍色-低於理論值

	理論值	大筊杯		中筊杯		小筊杯		平均
笑杯(正、正)	25%	30	30%	29	29%	20	20%	26.3%
聖杯(正、反)	50%	52	52%	48	48%	54	54%	51.3%
哭杯(反、反)	25%	18	18%	23	23%	26	26%	22.3%

	理論值	大筊杯		中筊杯		小筊杯		平均
正面	50%	112	56%	106	53%	94	47%	52%
反面	50%	88	44%	94	47%	106	53%	48%

[研究討論]：

- 1.大筊杯(30%)、中筊杯(29%)擲出笑杯的機率高於理論值(25%)，而小筊杯(20%)擲出笑杯的機率低於理論值(25%)。全部筊杯投擲次數合計300次，其中投擲笑杯的機率为26.3%，與理論值(25%)接近。
- 2.大筊杯(18%)、中筊杯(23%)擲出哭杯的機率低於理論值(25%)，而小筊杯(26%)擲出哭杯的機率高於理論值(25%)。全部筊杯投擲哭杯的機率为22.3%，低於理論值(25%)。
- 3.大筊杯(52%)、小筊杯(54%)擲出聖杯的機率高於理論值(50%)，而中筊杯(48%)擲出聖杯的機率低於理論值(50%)。全部筊杯投擲聖杯的機率为51.3%，相當接近理論值(50%)。
- 4.為了進一步確認投擲筊杯的準確性是否符合統計學上的機率，我們在投擲筊杯時也統計了單支筊杯出現正、反面的結果並加以統計，結果我們發現，大筊杯(56%)、中筊杯(53%)出現正面的機率高於理論值(50%)，小筊杯(47%)出現正面的機率低於理論值(50%)；大筊杯(44%)、中筊杯(47%)出現反面的機率低於理論值(50%)，小筊杯(53%)出現反面的機率高於理論值(50%)。
- 5.將三種大小的筊杯出現正反面的機率加總，等同我們投擲一支筊杯600次，其結果應該要接近理論值(50%)，實驗結果正面出現的機率是(52%)，反面出現的機率是(48%)，和單獨計算各個筊杯的正反面機率相比，三種大小筊杯加總計算正反面機率，更接近理論值(50%)。這也說明實驗時增加投擲的次數，統計的機率會更增加接近理論值。

[研究三]：投擲不同大小銅板的機率是否符合理論值

[研究器材]：50 元(直徑:28mm、10g)、10 元(直徑:26mm、7.5g)、5 元(直徑:22mm、4.4g)各 2 枚。

[研究步驟]：

- 1.將 50 元銅版 2 枚平放置於桌上，使用 30 公分長尺將銅版推落桌下(高度 75 公分)。
- 2.將結果記錄於表格內，並重複 99 次。
- 3.將 50 元銅板更換為 10 元銅板及 5 元銅板，重複步驟 1 及步驟 2。

[研究結果]：紅色-高於理論值，藍色-低於理論值

	理論值	50 元銅板		10 圓銅板		5 元銅板		平均
笑杯(正、正)	25%	25	25%	30	30%	27	27%	27.3%
聖杯(正、反)	50%	53	53%	44	44%	53	53%	50%
哭杯(反、反)	25%	22	22%	26	26%	20	20%	22.7%

	理論值	50 元銅板		10 圓銅板		5 元銅板		平均
正面	50%	103	51.5%	104	52%	107	53.5%	52.3%
反面	50%	97	48.5%	96	48%	93	46.5%	47.7%

[研究討論]：

- 1.50 元銅板出現笑杯的機率剛好是 25%，與理論值(25%)相同。10 元銅板(30%)及 5 元銅板(27%)擲出笑杯的機率高於理論值(25%)。全部銅板投擲出笑杯的機率為(27.3%)，略高於理論值的(25%)。
- 2.50 元銅板(22%)及 5 元銅板(20%)擲出哭杯的機率低於理論值(25%)，而 10 元銅板(26%)擲出哭杯的機率略高於理論值(25%)。全部銅板投擲哭

杯的機率為 22.7%，低於理論值的 25%。

3.50 元銅板(53%)及 5 元銅板(53%)擲出聖杯的機率高於理論值(50%)，而 10 元銅板(44%)擲出聖杯的機率低於理論值(50%)。全部筊杯投擲聖杯的機率 50%，與理論值的 50%一模一樣，真是太令人訝異了。

