嘉義市第 37 屆國民中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：格格不入嗎?

關鍵詞：數學推理、鴿籠原理

編號：

●	●	●	●							4
			●	●	●	●				4
●				●			●	●		4
X	●		X	X	●		●		●	4
X		●	X	X		●		●	●	4
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	3

作品名稱：格格不入嗎?

摘要：

一個由邊長 1 的小方格組成 3×7 或 4×7 的矩形，任意地把這些小方格塗上兩種顏色的其中一種，是否一定可以找到四角同色的矩形呢?

答案：是肯定的。

可是若我們這樣問：將一個由邊長 1 的小方格所組成的矩形，任意地把這些小方格塗上某種顏色，是否一定要塗一半以上才必然可以找到四角同色的矩形呢?

這就是我們研究的主題，我們由實例出發找出一種方法來解釋，到底要塗幾格，不論塗色的格子是如何安排都能保證存在著四角同色的矩形。

壹、研究動機：

在兩本書上分別看到如下的題目：其一是：「**一個 3×7 的矩形中有 21 個邊長為 1 的小方格，把這些小方格都隨意塗成紅色或白色，求證：一定可在圖上找到一個由小方格組成的矩形，它的四角處的小方格同色 。**」

其二是：「**長方形長 7、寬 4(長度單位) 。對其中 28 個單位正方形隨意分別刷上白色或黑色。證明：任何一種刷色方法一定會出現有四角上單位正方形都是同色的長方形。**」針對第一個問題，我和數研社的同伴隨手畫了幾個圖，果然都存在著某矩形其四個角落的小方格不是全紅色就是全白色。這使我們覺得很好奇，而且從題目看起來，好像只要某種顏色的小方格數達到總格數的一半以上時，就必存在著某矩形其四個角落的小方格都塗著那種顏色，好神奇哦!

我們想這種現象是否對所有由小方格構成的矩形都成立呢?也就是說，只要我們將某種顏色塗到小方格中，使塗色的小方格數達到總格數的一半以上時，必存在著某矩形其四個角落的小方格都塗著那種顏色。如果成立，如何證明呢? 如果不成立，那至少要塗幾格呢?

於是我和同伴便踏上探究的旅程。

貳、研究目的：

一、探討原問題並證明。

二、將原問題中矩形的小方格總數改變，探討必須塗幾格，不論塗色的位置如何安排，都能「保證」能得到四角同色的矩形。

三、將原問題改為雙人遊戲：兩人各代表一個顏色，輪流塗色，先讓一個矩形的四角落小方格同色即獲勝。

叁、研究器材與設備：

計算紙、筆、圍棋的棋子、各種各樣的方格紙、word 和 excel 軟體、人腦和挑戰的心。

肆、研究過程與方法：

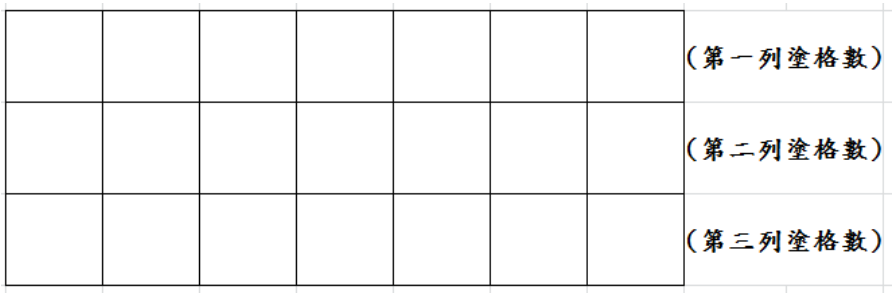
一、探討原問題並證明：

(一)「一個 3×7 的矩形中有 21 個邊長為 1 的小方格，把這些小方格都隨意塗成紅色或白色，求證：一定可在圖上找到一個由小方格組成的矩形，它的四角處的小方格同色。」

我們先將 3×7 矩形的小方格任意的標示出紅色或白色，發現好像不管怎麼塗都會有四角同色的矩形存在，可是這樣的塗法應該有很多種，而且有時是四角處的小方格同是紅色，有時是白色。於是我們決定先簡化題目，以一個顏色來看，因為總方格數是 21，所以一定有一種顏色至少 11 格，那 11 格會不會就是答案?對此，我們進行以下的討論和說明：

註：為了方便討論或說明，我們以黑色棋子代表塗色。

1、3×7 ：塗 11 格



11＝(第一列塗格數)＋(第二列塗格數)＋(第三列塗格數)，

列與列之塗格數可對調

但為方便討論，我們採取以下原則：第一列塗格數≥第二列塗格數≥第三列塗格數

另外，為了保證某一情況是否真的成立，我們還採取一個原則，即**每排完一列要再排下一列時，故意排在會形成反例的位置，如果這樣都還能成立，那就表示結論一定正確。**

若11＝7＋4＋0，則一定成立(即一定可在圖上找到四角同色的矩形)

若11＝7＋3+1，一定成立

若11＝7＋2＋2，一定成立

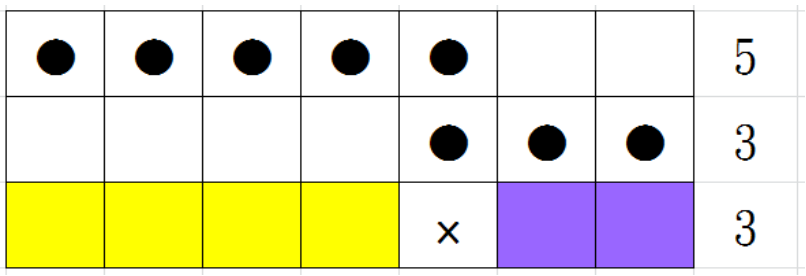
若11＝6＋5＋0 、11＝6＋4＋1、11＝6＋3＋2 ，也都一定成立

若11＝5＋5＋1、11＝5＋4＋2 ，也都一定成立

故只需討論以下 2 種情況：

(1)11＝5＋3＋3

[說明]：



第一列的 5 格排哪五行不影響答案，故盡量排連在一起，

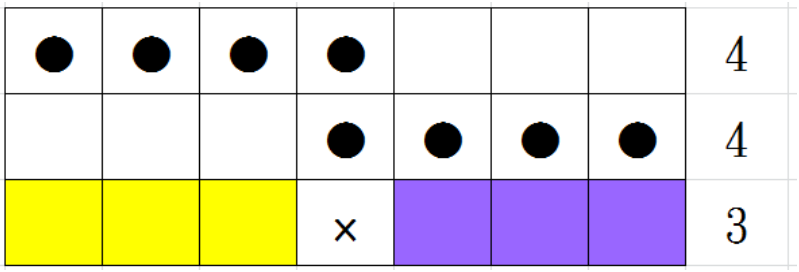
第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行，往後的原則相同

第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，可是這樣的話，左

邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立。

(2)11＝4＋4＋3

［說明］：



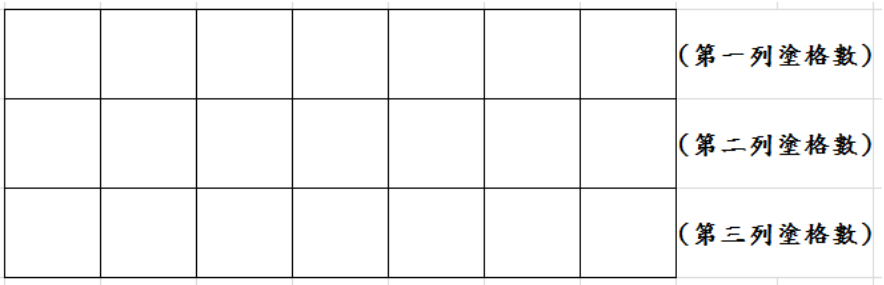
第一列的 4 格排哪四行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行，

第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，可是這樣的話，左邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立。

小結：「一個 3×7 的矩形中有 21 個邊長為 1 的小方格，把這些小方格都隨意塗成紅色或白色，則一定可在圖上找到一個由小方格組成的矩形，它的四角處的小方格同色 。」結論是正確的。

2、3×7 ：塗 10 格



若10＝7＋3＋0＝7＋2＋1(都一定可以在圖上找到四角同色的矩形)

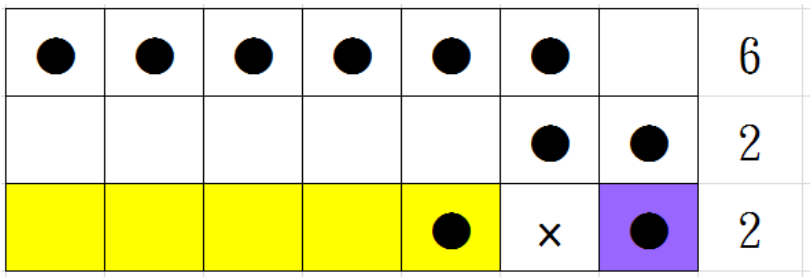
若10＝6＋4＋0＝6＋3＋1(也都一定可以在圖上找到四角同色的矩形)

若10＝5＋4＋1(也一定可以在圖上找到四角同色的矩形)

故只需討論以下 4 種情況：

(1)10＝6＋2＋2

［說明］：

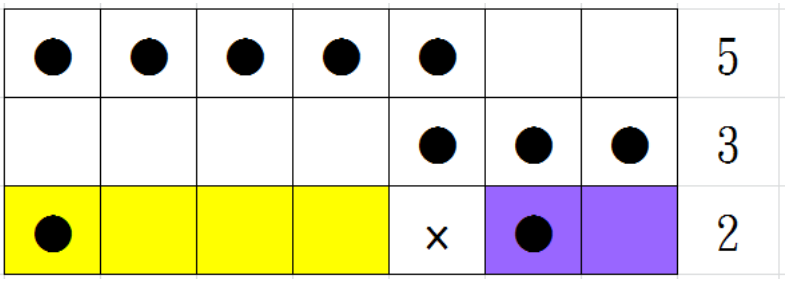


第一列的 6 格排哪六行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行，

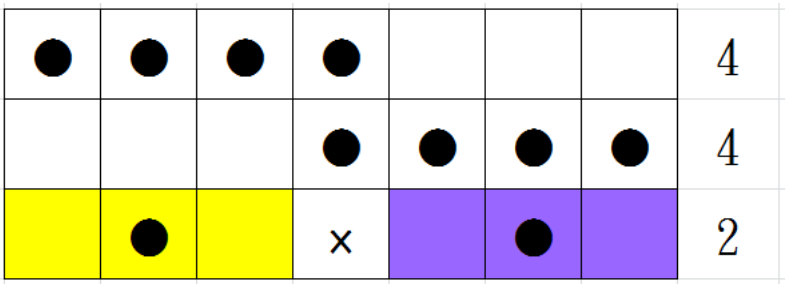
第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，這樣的話，只要在左邊的黃色區和右邊的紫色區必須各塗 1 格，就可**形成反例**。

（2）$10=5+3+2$



［說明］：**出現反例。**

（3）$10=4+4+2$



［說明］：**出現反例。**

（4）$10=4+3+3$

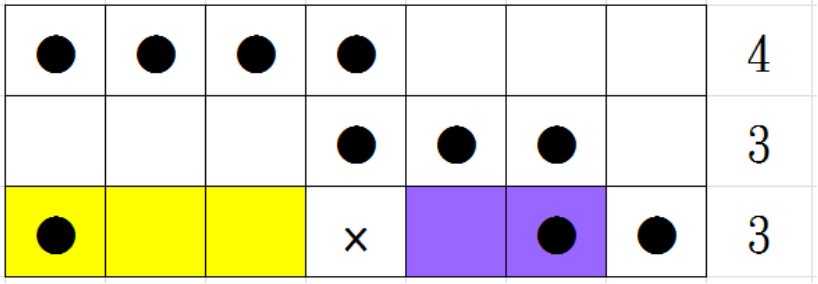
［說明］：參考以下 2 圖

第一列的 4 格排哪四行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列最多只能有一格在同一行，

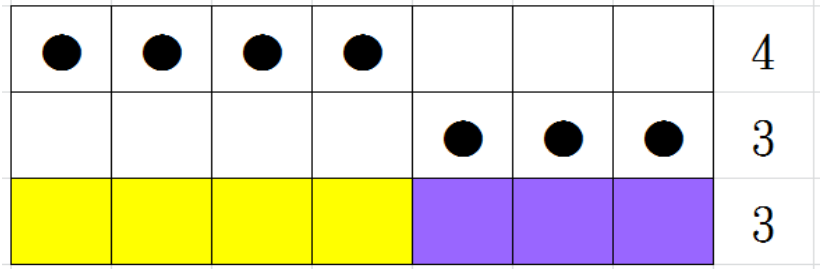
所以有以下兩種排法：

（a）



出現反例。

（b）



不出現反例。

小結：一個 3x7 的矩形中有 21 個邊長為 1 的小方格，把某些小方格塗上顏色，只塗 10 格，不一定可在圖上找到一個由小方格組成的矩形，它的四角處的小方格同色 。

（二）「長方形長 7、寬 4(長度單位）。對其中 28 個單位正方形隨意分別刷上白色或黑色。證明：任何一種刷色方法一定會出現有四角上單位正方形都是同色的長方形。」

1、4×7：塗 14 格

							第一列塗格數
							第二列塗格數
							第三列塗格數
							第四列塗格數

若14＝7＋( )＋( )＋( ) ，則( )內必有一數≥3，一定成立，

必能找到四角同色的矩形。

若14＝6＋( )＋( )＋( ) ，則( )內必有一數≥3，也一定成立

若14＝5＋( )＋( )＋( ) ，且( )內若有 5 或 4 的，也一定成立

故只需討論以下 3 種情況：

(1)14＝5＋3＋3＋3

●	●	●	●	●			5
				●	●	●	3
				X			3
							3

第一列的 5 格排哪五行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行，

第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，可是這樣的話，左邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立。

(2)14＝4＋4＋4＋2

［說明］：

●	●	●	●				4
			●	●	●	●	4
			X				4
							2

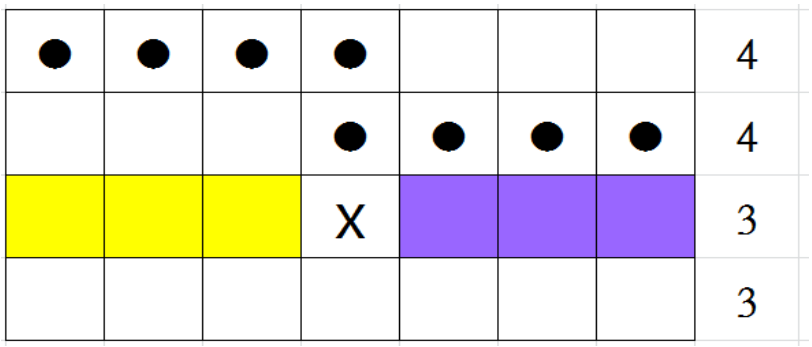
第一列的 4 格排哪四行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行

第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，可是這樣的話，左邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立。

(3)14＝4＋4＋3＋3

［說明］：



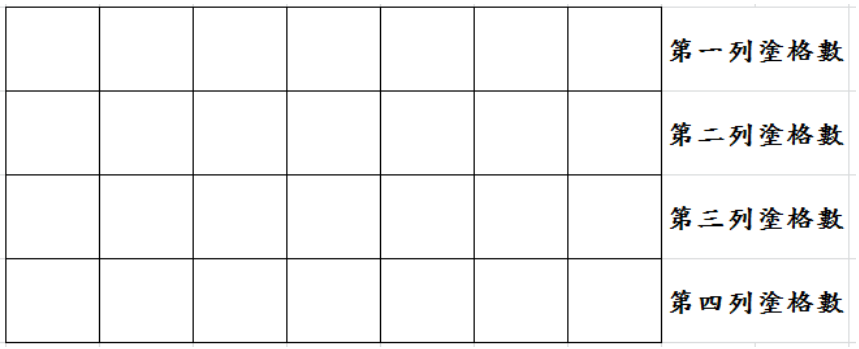
第一列的 4 格排哪四行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行

第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，可是這樣的話，左邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立。

小結：「長方形長 7、寬 4(長度單位）。對其中 28 個單位正方形隨意分別刷上白色或黑色。證明：任何一種刷色方法一定會出現有四角上單位正方形都是同色的長方形。」結論是正確的。

2、4×7：塗 13 格



若13＝7＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥2，故一定成立，

即找得到四角同色的矩形

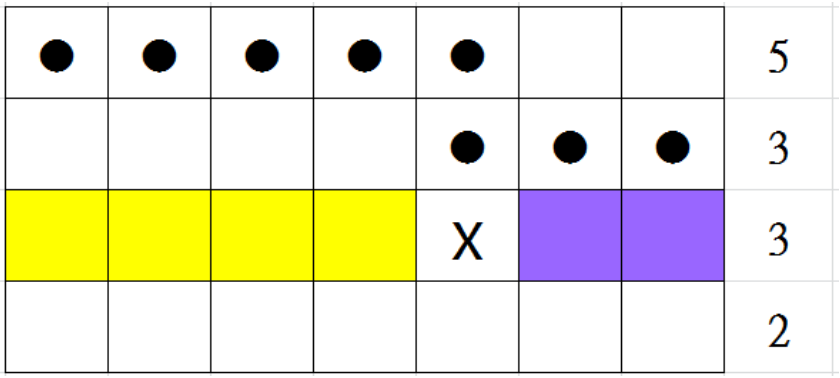
若13＝6＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥3，也一定成立