4.同樣為了檢測投擲銅板的機率是否符合統計學上的機率，我們在投擲銅板時也統計了每一次銅板出現正反面的結果並加以統計，結果我們發現，50 元銅板(51.5%)、10 元銅板(52%)及 5 元銅板(53.5%)出現正面的機率稍稍高於理論值 50%。50 元銅板(48.5%)、10 元銅板(48%)及 5 元銅板(46.5%)出現正面的機率稍稍低於理論值 50%。

5.將三種大小的銅板出現正反面的次數總共 600 百次的次數加以計算，我們發現，其正、反面的結果應該要接近理論值 50%，實驗結果正面出現的機率是 52.3%，反面出現的機率是 47.7%，是與理論值接近。

6.將大、中、小三種筊杯出現正面(52%)及反面(48%)的機率與 50 元、10 元、5 元銅板出現正面(52.3%)及反面(47.7%)的機率相比，投擲筊杯居然比投擲銅板的機率更接近 50%，正是我們始料未及。一開始，我們認為筊杯的形狀不夠對稱，不是一個完美的正反面相對稱的構造，不像銅板兩面的差別微乎其微，所以在投擲筊杯時容易因筊杯重心不穩而出現正、反面機率落差懸殊的差別。可是在經過筊杯與銅板各 600 次的投擲之後，筊杯居然還比銅板更接近理論值 50%，讓我們不禁對於傳統中國人的智慧，有了另一番看法。

7.筊杯是由古時錢幣-貝幣演變而來的，因為貝幣是當時民間普遍容易取的擲杯材料。現今的錢幣雖然已經不再是貝幣而是銅幣，可是用來當成擲杯工具的功能依舊被保留下來。例如許多運動賽事在決定發球權時，都是用擲銅板來決定。甚至在祭拜先人時，探問先人的意向時，也是用銅板來決定的，因此銅板也是擲杯的材料之一，所以我們也將

銅板放入研究中。

[研究四]：投擲 3D 列印筴杯的機率是否符合理論值

[研究器材]：3D 列印筴杯一對(長度 8cm)

[研究步驟]：

- 1.將 3D 列印筴杯平放置於桌上，使用 30 公分長尺將銅版推落桌下(高度 75 公分)。
- 2.將結果記錄於表格內，並重複 99 次。

[研究結果]：紅色-高於理論值，藍色-低於理論值

	理論值	3D 列印筴杯	
笑杯(正、正)	25%	35	35%
聖杯(正、反)	50%	45	45%
哭杯(反、反)	25%	20	20%

	理論值	3D 列印筴杯	
正面	50%	115	57.5%
反面	50%	85	42.5%

[研究討論]：

- 1.自製 3D 列印筴杯(35%)的投擲結果笑杯的機率是高於理論值(25%)；哭杯的機率(20%)低於理論值(25%)；聖杯的機率是(45%)低於理論值(50%)。分析結果發現，3D 列印筴杯的材質為熱塑性塑料，重量為 7.2g。而傳統竹製的小筴杯(長度 7.5 公分)，重量為 17g。3D 列印筴杯的重量幾乎是傳統筴杯重量的一半，是否因此而導致在投擲 3D 列印筴杯時，筴杯碰撞不均勻而產生結果的差異，有待我們進一步的實驗驗證。
- 2.在統計 3D 列印筴杯投擲結果的正反面次數時，我們也發現兩者之間的差距有明顯的差距，正面出現 115 次而反面只出現 85 次，兩者差距達 30 次之多。是目前所有實驗中與理論值差異最大的一次，我們

推測 3D 列印筊杯，也許因為材質影響筊杯的重量，讓筊杯的機率無法達到理論值，不過，這還是需要進一步的實驗來驗證。

[研究五]：自製筊杯投擲器投擲筊杯的機率是否符合理論值

[研究器材]：

- 1.小筊杯(長度 7.5cm) 一對。
- 2.10 元銅板(直徑:26mm、7.5g)1 雙。
- 3.3D 列印筊杯一對(長度 8cm)。
- 4.自製筊杯投擲器



[研究步驟]：

- 1.將小筊杯平放置於自製筊杯投擲器上，按下開關使小筊杯自由地落於地面上(高度 75 公分)。
- 2.將結果記錄於表格內，並重複 99 次。
- 3.將小筊杯更換為 10 元銅板及 3D 列印筊杯一對，重複步驟 1 及步驟 2。