若13＝5＋( )＋( )＋( )，且( )內有 5 或 4 的，也一定成立

故只需討論以下 4 種情況：

(1)13＝5＋3＋3＋2

［說明］：



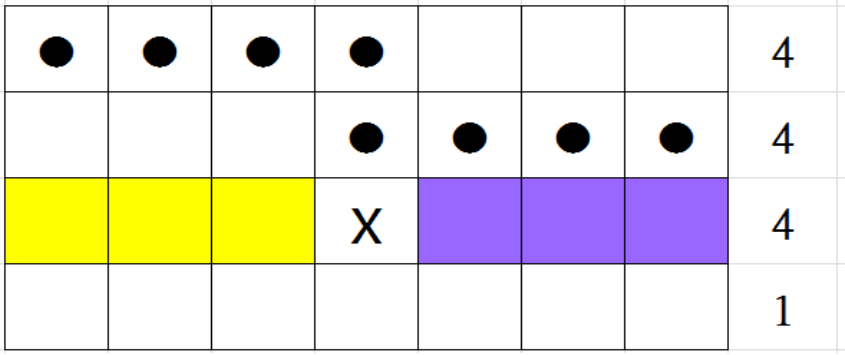
第一列的 5 格排哪五行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行，

第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，可是這樣的話，左邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立，不出現反例。

(2)13＝4＋4＋4＋1

［說明］：



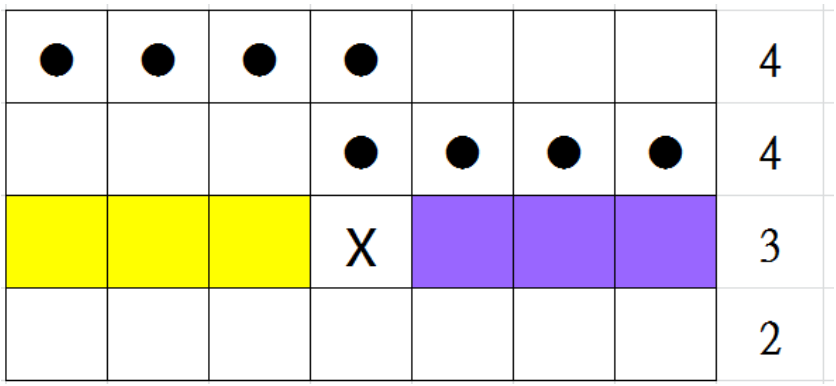
第一列的 4 格排哪四行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行，

第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，可是這樣的話，左邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立，不出現反例。

(3)13＝4＋4＋3＋2

［說明］：



第一列的 4 格排哪四行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列只能有一格在同一行

第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，可是這樣的話，左邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立，不出現反例。

(4)若13＝4+3+3+3

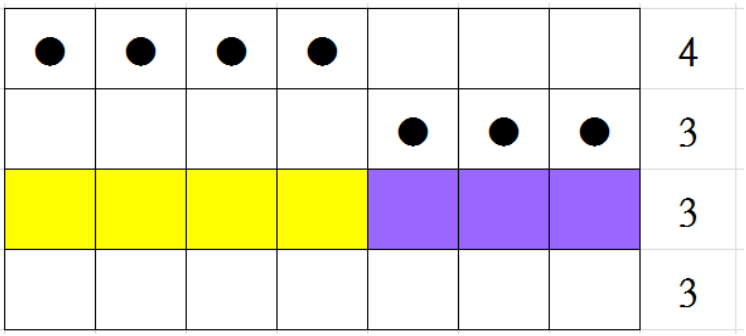
［說明］：參考以下 2 圖

第一列的 4 格排哪四行不影響答案，故盡量排連在一起，

第二列為了讓它形成反例，故與第一列最多只能有一格在同一行，

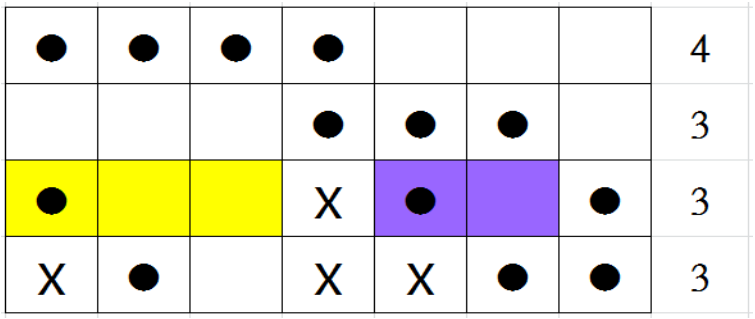
所以有以下兩種排法：

(a)



第三列，左邊的黃色區或右邊的紫色區必有一區至少要塗 2 格，所以到最後還是能成立，不出現反例。

(b)



第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，那麼就只能塗黃色區一格、紫色區一格及最右邊一格

第四列，若塗打「×」的某一格，就成立了，所以故意不塗，

可是到**最後還是會出現反例**。

小結：「長方形長 7、寬 4(長度單位）。對其中某些單位正方形隨意刷上某顏色。若只塗 13 格，則不一定可在圖上找到一個由小方格組成的矩形，它的四角處的小方格同色。

二、將原問題中矩形的小方格總數改變，探討必須塗幾格，不論塗色的位置如何安排，都能「保證」能得到四角同色的矩形：

原本我們想，是不是只要塗的格數達到總格數的一半以上(如：總格數 21 格，塗 11 格；總格數 28 格，塗 14 格)時，不論塗色的位置如何安排，都能「保證」能得到四角同色的矩形。可是當我們探討5×7 的矩形時，塗 15 格能找到反例，可是塗 17 格，甚至塗 16 格都找不到反例。以下詳細說明：

(一)5×7：

							第一列塗格數
							第二列塗格數
							第三列塗格數
							第四列塗格數
							第五列塗格數

1. 塗 16 格($16<\frac{5\times7}{2}$，少於一半)

若16＝7＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥3，故一定成立，找得到四角同色的矩形

若16＝6＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥3，也一定成立

若16＝5＋( )＋( )＋( )＋( )，且( )內有 5 或 4 的，也一定成立

故只需討論以下 6 種情況：

(1)16＝5＋3＋3＋3＋2

●	●	●	●	●			5
				●	●	●	3
				X			3
							3
							2

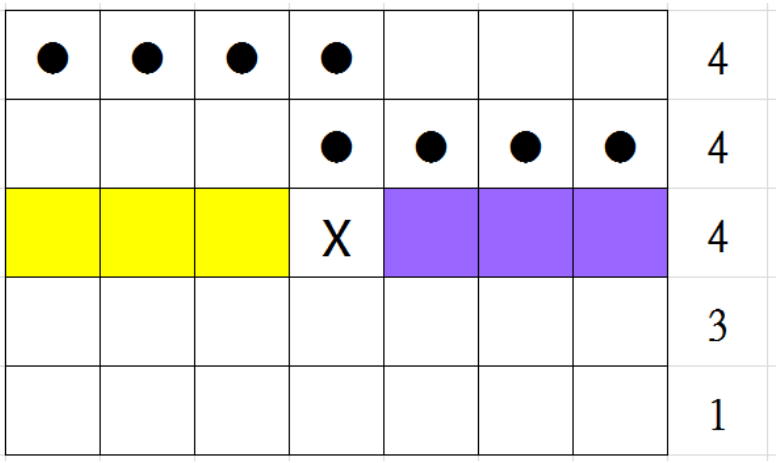
[說明]：不出現反例。

(2)16＝4＋4＋4＋4＋0

●	●	●	●				4
			●	●	●	●	4
			X				4
							4
							0

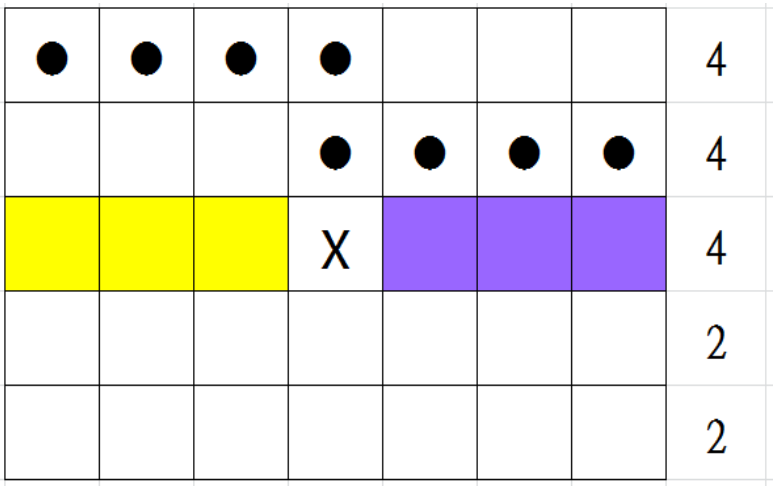
[說明]：不出現反例。

(3)16＝4＋4＋4＋3＋1



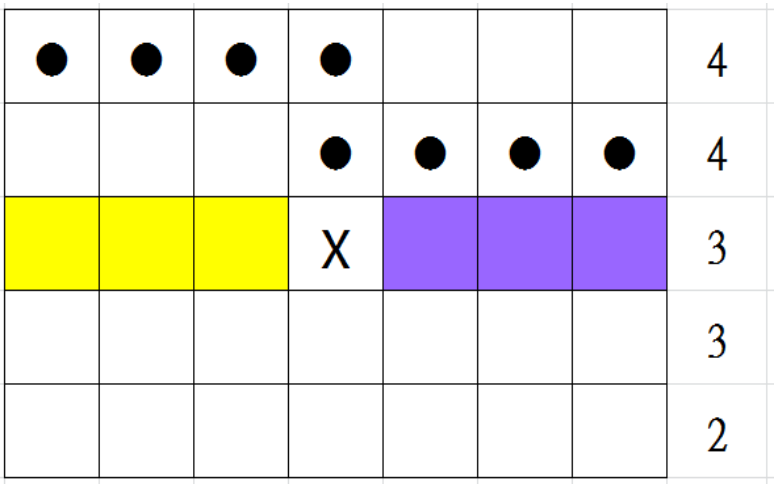
［說明］：不出現反例。

(4)16＝4＋4＋4＋2＋2



［說明］：不出現反例。

(5)16＝4＋4＋3＋3＋2



［說明］：不出現反例。

(6)16＝4＋3＋3＋3＋3

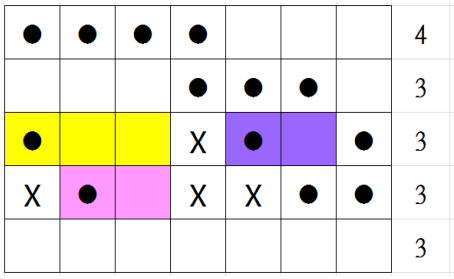
［說明］：

第一列的 4 格排哪四行不影響答案，故盡量排連在一起，

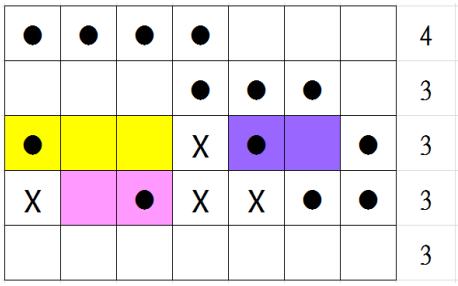
第二列為了讓它形成反例，故與第一列最多只能有一格在同一行，

所以有以下(a)(b)兩種排法：

(a)-1



(a)-2

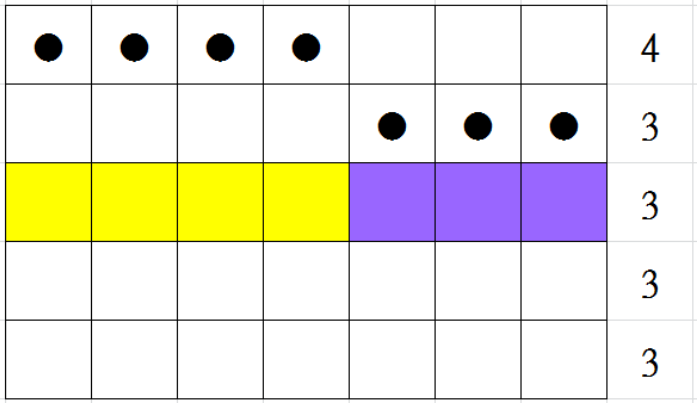


第三列，若塗打「×」的那一格，就成立了，所以故意不塗，另外為了讓它形成反例，黃色區和紫色區都必須只塗 1 格，

第四列，若塗到打「×」的格子，就成立了，所以故意不塗，另外為了讓它形成反例，紅色區必須只塗 1 格，

第五列，不管怎麼避，到最後還是能成立，不出現反例。

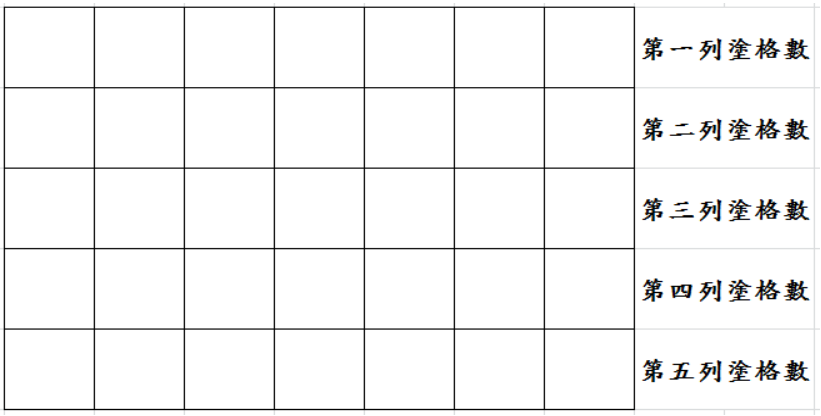
(b)



不出現反例。

小結：一個 5x7 的矩形中有 35 個邊長為 1 的小方格，把某些小方格塗上顏色，若塗 16 格，則一定可在圖上找到一個由小方格組成的矩形，它的四角處的小方格同色 。

2. 5×7 ：塗 15 格



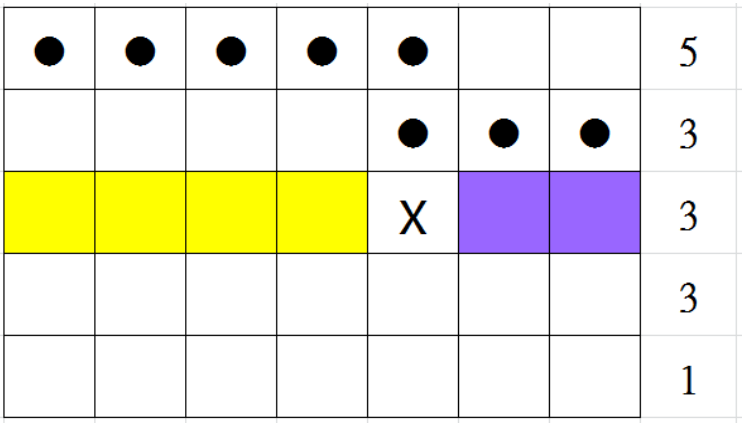
若15＝7＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥2，故一定成立(不出現反例)

若15＝6＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥3，也一定成立

若15＝5＋( )＋( )＋( )＋( )，且( )內有 5 或 4 的，也一定成立

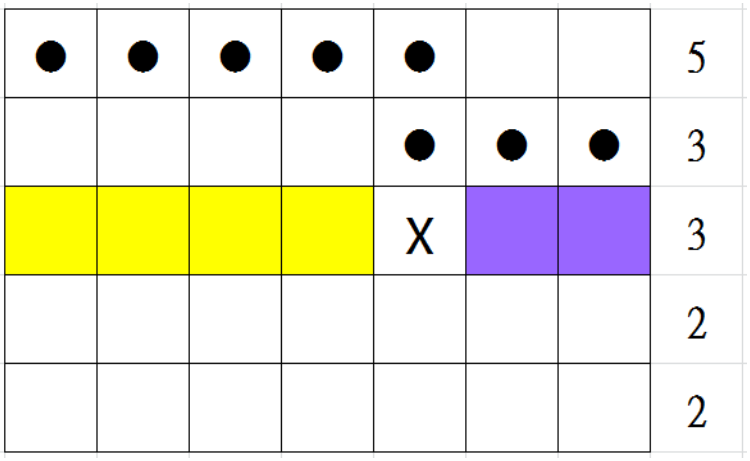
故只需討論以下 8 種情況：

(1)15＝5＋3＋3＋3＋1



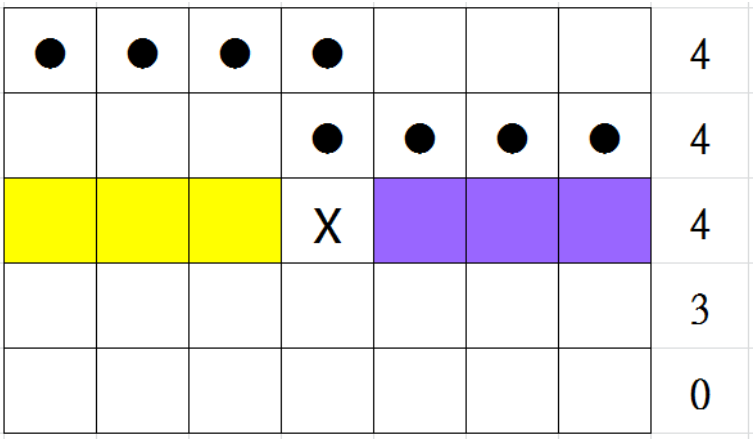
［說明］：不出現反例。

(2)15＝5＋3＋3＋2＋2



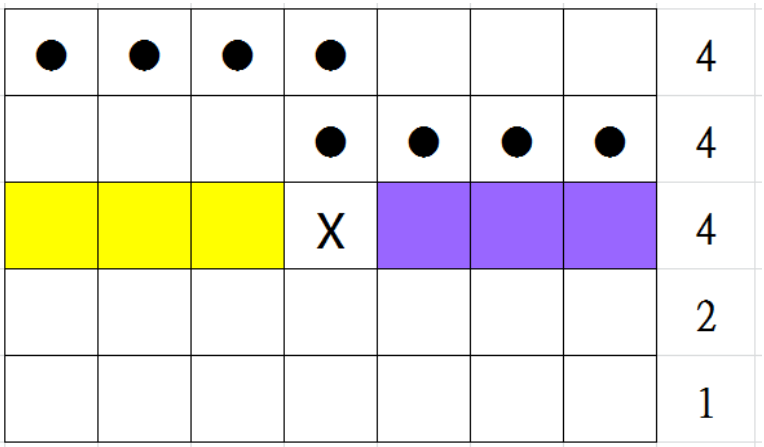
［說明］：不出現反例。

(3)15＝4＋4＋4＋3＋0



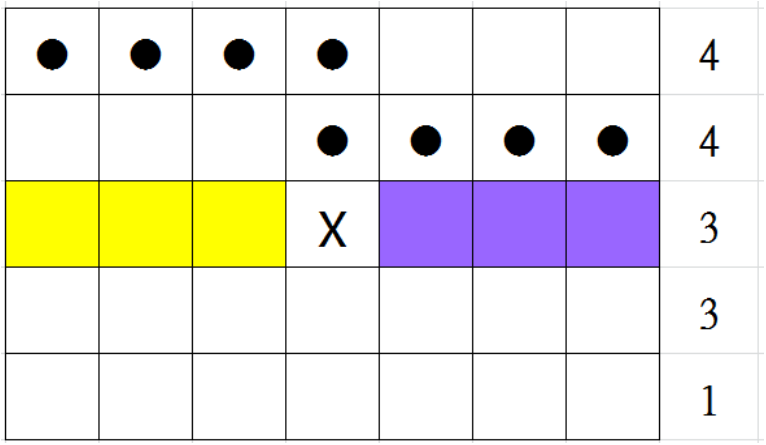
［說明］：不出現反例。

(4)15＝4＋4＋4＋2＋1



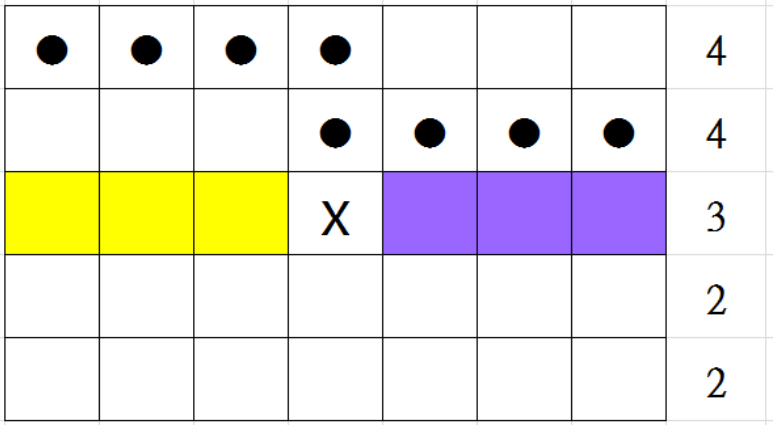
［說明］：不出現反例。

(5)15＝4＋4＋3＋3＋1



［說明］：不出現反例。

(6)15＝4＋4＋3＋2＋2



［說明］：不出現反例。

(7)15＝4＋3＋3＋3＋2

●	●	●	●				4
			●	●	●		3
●			X	●		●	3
X	●		X		●	●	3
	●			●			2

[說明]：出現反例如上。

(8)15＝3+3+3+3+3

●	●	●					3
		●	●	●			3
●			●		●		3
	●			●	●		3
●				●		●	3

[說明]：出現反例如上。

小結：一個 5x7 的矩形中有 35 個邊長為 1 的小方格，把某些小方格塗上顏色，若只塗 15 格，則不一定可在圖上找到四角同色的矩形。(會出現反例)

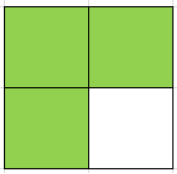
(二) 由上面的討論中，可知道總方格數的一半不一定是所需塗得最少格數，因此我們決定逐一探討，由二列開始，然後三列，…。

方法是：先找反例，若找不到反例，就想辦法證明。

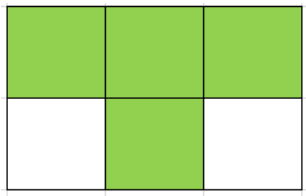
1. 二列的情形：2xn($n \geq 2$)　2 列 n 行

先列出反例如下

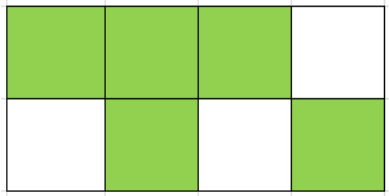
2x2(2 列 2 行)塗 3 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



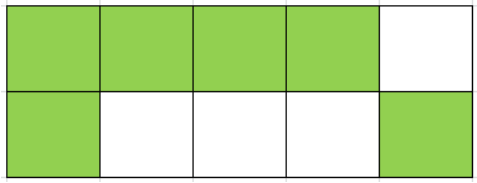
2x3(2 列 3 行)塗 4 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



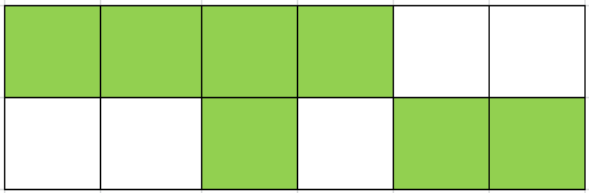
2×4(2 列 4 行)塗 5 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



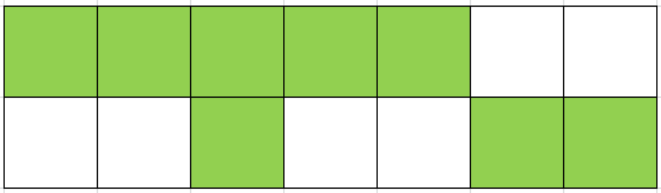
2×5(2 列 5 行)塗 6 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



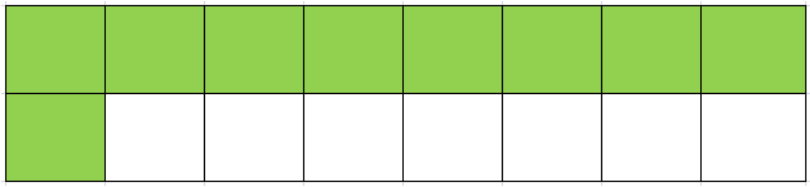
2×6(2 列 6 行)塗 7 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



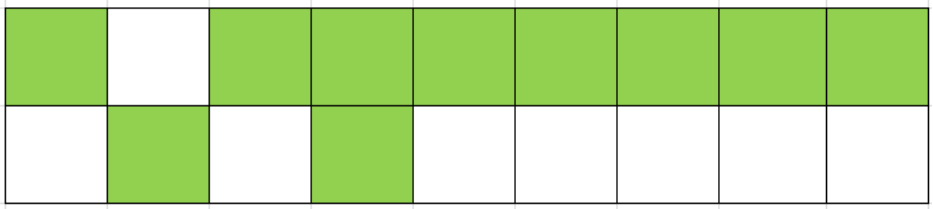
2×7(2 列 7 行)塗 8 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



2×8(2 列 8 行)塗 9 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



2×9(2 列 9 行)塗 10 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



2xn($n \geq 2$)：至少需要塗幾格才能保證必定存在有四角落皆塗色之矩形

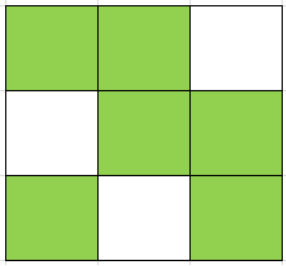
n	2	3	4	5	6	7	8	9
至少需要塗幾格	4	5	6	7	8	9	10	11

證明：略。

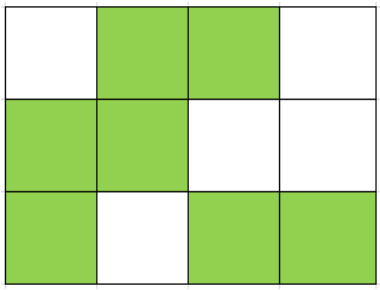
2. 三列的情形：3xn($n \geq 3$)　3 列 n 行

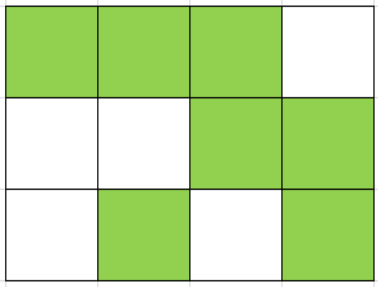
先列出反例：

3x3(3 列 3 行)塗 6 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。

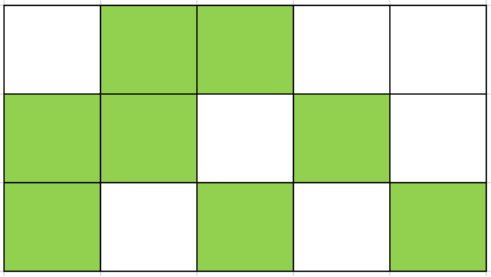


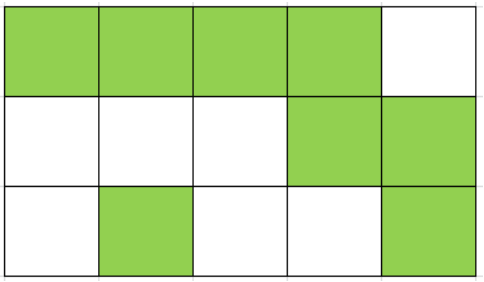
3x4(3 列 4 行)塗 7 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



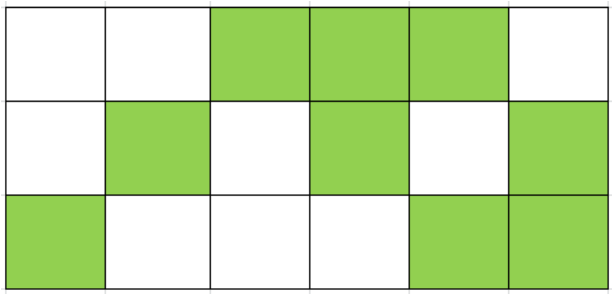


3x5(3 列 5 行)塗 8 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。

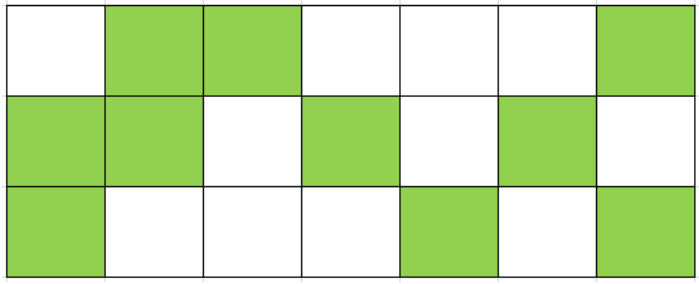


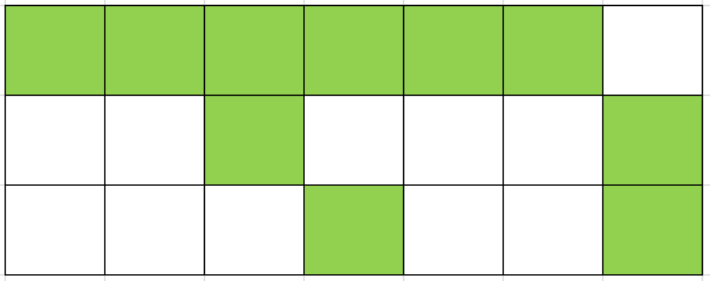


3×6(3 列 6 行)塗 9 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



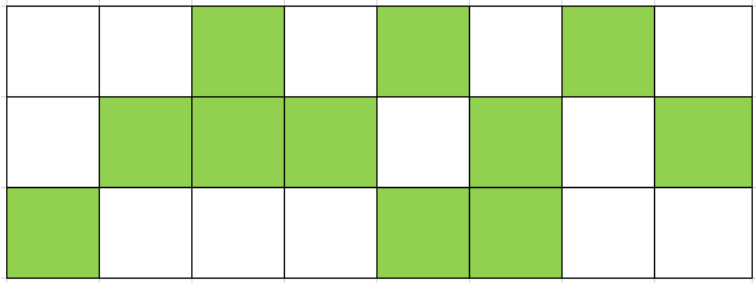
3×7(3 列 7 行)塗 10 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



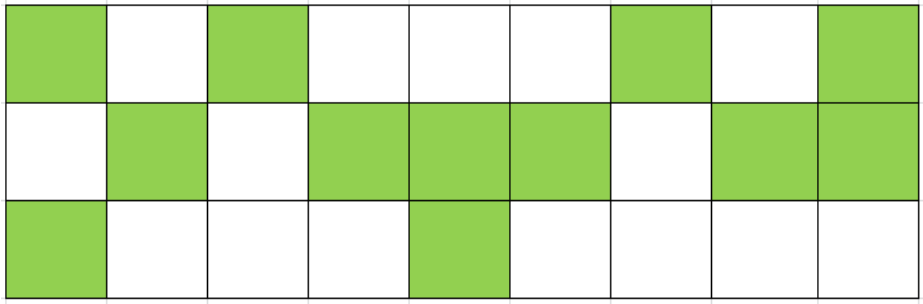


(請參考前面說明)

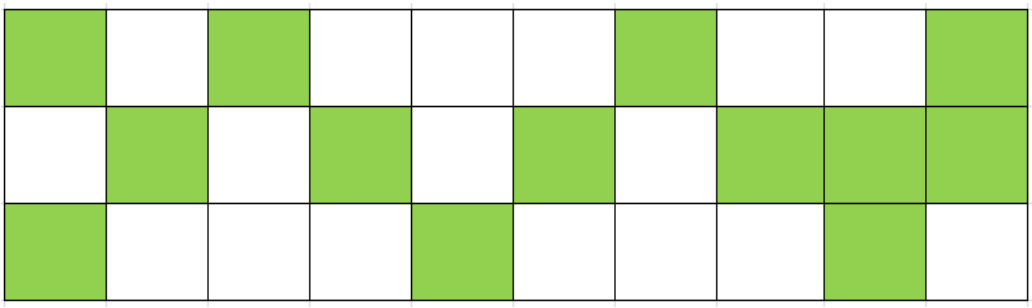
3×8(3 列 8 行)塗 11 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



3×9(3 列 9 行)塗 12 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



3×10(3 列 10 行)塗 13 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。

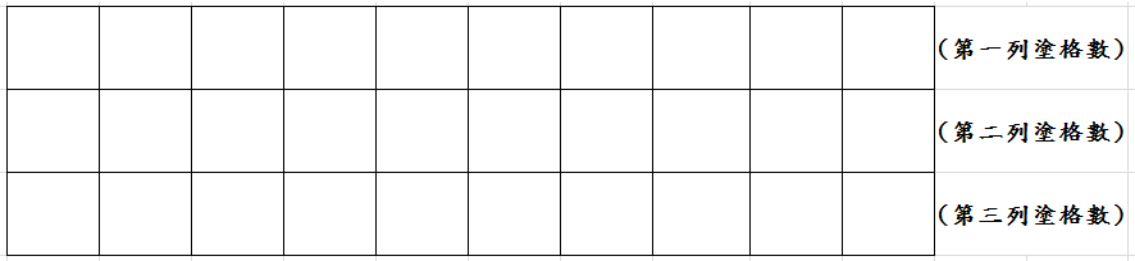


3×n($n \geq 3$)：至少需要塗幾格才能保證必定存在有四角落皆塗色之矩形

n	3	4	5	6	7	8	9	10
至少需要塗幾格	7	8	9	10	11	12	13	14

我們以 3×10(3 列 10 行)為例說明如下：

[說明]：3×10 ：塗 14 格



只塗 13 格，已發現反例，若塗 14 格是否恆成立呢?