[研究結果]：

	理論值	小筊杯		10 元銅板		3D 列印筊杯		平均
笑杯(正、正)	25%	30	30%	29	29%	42	42%	33.7%
聖杯(正、反)	50%	45	45%	42	42%	44	44%	43.7%
哭杯(反、反)	25%	25	25%	29	29%	14	14%	22.7%

	理論值	小筊杯		10 元銅板		3D 列印筊杯		平均
正面	50%	105	52.5%	100	50%	128	64%	55.5%
反面	50%	95	47.5%	100	50%	72	36%	44.5%

[研究討論]：

- 1.小筊杯(30%)、10 元銅板(29%)及 3D 列印筊杯(42%)擲出笑杯的機率皆高於理論值(25%)，其中 3D 列印筊杯擲出笑杯的機率還高達(42%)。全部擲杯材料擲笑杯的機率為 33.7%，高出理論值的(25%)甚多。
- 2.10 元銅板擲(29%)出哭杯的機率高於理論值(25%)；而 3D 列印筊杯(14%)擲出哭杯的機率 14%低於理論值非常多；不過小筊杯擲出的機率(25%)剛好符合哭杯的理論值(25%)。全部筊杯投擲哭杯的機率為 22.7%，低於理論值的(25%)。
- 3.小筊杯(45%)、10 元銅板(42%)及 3D 列印筊杯(44%)擲出聖杯的機率皆低於理論值(50%)。全部筊杯投擲聖杯的機率(43.7%)，略低於理論值的(50%)。
- 4.為了檢測投擲筊杯的機率是否符合統計學上的機率，我們在投擲筊杯時也統計了出現正、反面的結果並加以統計，結果我們發現，小筊杯(52.5%)、3D 列印筊杯(64%)正面的機率高於理論值(50%)，其中 3D 列印還出現 128 次的正面，超出理論上 100 次多達 28 次之多。至於 10 元銅板雖然在聖杯的表現與理論值有稍稍的差別，不過在正反面的統計次數上，達到正面 100 次反面 100 次的完美紀錄，稍稍加強大家的信心。
- 5.將三種工具出現正反面的機率加總，等同我們投擲一支筊杯 600 次，其結果應該要接近理論值 50%，實驗結果正面出現的機率是(55.5%)，反面出現的機率是(44.5%)，正反面機率有稍稍地接近理論值。讓我們原本對於投擲結果沒有信心，稍微打了一劑強心針。
- 6.我們製作筊杯投擲器的原因在於想減少人為投擲筊杯時的外在干擾。不過實驗結果我們卻發現，在比較相同工具(小筊杯、10 元硬幣及 3D 列印筊杯)在人工投擲及機械投擲上的機率差別，人工投擲的機率居

然較接近理論值。相對地，由機械所投擲出的機率，與理論值有段差距。

7.雖然筊杯投擲器所投出的機率與理論值相差較大，不過我們相信筊杯投擲器確實有可以有效減少人為對於投擲時操作上的干擾，更符合公平公正的原則。

[研究六]：抽出不出國運籤的機率是多少？

[研究器材]：計算機

[研究結果]：

1.以南部某宮廟抽出國運籤的過程為例：籤筒內有 60 支籤，首先抽出一支籤竹，然後投擲筊杯來請示主祀神明指示，因此必須連續三次聖杯才算是獲得認可的過運籤。

代入筊杯的機率的理論值 正面： $\frac{50}{100}$ 反面： $\frac{50}{100}$

一次聖杯的機率是：

$$1 - \text{笑杯的機率} - \text{哭杯的機率} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 - 0.5 = 0.5$$

三次聖杯的機率是： $0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.125$

連續三次不通過的機率是 $1 - \text{三次聖杯通過的機率}$

$$= 1 - 0.125 = 0.875$$

60 支籤 都不通過的機率是 $(0.875)^{60} = 0.00033149973177251885$

$$= \frac{3.3}{10000}$$

2.代入大筊杯的機率正面: $\frac{56}{100}$ 反面: $\frac{44}{100}$

一次聖杯的機率是:

$$\begin{aligned} 1 - \text{笑杯的機率} - \text{哭杯的機率} &= 1 - \frac{56}{100} \times \frac{56}{100} - \frac{44}{100} \times \frac{44}{100} \\ &= 1 - 0.3136 - 0.1936 = 0.4928 \end{aligned}$$