若 $14=10+(\ )+(\ )$，則( )內必有一數 ≥ 2，故一定成立

若 $14=9+(\ )+(\ )$，則( )內必有一數 ≥ 3，也一定成立

若 $14=8+(\ )+(\ )$，且( )內有 6 或 5 或 4 的，也一定成立

故只要討論 $14=8+3+3$

若 $14=7+(\ )+(\ )$，且( )內有 7 或 6 或 5 的，也一定成立

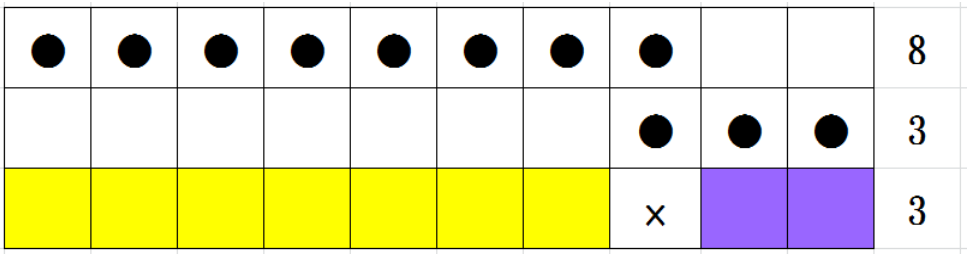
故只要討論 $14=7+4+3$

若 $14=6+(\ )+(\ )$，且( )內有 6 的，也一定成立

故只要討論 $14=6+5+3$ 和 $14=6+4+4$

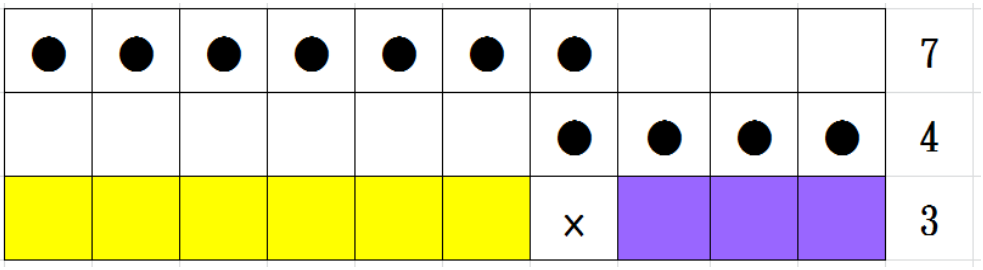
另外還要討論 $14=5+5+4$

(1) $14=8+3+3$



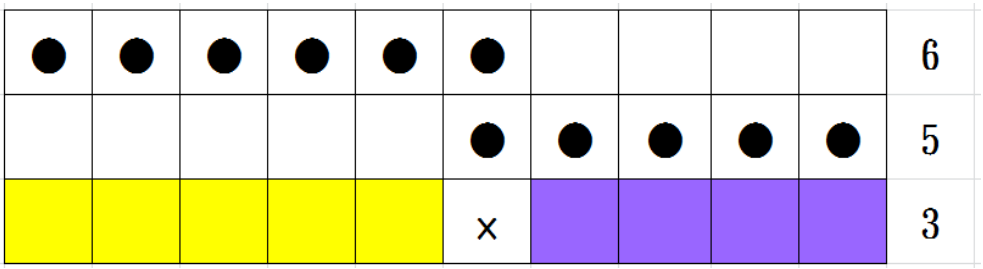
[說明]：不會出現反例。

(2) $14=7+4+3$



[說明]：不會出現反例。

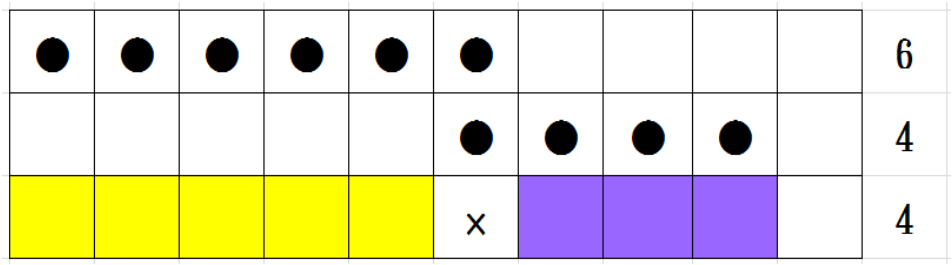
(3) $14=6+5+3$



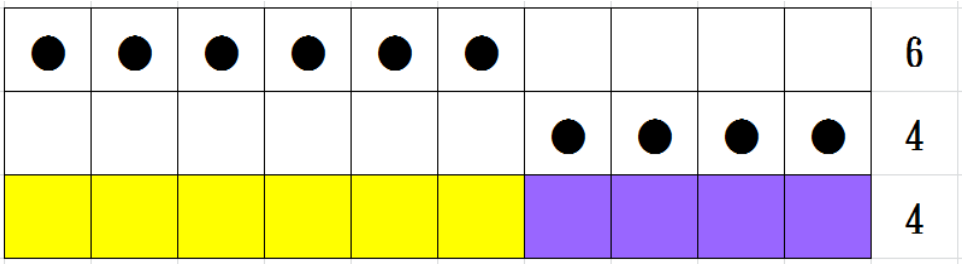
[說明]：不會出現反例。

(4) $14=6+4+4$

(a)



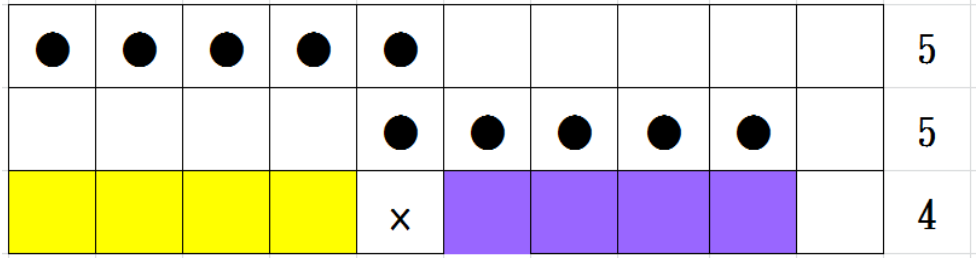
(b)



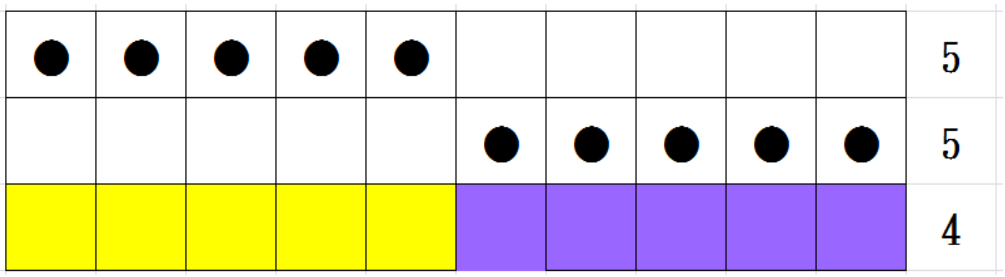
[說明]：不論是情況(a)或(b)，都不會出現反例。

(5) $14=5+5+4$

(a)



(b)

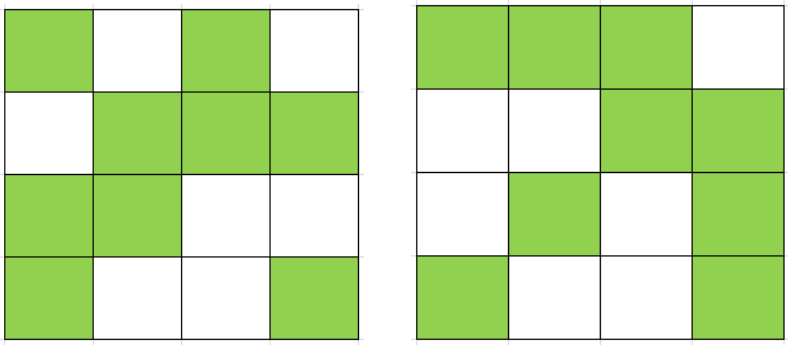


[說明]：不論是情況(a)或(b)，都不會出現反例。

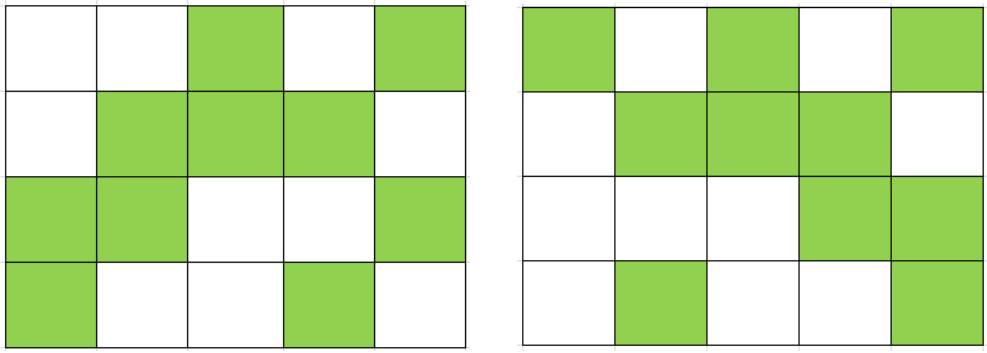
3. 四列的情形：4×n($n \geq 4$)　4 列 n 行

先列出反例：

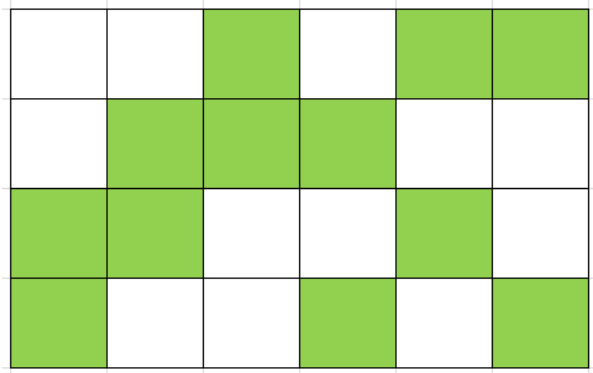
4×4(4 列 4 行)塗 9 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



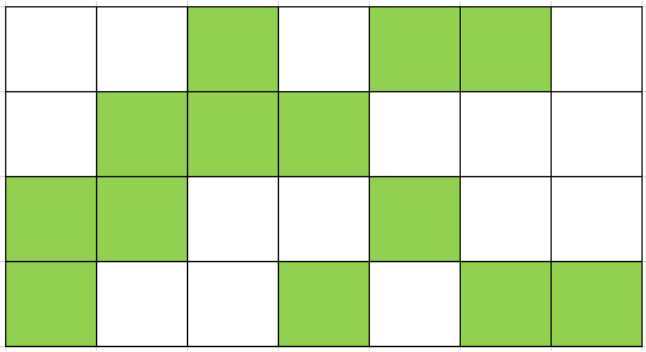
4×5(4 列 5 行)塗 10 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。

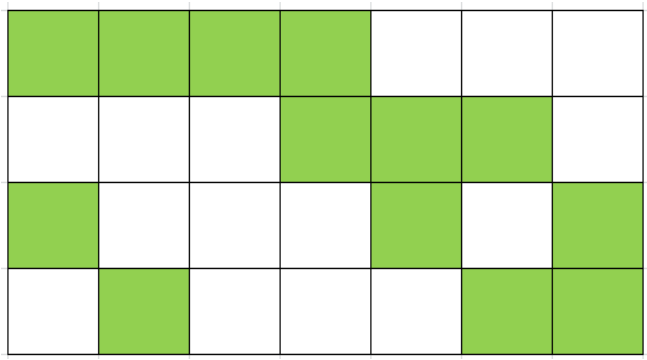


4×6(4 列 6 行)塗 12 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



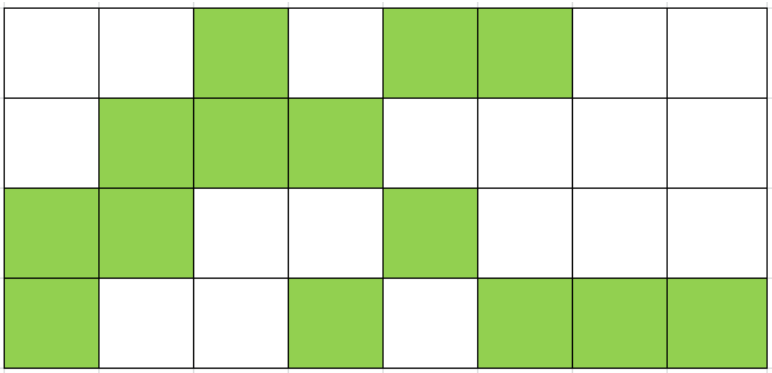
4×7(4 列 7 行)塗 13 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



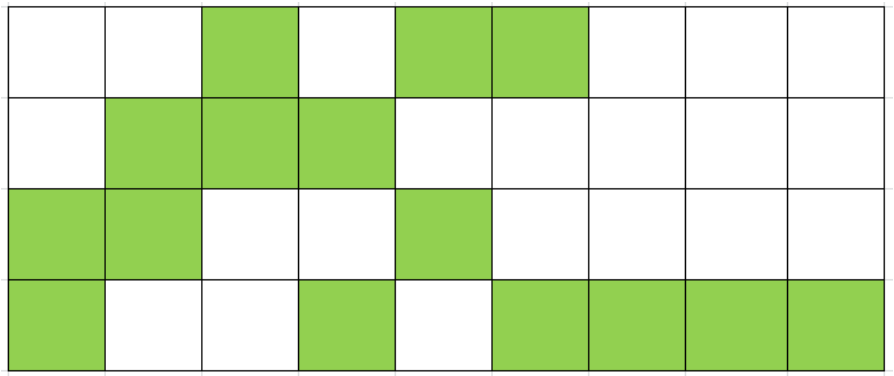


（請參考前面說明）

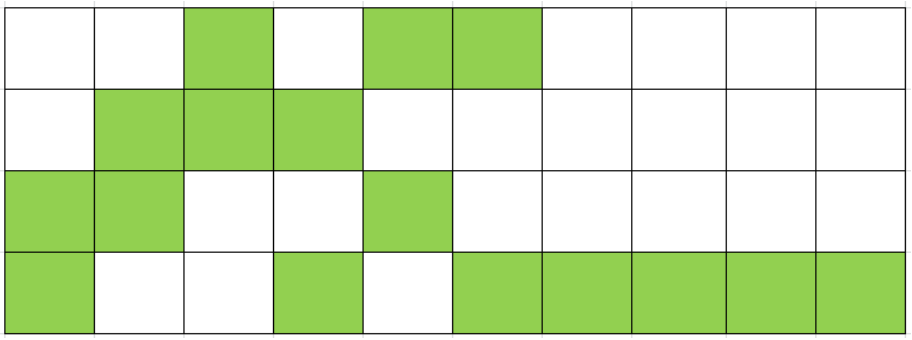
4×8(4 列 8 行)塗 14 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



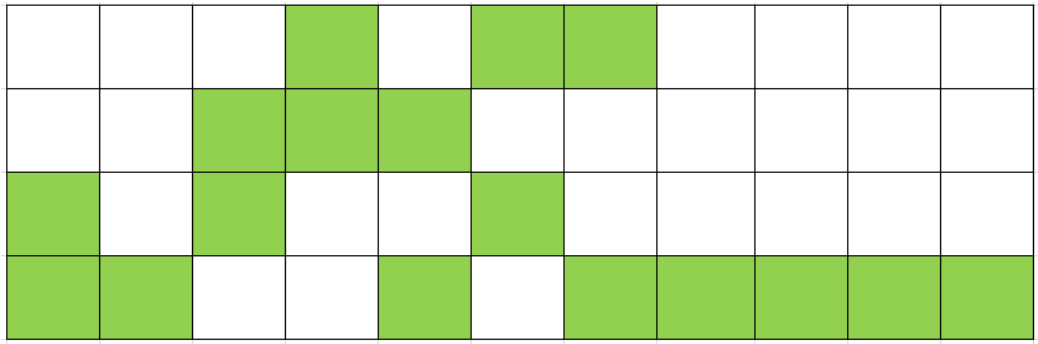
4×9(4 列 9 行)塗 15 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



4×10(4 列 10 行)塗 16 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



4×11(4 列 11 行)塗 17 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



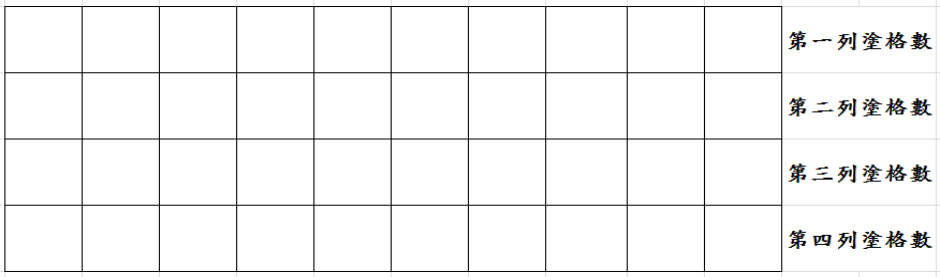
4×n($n \geq 4$)：至少需要塗幾格才能保證必定存在有四角落皆塗色之矩形

n	4	5	6	7	8	9	10	11
至少需要塗幾格	10	11	13	14	15	16	17	18

以 4×10(4 列 10 行)為例說明如下：若塗 17 格是否一定成立呢?

[說明]： 若只塗 16 格，已發現反例，若塗 17 格是否一定成立呢?

4×10：塗 17 格



若 $17=10+(\ )+(\ )+(\ )$ ，則( )內必有一數 ≥ 3，一定成立，

必可找到四角同色的矩形

若 $17=9+(\ )+(\ )+(\ )$ ，則( )內必有一數 ≥ 3，也一定成立

若 $17=8+(\ )+(\ )+(\ )$ ，且( )內有 4、5、6、7、8 的，一定成立

故只需討論：$17=8+3+3+3$

若 $17=7+(\ )+(\ )+(\ )$ ，且( )內有 5、6、7 的，一定成立

故只需討論：$17=7+4+4+2$ 或 $17=7+4+3+3$

若17＝6＋( )＋( )＋( ) ，且( )內有 6 的，一定成立

故只需討論：17＝6＋5＋5＋1或17＝6＋5＋4＋2或17＝6＋5＋3＋3或17＝6＋4＋4＋3

另外還需討論：17＝5＋5＋5＋2或17＝5＋5＋4＋3或17＝5＋4＋4＋4

以下逐項說明：

（1）17＝8＋3＋3＋3

●	●	●	●	●	●	●	●			8
							●	●	●	3
							X			3
										3

［說明］：必不會出現反例。

（2）17＝7＋4＋4＋2

●	●	●	●	●	●	●				7
						●	●	●	●	4
						X				4
										2

［說明］：必不會出現反例。

（3）17＝7＋4＋3＋3

●	●	●	●	●	●	●				7
						●	●	●	●	4
						X				3
										3

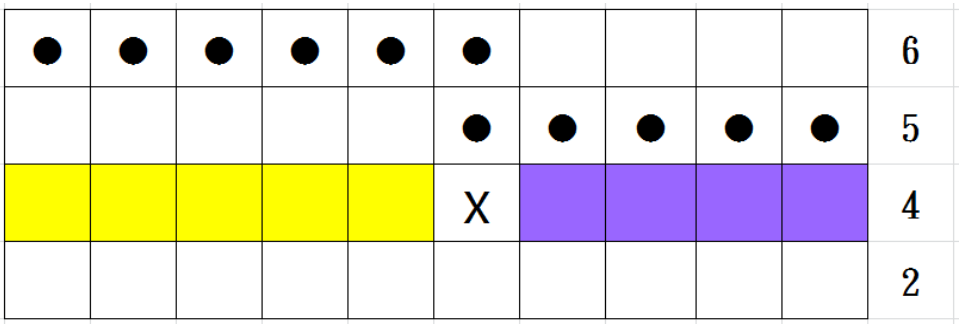
［說明］：必不會出現反例。

（4）17＝6＋5＋5＋1

●	●	●	●	●	●					6
					●	●	●	●	●	5
					X					5
										1

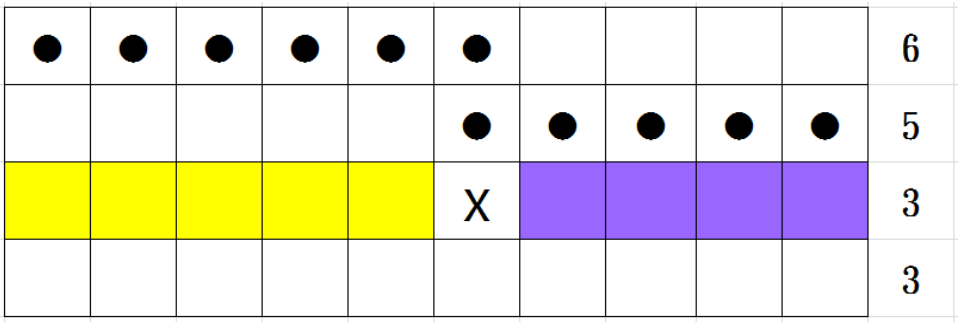
［說明］：必不會出現反例。

(5) $17=6+5+4+2$



[說明]：必不會出現反例。

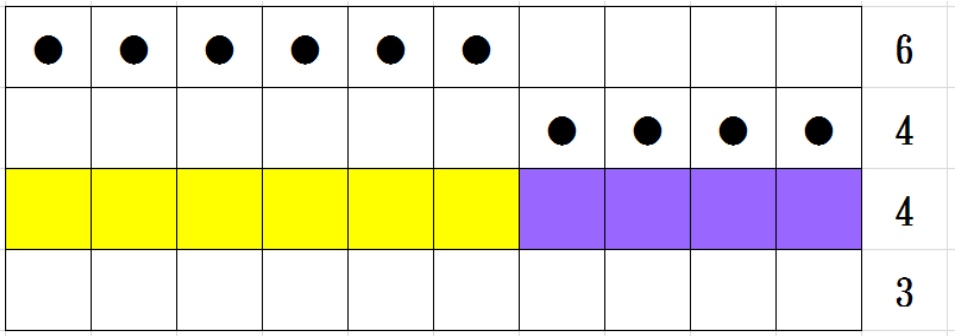
(6) $17=6+5+3+3$



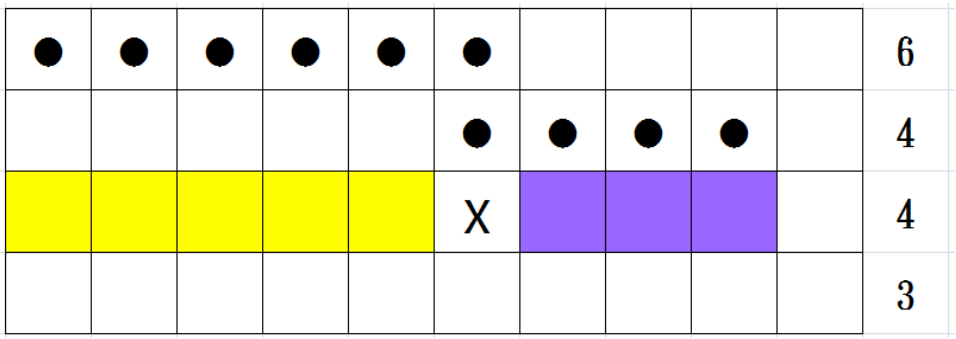
[說明]：必不會出現反例。

(7) $17=6+4+4+3$

(a)



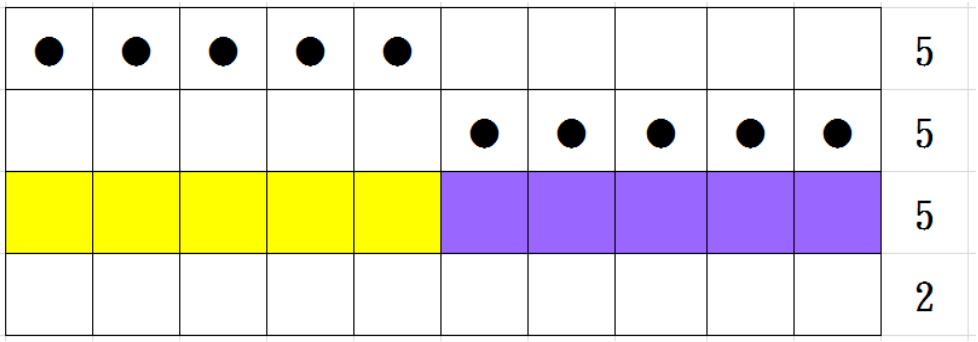
(b)



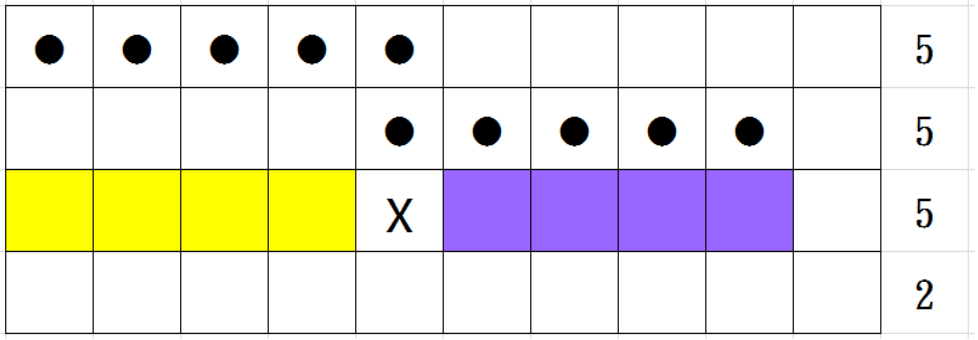
[說明]：都不會出現反例。

(8) $17=5+5+5+2$

(a)



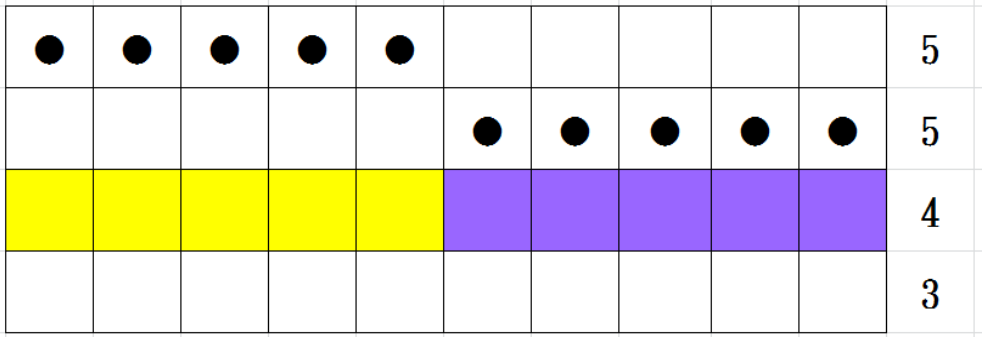
(b)



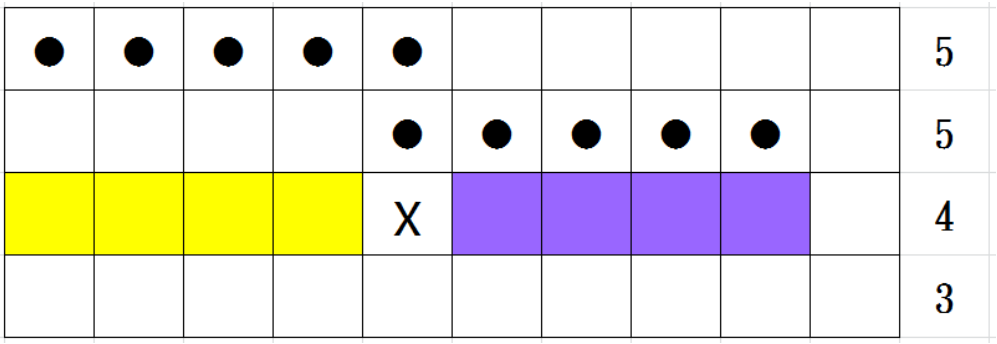
[說明]：都不會出現反例。

(9) $17=5+5+4+3$

(a)



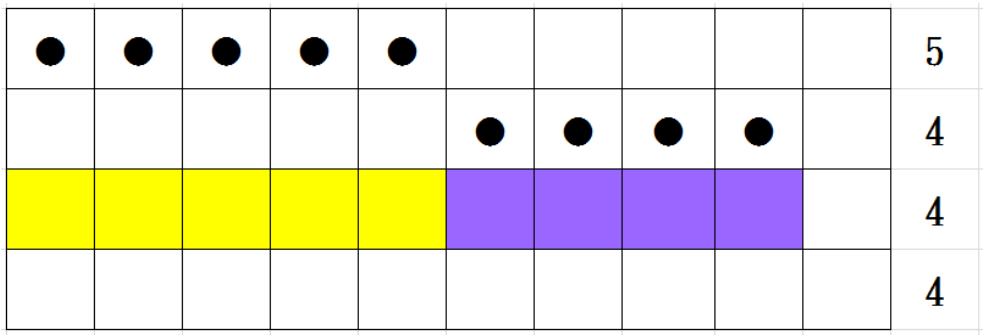
(b)



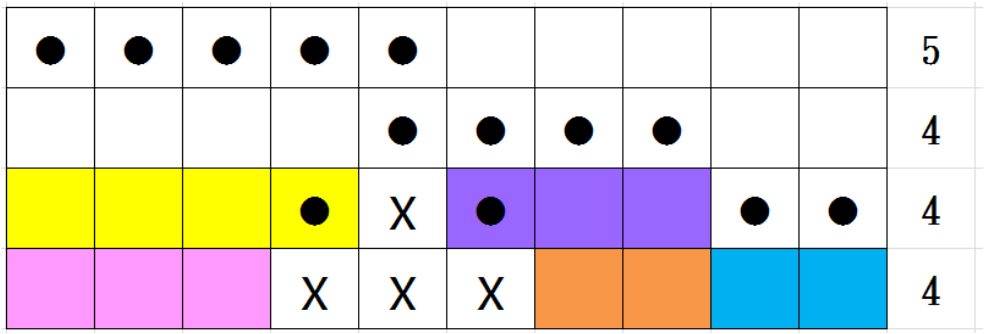
[說明]：都不會出現反例。

(10) $17=5+4+4+4$

(a)



(b)



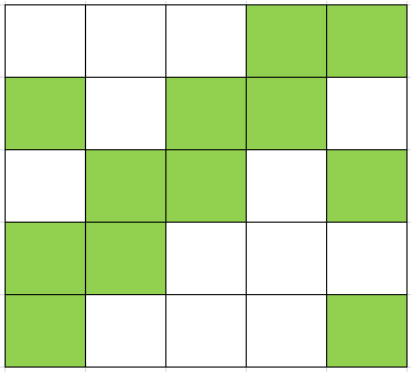
[說明]：(a)的情況很明顯不會出現反例；

(b)的情況雖然比較複雜，但也不會出現反例。

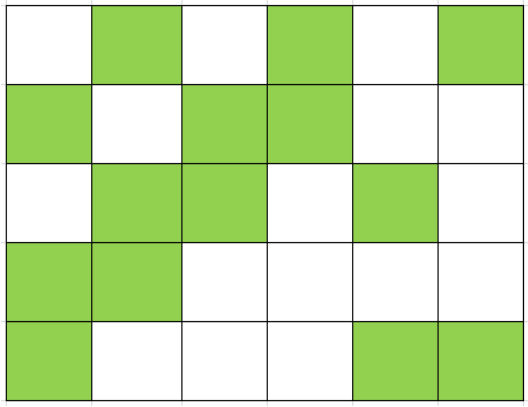
4. 五列的情形：5×n($n \geq 5$)　5 列 n 行

先列出反例：

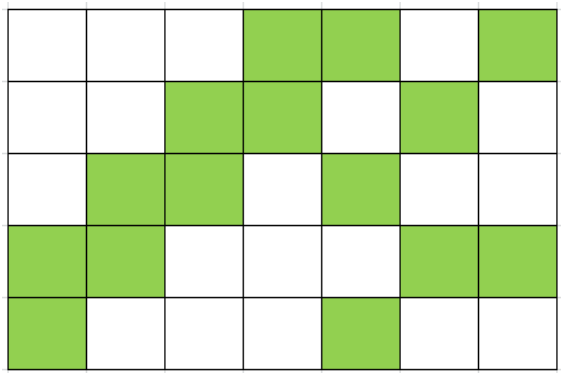
5×5(5 列 5 行)塗 12 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。

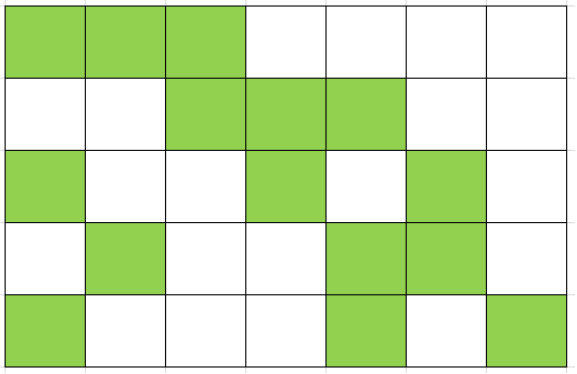


5×6(5 列 6 行)塗 14 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



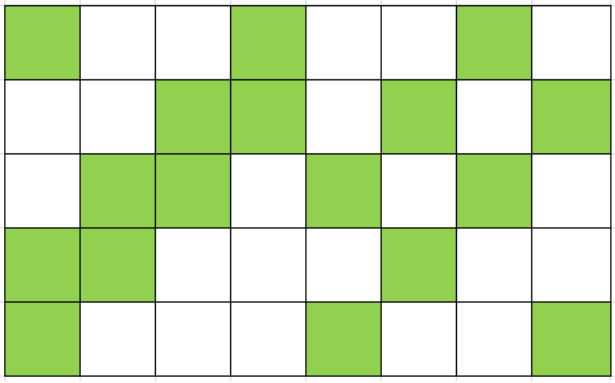
5x7(5 列 7 行)塗 15 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