連續三次聖杯的機率是: $0.4928 \times 0.4928 \times 0.4928 = 0.11967739$

連續三次不通過的機率是 $1 - 0.11967739 = 0.88032261$

60 支籤 都不通過的機率是 $(0.88032261)^{60} = 0.0004769923117353289$

$$= \frac{4.8}{10000}$$

3.代入中筊杯的機率正面: $\frac{53}{100}$ 反面: $\frac{47}{100}$

一次聖杯的機率是:

$$\begin{aligned} 1 - \text{笑杯的機率} - \text{哭杯的機率} &= 1 - \frac{53}{100} \times \frac{53}{100} - \frac{47}{100} \times \frac{47}{100} \\ &= 1 - 0.2809 - 0.2209 = 0.4982 \end{aligned}$$

連續三次聖杯的機率是: $0.4982 \times 0.4982 \times 0.4982 = 0.12365485$

連續三次不通過的機率是 $1 - 0.12365485 = 0.87634515$

60 支籤 都不通過的機率是 $(0.87634515)^{60} = 0.0003635057190580687$

$$= \frac{3.6}{10000}$$

4.代入小笈杯的機率正面: $\frac{47}{100}$ 反面: $\frac{53}{100}$

一次聖杯的機率是:

$$1 - \text{笑杯的機率} - \text{哭杯的機率} = 1 - \frac{47}{100} \times \frac{47}{100} - \frac{53}{100} \times \frac{53}{100} \\ = 1 - 0.2209 - 0.2809 = 0.4982$$

連續三次聖杯的機率是: $0.4982 \times 0.4982 \times 0.4982 = 0.12365485$

連續三次不通過的機率是 $1 - 0.12365485 = 0.87634515$

60 支籤 都不通過的機率是 $(0.87634515)^{60} = 0.0003635057190580687$

$$= \frac{3.6}{10000}$$

5.代入 3D 印製笈杯的機率正面: $\frac{57.5}{100}$ 反面: $\frac{42.5}{100}$

一次聖杯的機率是:

$$1 - \text{笑杯的機率} - \text{哭杯的機率} = 1 - \frac{57.5}{100} \times \frac{57.5}{100} - \frac{42.5}{100} \times \frac{42.5}{100} \\ = 1 - 0.330625 - 0.180625 = 0.48875$$

連續三次聖杯的機率是: $0.48875 \times 0.48875 \times 0.48875 = 0.11675092$

連續三次不通過的機率是 $1 - 0.11675092 = 0.88324908$

60 支籤 都不通過的機率是 $(0.88324908)^{60} = 0.0005820919918836984$

$$= \frac{5.8}{10000}$$

6.代入筊杯投擲器投擲小筊杯的機率正面: $\frac{52.5}{100}$ 反面: $\frac{47.5}{100}$

一次聖杯的機率是:

$$\begin{aligned} 1 - \text{笑杯的機率} - \text{哭杯的機率} &= 1 - \frac{52.5}{100} \times \frac{52.5}{100} - \frac{47.5}{100} \times \frac{47.5}{100} \\ &= 1 - 0.275625 - 0.225625 = 0.49875 \end{aligned}$$

連續三次聖杯的機率是: $0.49875 \times 0.49875 \times 0.49875 = 0.12406484$

連續三次不通過的機率是 $1 - 0.12406484 = 0.87593516$

60 支籤 都不通過的機率是 $(0.88324908)^{60} = 0.000353441511061058$

$$= \frac{3.5}{10000}$$

7.代入筊杯投擲器投擲 3D 印製筊杯的機率正面: $\frac{64}{100}$ 反面: $\frac{36}{100}$

一次聖杯的機率是:

$$\begin{aligned} 1 - \text{笑杯的機率} - \text{哭杯的機率} &= 1 - \frac{64}{100} \times \frac{64}{100} - \frac{36}{100} \times \frac{36}{100} \\ &= 1 - 0.4096 - 0.1296 = 0.4608 \end{aligned}$$