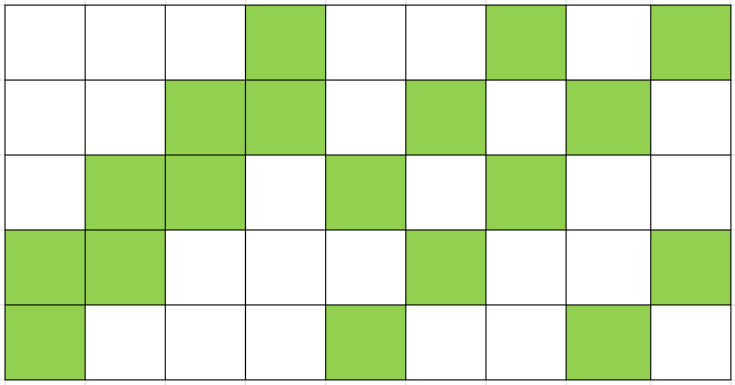


(請參考前面說明)

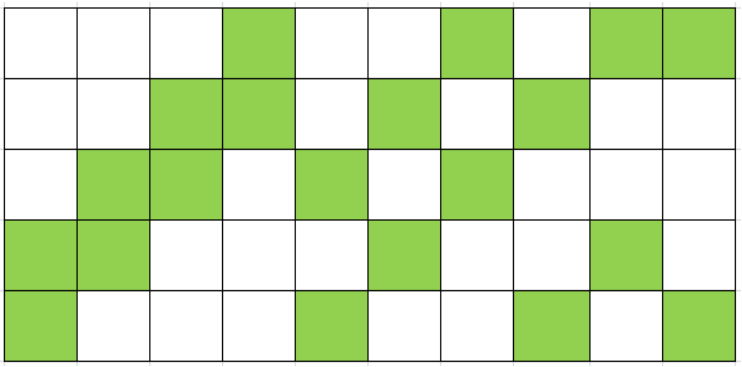
5x8(5 列 8 行)塗 17 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



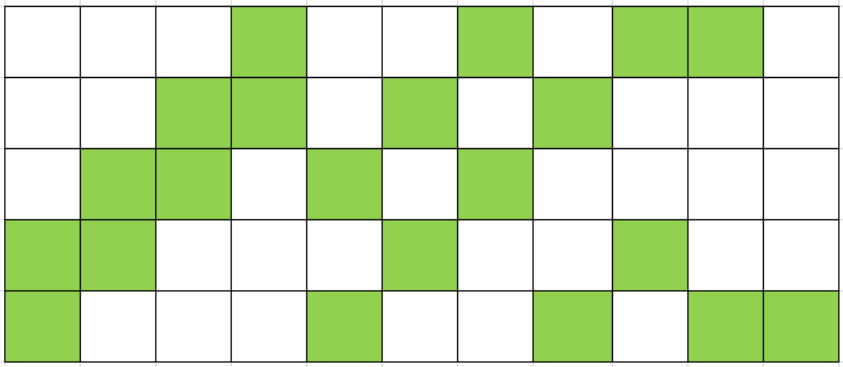
5x9(5 列 9 行)塗 18 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



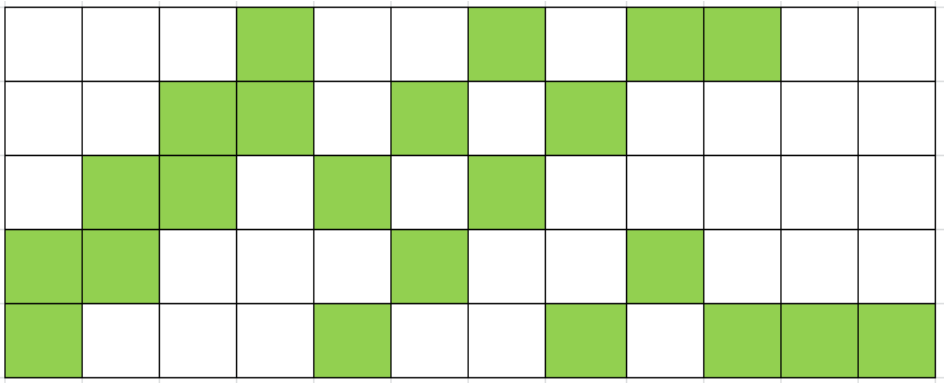
5x10(5 列 10 行)塗 20 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



5×11(5 列 11 行)塗 21 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



5×12(5 列 12 行)塗 22 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



5xn($n \geq 5$)：至少需要塗幾格才能保證必定存在有四角落皆塗色之矩形

n	5	6	7	8	9	10	11	12
至少需要塗幾格	13	15	16	18	19	21	22	23

以 5×10(5 列 10 行)為例說明如下：

[說明]：若只塗 20 格，已發現反例，若塗 21 格是否一定成立呢?

5×10：塗 21 格

										第一列塗格數
										第二列塗格數
										第三列塗格數
										第四列塗格數
										第五列塗格數

若 21＝10＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥3，故一定找得到四角同色的矩形
若 21＝9＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥3，也一定找得到四角同色的矩形
若 21＝8＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥4，也一定找得到四角同色的矩形
若 21＝7＋( )＋( )＋( )＋( )，且( )內有 5、6、7 的，一定找得到四角同色的矩形
故只需討論：21＝7＋4＋4＋4＋2 或 21＝7＋4＋4＋3＋3
若 21＝6＋( )＋( )＋( )＋( )，且( )內有 6 的，一定找得到四角同色的矩形
故只需討論：21＝6＋5＋5＋5＋0 或 21＝6＋5＋5＋4＋1 或 21＝6＋5＋5＋3＋2 或 21＝6＋5＋4＋4＋2 或 21＝6＋5＋4＋3＋3 或 21＝6＋4＋4＋4＋3
另外還需討論：21＝5＋5＋5＋5＋1 或 21＝5＋5＋5＋4＋2 或 21＝5＋5＋5＋3＋3 或 21＝5＋5＋4＋4＋3 或 21＝5＋4＋4＋4＋4

(1) 21＝7＋4＋4＋4＋2

●	●	●	●	●	●	●				7
						●	●	●	●	4
						X				4
										4
										2

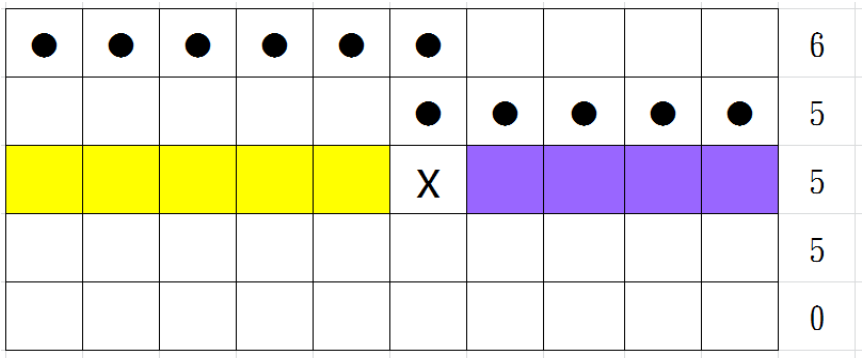
[說明]：不會出現反例。

(2) 21＝7＋4＋4＋3＋3

參考 (1)的圖

[說明]：不會出現反例。

(3) 21＝6＋5＋5＋5＋0



［說明］：不會出現反例。

（4） 21＝6＋5＋5＋4＋1

參考（3)的圖

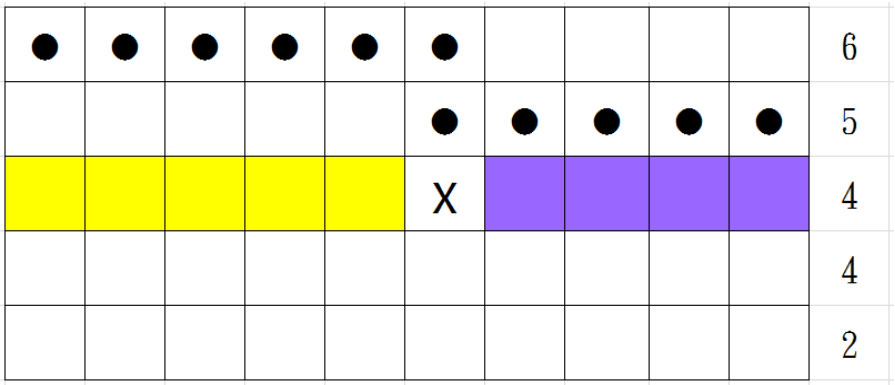
［說明］：不會出現反例。

（5） 21＝6＋5＋5＋3＋2

參考（3)的圖

［說明］：不會出現反例。

（6） 21＝6＋5＋4＋4＋2



［說明］：不會出現反例。

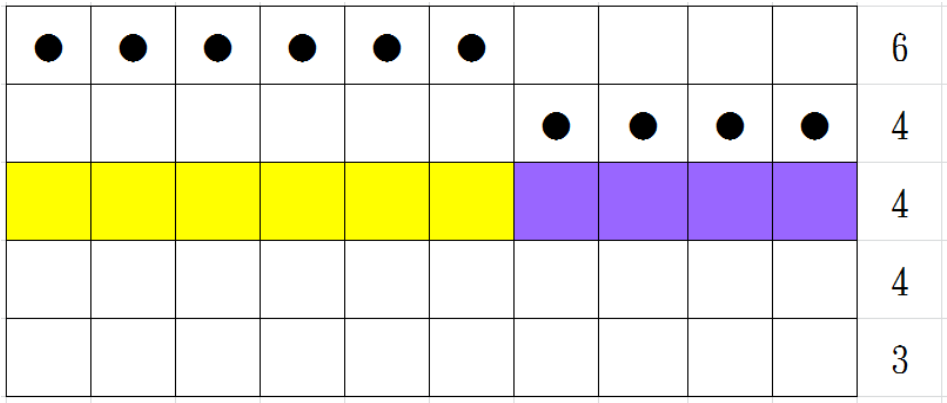
（7） 21＝6＋5＋4＋3＋3

參考（6)的圖

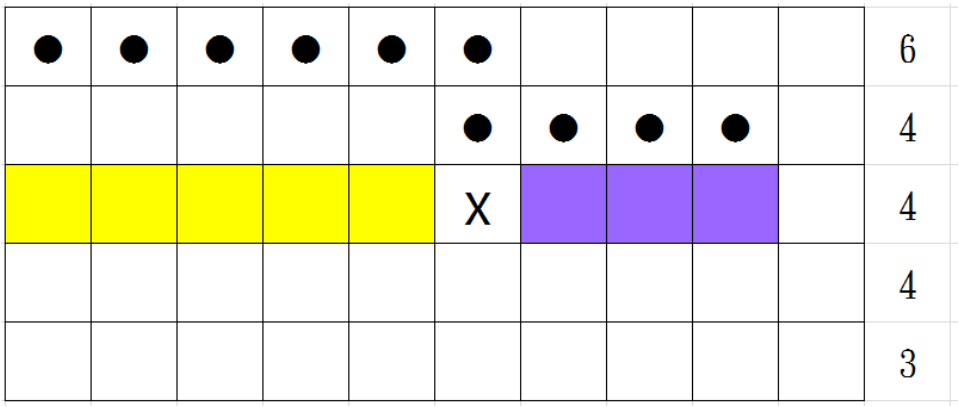
［說明］：不會出現反例。

（8） 21＝6＋4＋4＋4＋3

（a）



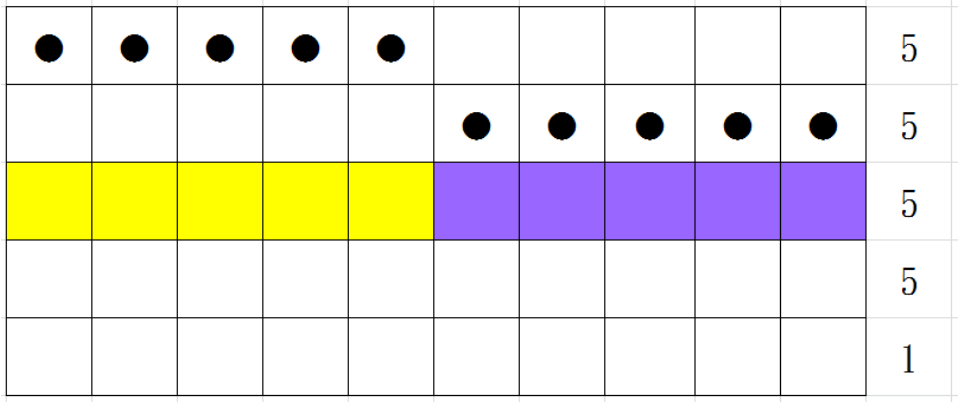
（b）



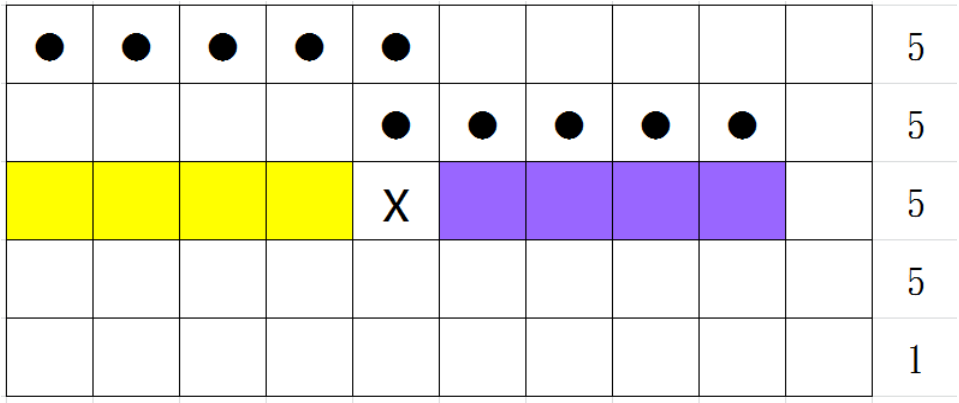
[說明]：都不會出現反例。

(9) 21＝5＋5＋5＋5＋1

(a)



(b)



[說明]：都不會出現反例。

(10) 21＝5＋5＋5＋4＋2

參考 (9)的圖

[說明]：不會出現反例。

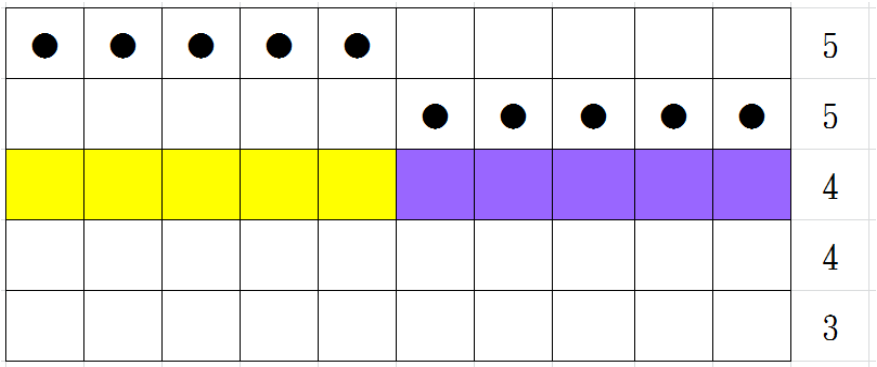
(11) 21＝5＋5＋5＋3＋3

參考 (9)的圖

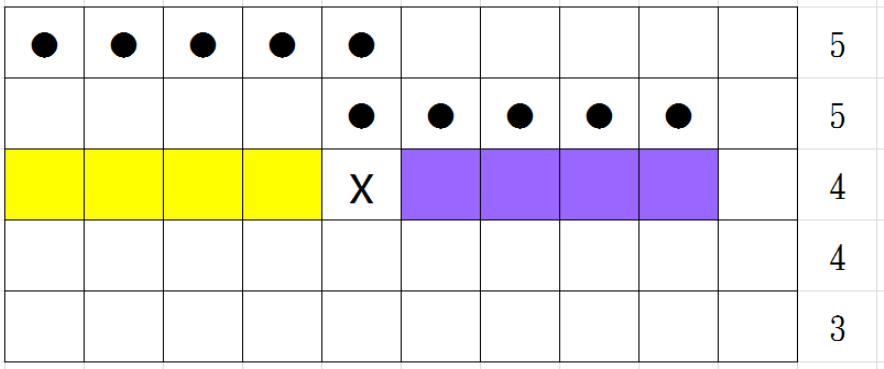
[說明]：不會出現反例。

(12) 21＝5＋5＋4＋4＋3

(a)



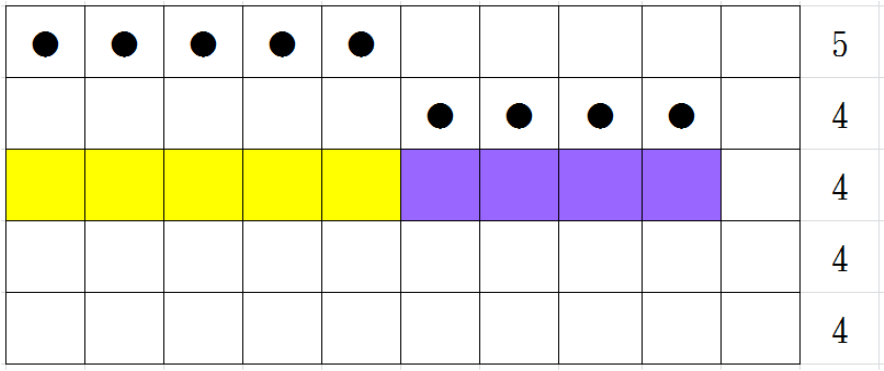
(b)



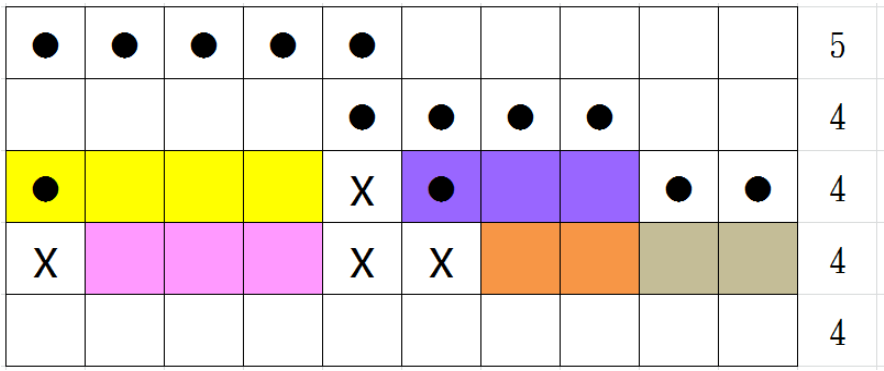
[說明]：都不會出現反例。

(13) $21=5+4+4+4+4$

(a)



(b)

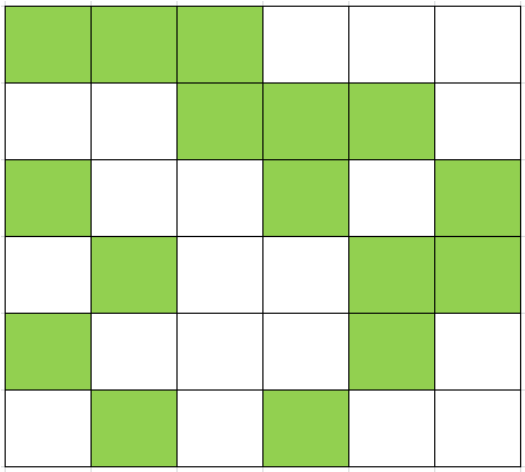


[說明]：都不會出現反例。

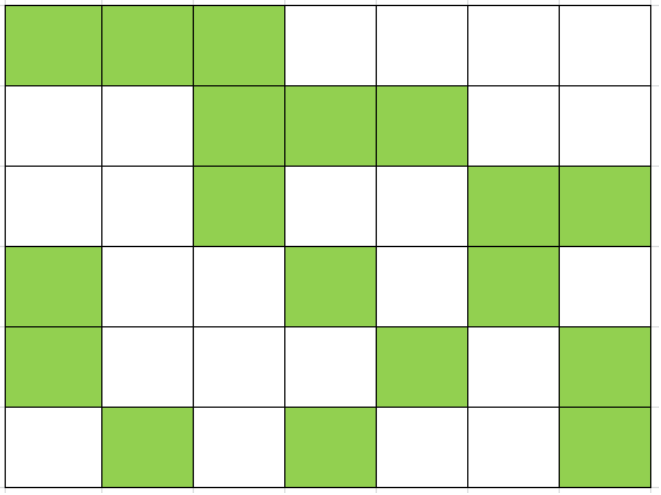
5. 六列的情形：6×n($n\geq 6$)　6 列 n 行

先列出反例

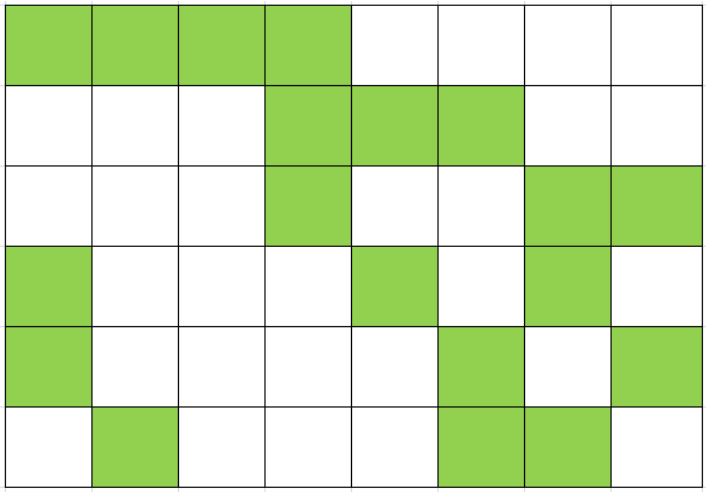
6×6(6 列 6 行)塗 16 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



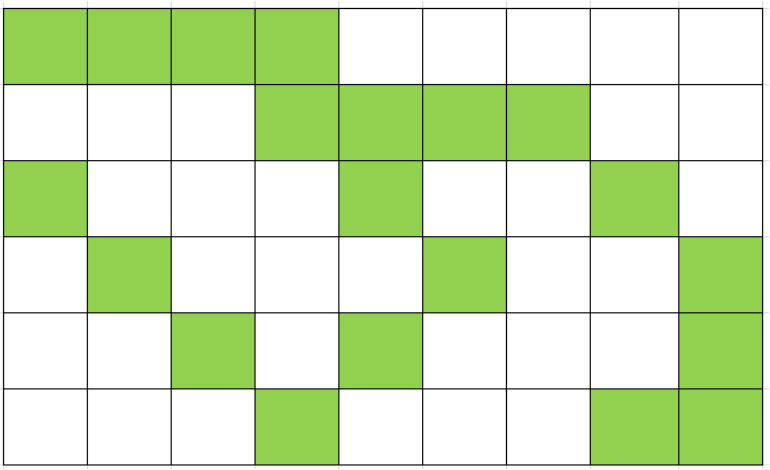
6×7(6 列 7 行)塗 18 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



6×8(6 列 8 行)塗 19 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



6×9(6 列 9 行)塗 20 格的反例：即不存在四角落皆塗色之矩形。



6×n($n \geq 6$)：至少需要塗幾格才能保證必定存在有四角落皆塗色之矩形

n	6	7	8	9	10
至少需要塗幾格	17	19	20	21	23

(A)以 6×7(6 列 7 行)為例說明找反例和確定塗最少格數的方法：

[說明]：

(A)-1、6×7(6 列 7 行)塗 18 格

若 $18=7+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，則( )內必有一數≥3，故一定成立

若 $18=6+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，則( )內必有一數≥3，也一定成立

若 $18=5+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，且( )內有 4、5 的，也一定成立

故只需討論：$18=5+3+3+3+3+1$ 或 $18=5+3+3+3+2+2$

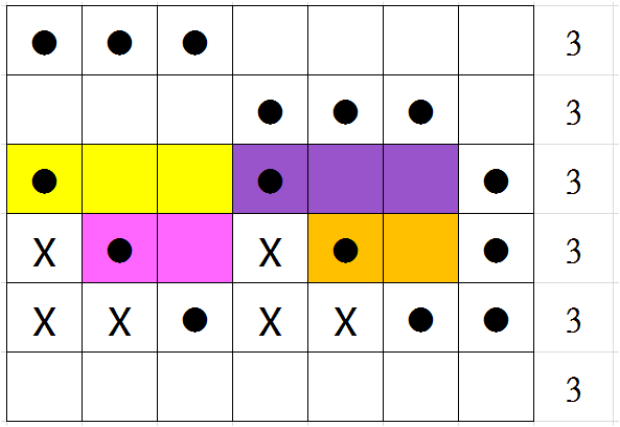
另外還需討論：$18=4+4+4+4+2+0$ 或 $18=4+4+4+4+1+1$ 或 $18=4+4+4+3+3+0$ 或 $18=4+4+4+3+2+1$ 或 $18=4+4+4+2+2+2$ 或 $18=4+4+3+3+3+1$ 或 $18=4+4+3+3+2+2$ 或 $18=4+3+3+3+3+2$

還有 $18=3+3+3+3+3+3$

前面的情況都很明顯成立，最後一個 $18=3+3+3+3+3+3$ 較不明顯，說明如下：

$18=3+3+3+3+3+3$

(a)



不會出現反例

(b)第三列的排法共有三種

(b)-1

●	●	●					3
		●	●	●			3
		●			●	●	3
●		X	●		●		3
●		X		●		●	3
	●	X	●			●	3

第一~第四列的排法是固定的，我們將第五列和第六列有可能的情況一一列出，再調整，最後**形成反例**。

(b)-2

●	●	●					3
		●	●	●			3
●					●	●	3
		X					3
							3
							3

因已形成反例，故不再討論。

(b)-3

●	●	●					3
		●	●	●			3
●			●		●		3
							3
							3
							3

因已形成反例，故不再討論。

故 6x7(6 列 7 行)塗 18 格時不能保證必定存在有四角落皆塗色之矩形。(有反例)

(A)-2、6×7(6 列 7 行)塗 19 格

若 $19=7+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，則( )內必有一數≥3，故一定成立

若 $19=6+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，則( )內必有一數≥3，也一定成立

若 $19=5+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，且( )內有 4、5 的，也一定成立

故只需討論：$19=5+3+3+3+3+2$

另外還需討論：$19=4+4+4+4+3+0$ 或 $19=4+4+4+4+2+1$ 或 $19=4+4+4+3+3+1$ 或 $19=4+4+4+3+2+2$ 或 $19=4+4+3+3+3+2$ 或 $19=4+3+3+3+3+3$

前面的情況都很明顯成立，最後一個 $19=4+3+3+3+3+3$ 較不明顯，說明如下：

$19=4+3+3+3+3+3$

(a)

●	●	●	●				4
				●	●	●	3
							3
							3
							3
							3

不會出現反例

(b)

●	●	●	●				4
			●	●	●		3
●			X	●		●	3
X	●		X	X	●	●	3
X	X	X	X	X	X	X	3
							3

不會出現反例

故 6×7(6 列 7 行)塗 19 格時必能保證存在有四角落皆塗色之矩形。

(B)6×10(6 列 10 行)為例說明找反例和確定塗最少格數的方法：

[說明]：

(B)-1、6×10(6 列 10 行) 塗 22 格

我們有找到 6×10(6 列 10 行)塗 21 格的反例如下，若塗 22 格是否一定成立呢?

●	●	●	●							4
			●	●	●	●				4
			●				●	●	●	4
●			X	●			●			3
	●				●			●		3
		●				●			●	3

若 $22=10+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，則( )內必有一數≥3，故一定成立

若 $22=9+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，則( )內必有一數≥3，也一定成立

若 $22=8+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，且( )內有 4、5、6、7、8 的，也一定成立

故只需討論：$22=8+3+3+3+3+2$

若 $22=7+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，且( )內有 5、6、7 的，也一定成立

故只需討論：$22=7+4+4+4+3+0$ 或 $22=7+4+4+4+2+1$ 或 $22=7+4+4+3+3+1$ 或 $22=7+4+4+3+2+2$ 或 $22=7+4+3+3+3+2$ 或 $22=7+3+3+3+3+3$

若 $22=6+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )+(\ )$，且( )內有 6 的，也一定成立

故只需討論：$22=6+5+5+5+1+0$ 或 $22=6+5+5+4+2+0$ 或 $22=6+5+5+4+1+1$ 或 $22=6+5+5+3+3+0$ 或 $22=6+5+5+3+2+1$ 或 $22=6+5+5+2+2+2$ 或 $22=6+5+4+4+3+0$ 或 $22=6+5+4+4+2+1$ 或 $22=6+5+4+3+3+1$ 或 $22=6+5+4+3+2+2$ 或 $22=6+5+3+3+3+2$ 或 $22=6+4+4+4+4+0$ 或 $22=6+4+4+4+3+1$ 或 $22=6+4+4+4+2+2$ 或 $22=6+4+4+3+3+2$ 或 $22=6+4+3+3+3+3$

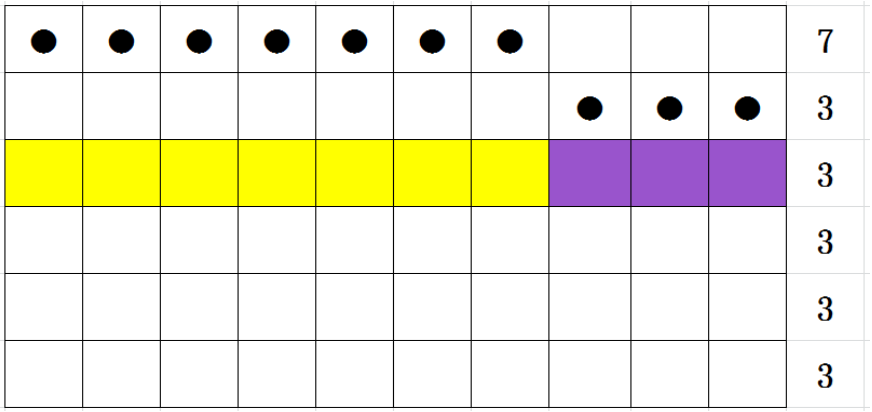
另外還需討論：$22=5+5+5+5+2+0$ 或 $22=5+5+5+5+1+1$ 或 $22=5+5+5+4+3+0$ 或 $22=5+5+5+4+2+1$ 或 $22=5+5+5+3+3+1$ 或 $22=5+5+5+3+2+2$ 或 $22=5+5+4+4+4+0$ 或 $22=5+5+4+4+3+1$ 或 $22=5+5+4+4+2+2$ 或 $22=5+5+4+3+3+2$ 或 $22=5+5+3+3+3+3$ 或 $22=5+4+4+4+4+1$ 或 $22=5+4+4+4+3+2$ 或 $22=5+4+4+3+3+3$

還有 $22=4+4+4+4+4+2$ 或 $22=4+4+4+4+3+3$

因為有的很明顯成立，我們擇取較不明顯的說明如下：

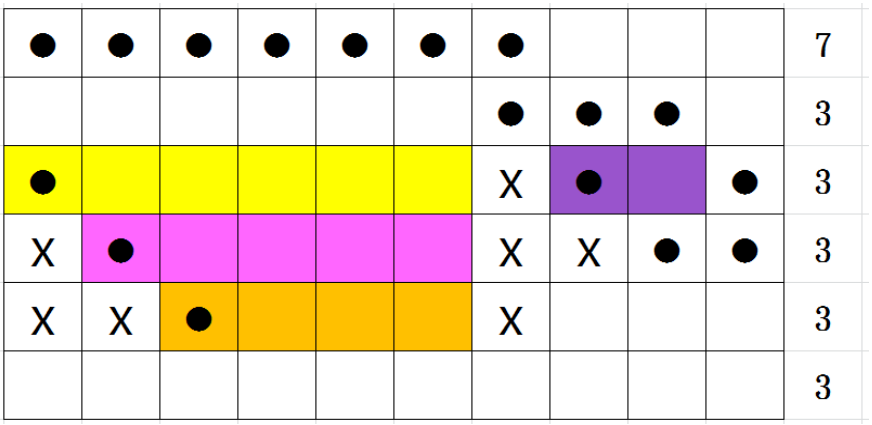
(1) $22=7+3+3+3+3+3$

(a)



不會形成反例。

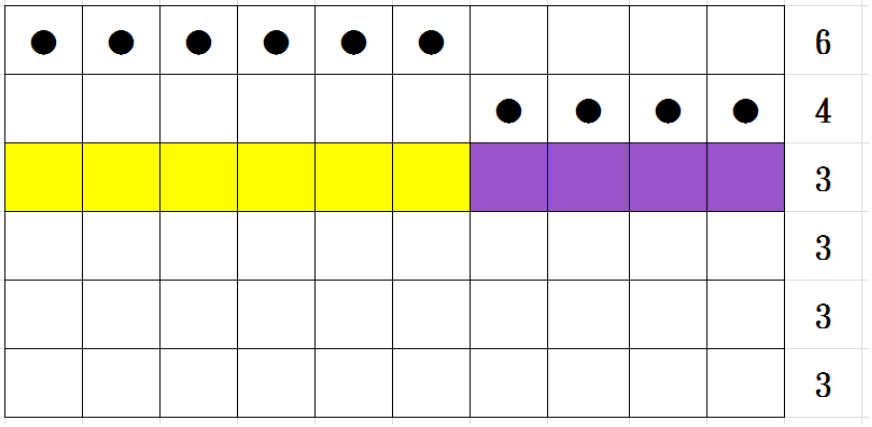
(b)



到第五列一定成立，不會形成反例。

(2) $22=6+4+3+3+3+3$

(a)



不會形成反例。

(b)

●	●	●	●	●	●					6
					●	●	●	●		4
●					X	●			●	3
X	●				X	X	●		●	3
X	X	●			X	X	X	●	●	3
X					X				X	3

到第六列一定成立，不會形成反例。

(3) $22=5+5+3+3+3+3$

(a)

●	●	●	●	●						5
					●	●	●	●	●	5
										3
										3
										3
										3

不會形成反例。

(b)

●	●	●	●	●						5
				●	●	●	●	●		5
●				X	●				●	3
X	●			X	X	●			●	3
X	X	●		X	X	X	●		●	3
X	X	X	●	X	X			●	●	3

說明：**形成反例**。

(4) $22=5+4+4+4+4+1$

(5) $22=5+4+4+4+3+2$

(6) $22=5+4+4+3+3+3$

(7) $22=4+4+4+4+4+2$

(8) $22=4+4+4+4+3+3$

(4)~(8)，說明省略(因已形成反例)

(B)-2、6×10(6 列 10 行)，若塗 23 格是否一定成立呢?