連續三次聖杯的機率是: $0.4608 \times 0.4608 \times 0.4608 = 0.09784472$

連續三次不通過的機率是 $1 - 0.09784472 = 0.90215528$

60 支籤 都不通過的機率是 $(0.90215528)^{60} = 0.0020743293599119997$

$$= \frac{20.7}{10000}$$

[研究討論]：

	理論值	人工投擲				機器投擲	
		大筊杯	中筊杯	小筊杯	3D 列印筊杯	小筊杯	3D 列印筊杯
正面機率	50%	56%	53%	47%	57.5%	52.5%	64%
反面機率	50%	44%	47%	53%	42.5%	47.5%	36%
10000 年發生 機率	3.3	4.8	3.6	3.6	5.8	3.5	20.7

- 1.依照理論值計算，60 支籤都抽不出連續三聖杯的機率是 3.3/10000，也就是說一萬年可能會發生 3.3 次，換句話說，將近 3000 年就會發生一次這種狀況。回應到[研究一]中有關於筊杯的研究，筊杯發明至今約三千餘年，今年發生抽不出國運籤，應該可以算是在合理範圍之內。
- 2.將本次實驗的各項數據，代入推算[抽不出國運籤]的算式中，我們發現當筊杯正面與筊杯反面機率的差異越大，10000 年抽不出國運籤的機率就會越大，代表發生的次數增加。例如當我們代入由筊杯投擲器投擲 3D 列印筊杯的機率，結果發現 10000 年抽不出國運籤的機率居然高達將近 21 次，平均不到 500 年就會發生一次抽不出國運籤。
- 3.機率的計算往往是許多數字的多次相乘而得的積，因此稍稍不起眼的數字改變，在連續的相乘下數字就會變得差距很大。例如連續 0.87593516 的 60 次方和 0.90215528 的 60 次方，讓原本 0.02622012 的差距，立刻變為 0.0017208878489。

伍、研究結果與討論

1. 投擲筊杯出現的狀況有①聖筊：筊杯呈現一陰一陽(一正一反)代表向神明祈求的事情，神明有許可。②笑筊：筊杯呈現二陽(兩正，平面朝上)。代表神明對所祈求的事情不置可否。③哭筊：筊杯呈現二陰(兩反，凸面朝上)，代表神明對於信眾所求的事情持否定的態度。④立筊：投擲筊杯後，杯筊未倒下而站立，稱為立筊。基本上這樣的狀

況不容易出現。筊杯結果的理論值機率為:正正 $\frac{1}{4}$ 、正反 $\frac{1}{2}$ ，反反 $\frac{1}{4}$ 。在實驗中我們以此理論值來檢視實驗的結果是否符合理論值。

2. 許多運動賽事在決定發球權時，都是用擲銅板來決定。早期的擲筊杯工具由古時貝幣演變而來的，因此我們用現今的錢幣來測試比較兩者之間何者接近理論值。結果發現，以正面、反面 $\frac{1}{2}$ 的機率來比較，結果投擲筊杯比投擲銅板的機率更接近 50%。讓我們不禁對於傳統中國人的智慧，有了另一番看法。
3. 3D 列印筊杯的投擲結果的正、反面次數時，我們也發現兩者之間的差距有明顯的差距，我們推測 3D 列印筊杯，也許因為材質影響筊杯的重量，讓筊杯的機率無法達到理論值。
4. 雖然筊杯投擲器所投出的機率與理論值相差較大，不過我們相信筊杯投擲器確實有可以有效減少人為對於投擲時操作上的干擾，更符合公平公正的原則。
5. 機率的計算往往是許多數字的多次相乘而得的積，因此本來為小的差距，在連續的相乘之後，數字就會變得差距很大。
6. 在統計上，抽不出國運籤並沒有任何並沒有任何意義，因為這也是機率的一部份，只要存在就有會碰上。尤其當抽出國運籤的宮廟越多，就代表出現抽不出國運籤的機會增加。仔細想想，如果能夠明白機會掌握在自己手上，對於抽不出國運籤這件事情，也就不那麼在意了。

陸、參考資料及其他

1. <https://www.youtube.com/watch?v=FKy8Eb0JasM> , 【Fun 科學】抽不出國運籤(人類文明史上的危機!?)
2. <http://www.99cankao.com/numbers/exponential-power.php>, 任意 N 次方計算器
3. 中華民國 第 50 屆中小學科學展覽會作品說明書, 國中組 物理科, 筊杯的疑惑
4. <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AD%8A%E6%9D%AF>, 筊杯