若 23＝10＋( )＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥3，故一定成立

若 23＝9＋( )＋( )＋( )＋( )＋( )，則( )內必有一數≥3，也一定成立

若 23＝8＋( )＋( )＋( )＋( )＋( )，且( )內有 4、5、6、7、8 的，也一定成立

故只需討論：23＝8＋3＋3＋3＋3＋3

若 23＝7＋( )＋( )＋( )＋( )＋( )，且( )內有 5、6、7 的，也一定成立

故只需討論：23＝7＋4＋4＋4＋4＋0 或 23＝7＋4＋4＋4＋3＋1 或

23＝7＋4＋4＋4＋2＋2 或 23＝7＋4＋4＋3＋3＋2 或 23＝7＋4＋3＋3＋3＋3

若 23＝6＋( )＋( )＋( )＋( )＋( )，且( )內有 6 的，也一定成立

故只需討論：23＝6＋5＋5＋5＋2＋0 或 23＝6＋5＋5＋5＋1＋1 或

23＝6＋5＋5＋4＋3＋0 或 23＝6＋5＋5＋4＋2＋1 或 23＝6＋5＋5＋3＋3＋1 或

23＝6＋5＋5＋3＋2＋2 或 23＝6＋5＋4＋4＋4＋0 或 23＝6＋5＋4＋4＋3＋1 或

23＝6＋5＋4＋4＋2＋2 或 23＝6＋5＋4＋3＋3＋2 或 23＝6＋5＋3＋3＋3＋3 或

23＝6＋4＋4＋4＋4＋1 或 23＝6＋4＋4＋4＋3＋2 或 23＝6＋4＋4＋3＋3＋3

另外還需討論：23＝5＋5＋5＋5＋3＋0 或 23＝5＋5＋5＋5＋2＋1 或

23＝5＋5＋5＋4＋4＋0 或 23＝5＋5＋5＋4＋3＋1 或 23＝5＋5＋5＋4＋2＋2 或

23＝5＋5＋5＋3＋3＋2 或 23＝5＋5＋4＋4＋4＋1 或 23＝5＋5＋4＋4＋3＋2 或

23＝5＋5＋4＋3＋3＋3 或 23＝5＋4＋4＋4＋4＋2 或 23＝5＋4＋4＋4＋3＋3

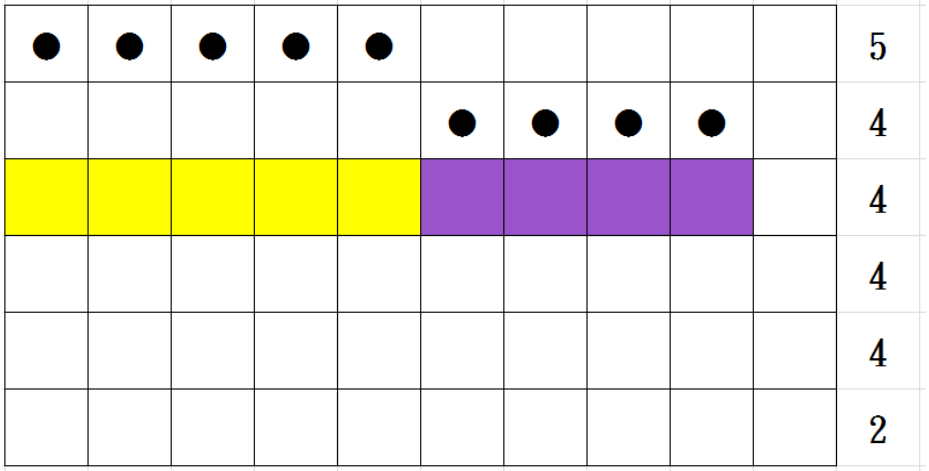
還有 23＝4＋4＋4＋4＋4＋3

前面的情況都可仿照 6×10(6 列 10 行)塗 22 格的過程，說明一定會成立；

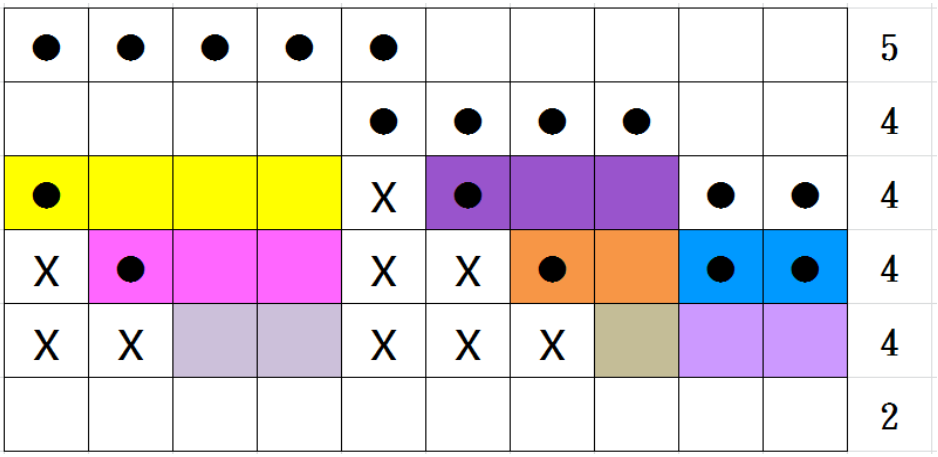
最後三個個情況說明如下：

(1) 23＝5＋4＋4＋4＋4＋2

(a)



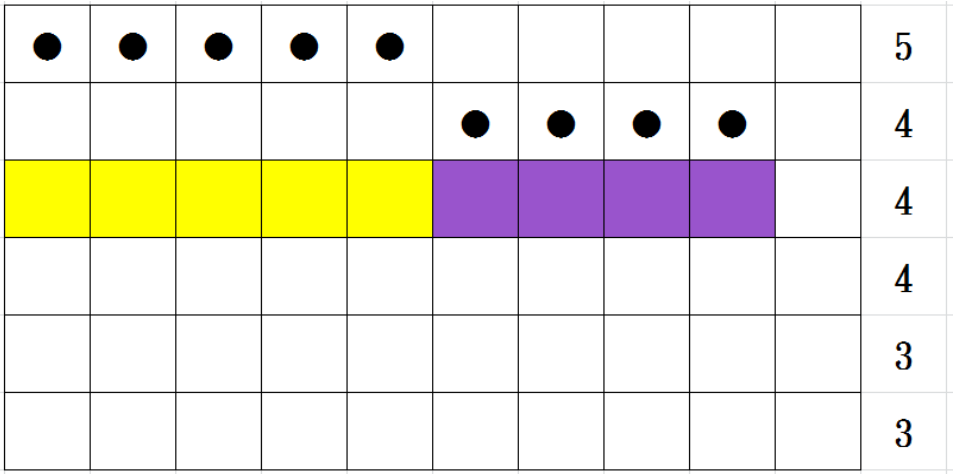
(b)



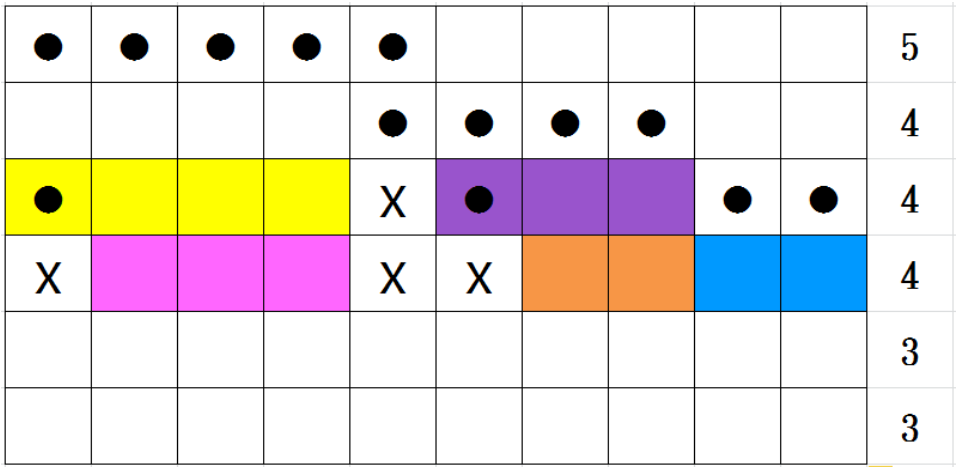
都不會形成反例。

(2) $23=5+4+4+4+3+3$

(a)



(b)

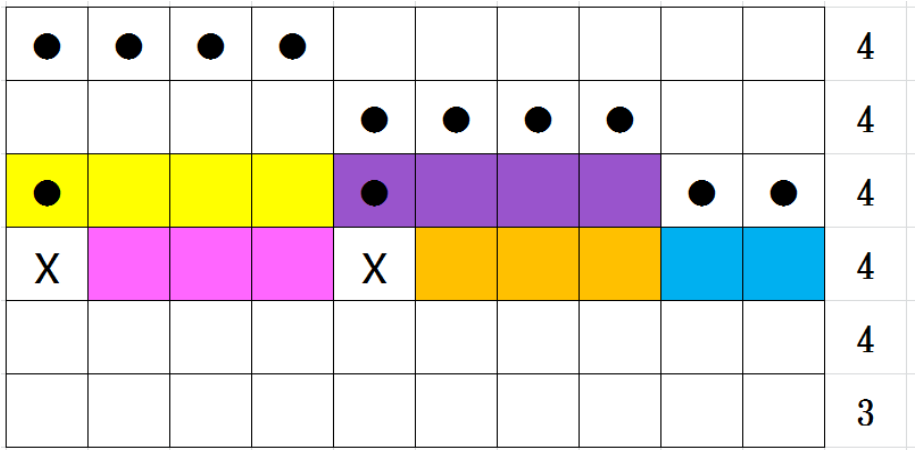


都不會形成反例。

(3) $23=4+4+4+4+4+3$

第二列有 2 種塗法，分(a)、(b)

(a)

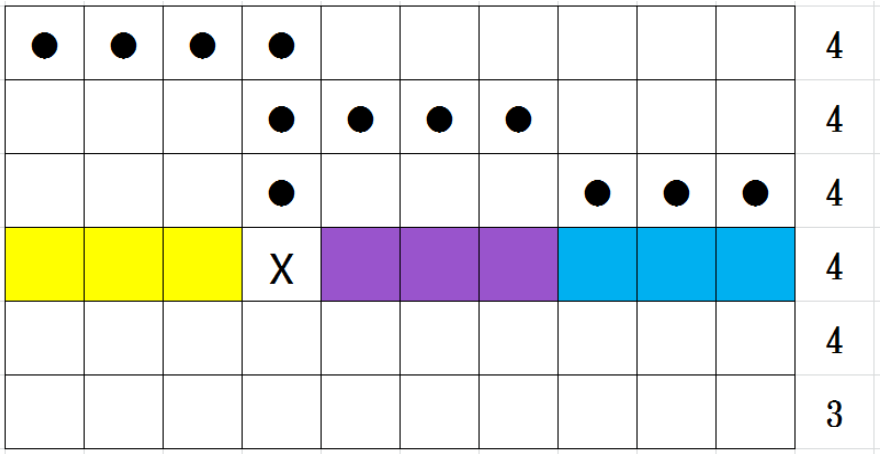


不會形成反例。

(b)

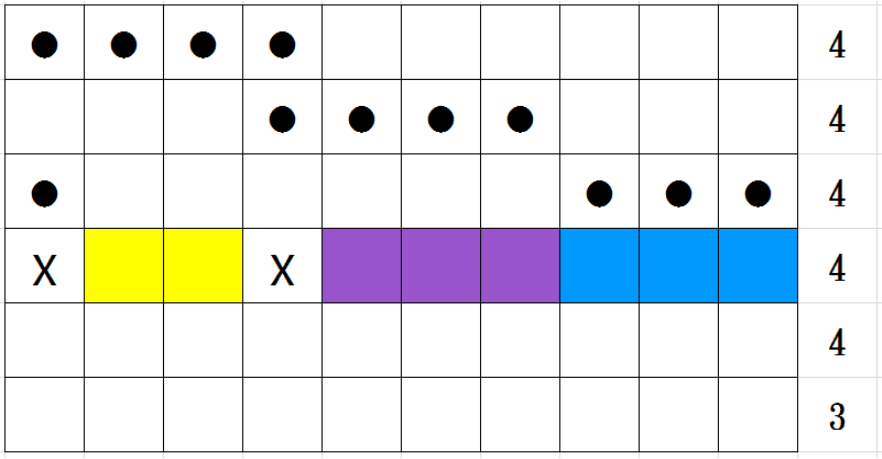
第三列有 4 種塗法，分(b)-1、(b)-2、(b)-3、(b)-4

(b)-1



不會形成反例。

(b)-2



不會形成反例。

(b)-3

●	●	●	●							4
			●	●	●	●				4
				●			●	●	●	4
			X	X						4
										4
										3

不會形成反例。

(b)-4

●	●	●	●							4
			●	●	●	●				4
●				●			●	●		4
X	●		X	X	●		●		●	4
X		●	X	X		●		●	●	4
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	3

①：往右可配⑥⑦⑩→可配出①⑥⑦或①⑥⑩或①⑦⑩

②：往右可配⑤⑦⑨→可配出②⑤⑦或②⑤⑨或②⑦⑨

③：往右可配⑤⑥⑧→可配出③⑤⑥或③⑤⑧或③⑥⑧

④：往右可配⑧⑨⑩→可配出④⑧⑨或④⑧⑩或④⑨⑩

⑤：往右可配⑨

⑥：往右可配⑨

⑦：往右可配⑧

都不會形成反例。

所以 6x10(6 列 10 行)的矩形方格紙，塗 23 格一定可以找到四角均塗色的矩形。

三、將原問題改為雙人遊戲：兩人各代表一個顏色，輪流塗色，先讓一個矩形的四角落小方格同色即獲勝。

為了探討這個題目的概念，我們組員曾經很認真地玩了一陣子這個遊戲，這個遊戲有點像「井字遊戲」或「五子棋」之類的遊戲，因為我們是利用棋子代表塗色的。在玩這個遊戲時，有時自己應該下在哪個位置就能使己方完成「有四角同色的矩形」都沒注意到而錯失獲勝良機，等到自己發現時已被對方擋掉了，真可惜。

不過，這個遊戲是一個好玩的遊戲，可以訓練腦力和專注力。

伍、研究結果：

我們將已完成的結果表列出來：

列\行	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	4	5	6	7	8	9	10	11				
3		7	8	9	10	11	12	13	14			
4			10	11	13	14	15	16	17	18		
5				13	15	16	18	19	21	22	23	
6					17	19	20	21	23			

陸、研究討論及展望：

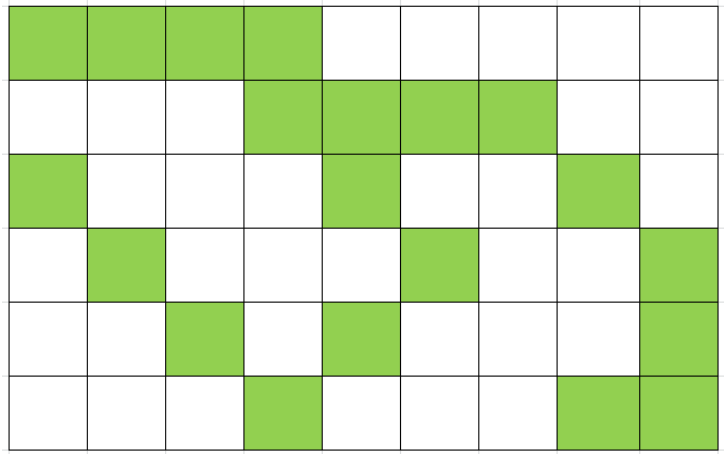
一、找反例較快速的方法：

以 6×9(6 列 9 行)塗 20 格為例，

先計算：$20 \div 6 = 3.....2$（因為越平均越容易形成反例）

$20 = 4+4+3+3+3+3$

然後再試排，調整即得



二、從研究結果中知道，總方格數越多，為了保證存在四角同色的矩形，必須塗色的門檻也越多格，但似乎不太有規律，有沒有辦法找出規律；或者能用行數或列數寫出一個算式馬上算出答案來，是往後可以討論的方向。

柒、參考資料：

一、嚴鎮軍主編－初中數學競賽教程－1995 年 10 月初版二刷－出版地：台灣－九章出版社出版－1993 年 8 月初版一刷

二、沈康身著－歷史數學名題賞析－2011 年 1 月初版一刷－出版地：台灣－稻田出版有限公司出版－1993 年 8 月初版一刷