# 嘉義市第三十七屆中小學科學展覽會

# 作 品 說 明 書

科　　別：數學

組　　別：國中組

作品名稱：標好標滿—塔形數獨

關 鍵 詞：變形數獨、排列組合、幾何圖形

編　　號：

# 標好標滿—塔形數獨

## 摘要

有 n 條邊，兩兩相交，每邊上各有(n-1)個交點，並於其中填入數字 1~(n-1)，不可重複。畫得符合上述情形之圖形為星形及塔型。但因星形繪製後難呈現，故則塔形進行後續研究。依全體格數及每一數字的數目之干係，證得當 n 為偶數時方有解。填出當 n=4、6、8、10、12、14、16 時其解分別為何，經推導演算後求得最佳解法(快速解)，更進一步求得公式，係以公式進行推廣，得出當 n 為任何值時，填入第一種數字的所有方法數。

# 壹、研究動機

報章雜誌上的益智遊戲總是趣味橫生，絞盡腦汁之餘亦能享受到片刻歡愉時光。一次，偶然見到一道題，看似簡單，卻毫不容易，激起我們想與其一決高下的心情。

該題大致如下：

> 有 4 條線段，兩兩相交，若想在每個交點上標一個數字，讓沿著任何一條直線上的 3 個交點都剛好出現 1、2、3 各一次，你可以做到嗎？

拿起紙筆畫圖嚐試，我們一下子就成功了，帶著滿意的心情望著求出的解，忽然想到：若線段不只 4 條呢?是否有能滿足其規定的解，若為任意的正整數 $n$（$n \geq 2$），n 條線兩兩相交時，皆能得出其解嗎? n 條線時會有規律圖形嗎？...懷著種種疑問及滿腹好奇的心，我們開始了科展研究！

# 貳、研究目的

一、畫出兩兩相交於一點（任兩條相交於一點，任三條線不共點）的 n 條線圖形（$n \in \mathrm{N}, n \geq 2$）。

二、探討 n 條線圖形（$n \in \mathrm{N}, n \geq 2$）情形，是否皆可在每一條線上的交點上，不重複的填完所有數字。何種情形是無法填出正確的解？

三、探討數字填入圖形後對稱的情形及特性。

四、找出標準快速解法。

五、探討 n（$n \in \mathrm{N}, n \geq 2$）條線圖形的解的個數及關係。

# 參、研究設備及器材

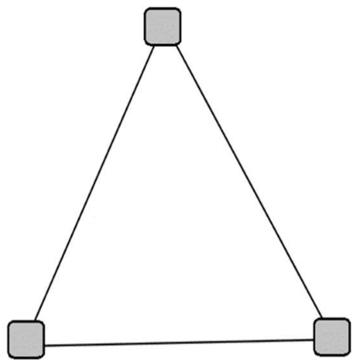
紙、筆、尺、電腦、GeoGebra 軟體

# 肆、研究過程與方法

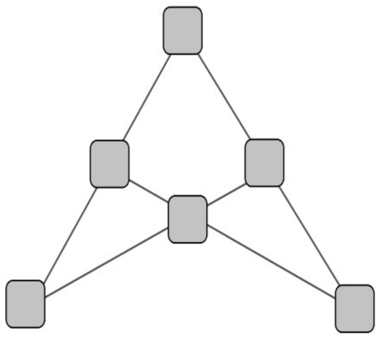
## 一、畫出圖形

首先，我們先畫出三條線的圖形是三角形（圖一），而四條線的圖（如圖二）像是個高塔，而五條線的也是（如圖三），我們不斷畫下去，發現所有圖形都可以用這種方式填出來。

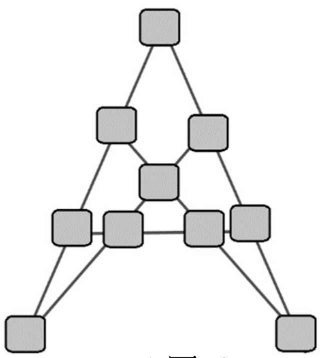
接著，我們想說會不會有其他種形狀方式也能畫出這種所有線皆兩兩相交於一點的圖形，嘗試後我們發現，星形也能滿足條件（如圖四）。但當我們想畫六條線的星形時，我們發現畫出來需要點時間，而且我們發現星形和高塔形的差異，只是線移了位置，所以我們最後決定使用高塔形來進行研究。



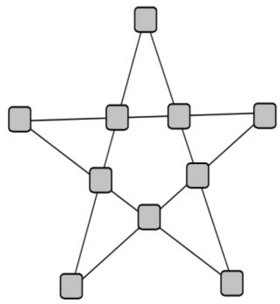
▲圖一



▲圖二



▲圖三



▲圖四

## 二、探討 n 條線圖形（$n \in \mathrm{N}, n \geq 2$）情形，是否皆可在每一條線上的交點上，不重複的填完所有數字。何種情形是無法填出正確的解？

若有奇數$(2m+1)$條直線（$m \in \mathrm{N}$ or $0$），兩兩相交，則一條線上有 2m 個點，整個圖形上共有$m(2m+1)$個點。因為，數字有 2m 種，每個交點空格填入一個數字，需填滿，且每種數字個數相等。所以，$2m \mid m(2m+1)$，$2 \mid 2m+1$，但 m 為大於 1 的正整數，不合理。故若 n 為奇數時，圖形無法成功填入。

## 三、探討數字填入圖形後對稱的情形及特性

因嘗試過程中發現，部分填出的結果為數字左右對稱形，會和 n 有關嗎？

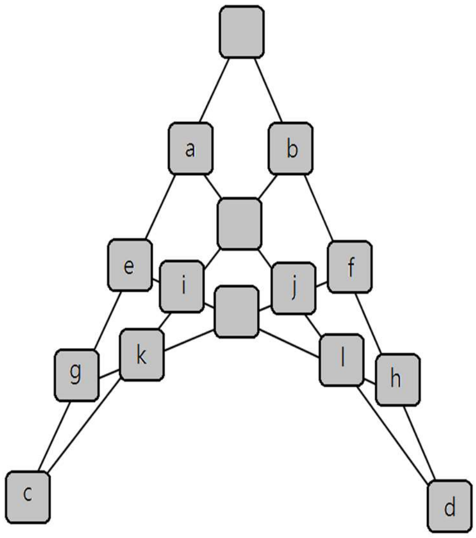
先假設有 n 條線，數字有(n-1)種，每一種數字有$\frac{n(n-1)}{2} \div (n-1) = \frac{n}{2}$個。

若數字對稱，則 $2 \mid \frac{n}{2}$，$4 \mid n$。故若填出的結果為數字對稱，線的數量必為 4 的倍數。

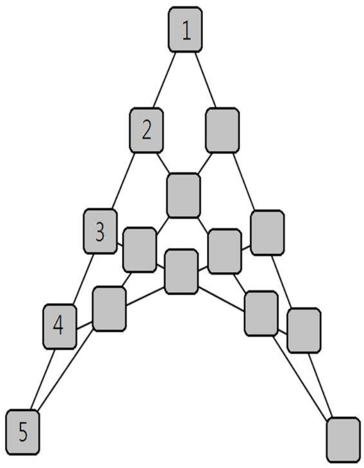
四、找出標準快速解法

(一) 以 n=6 為例

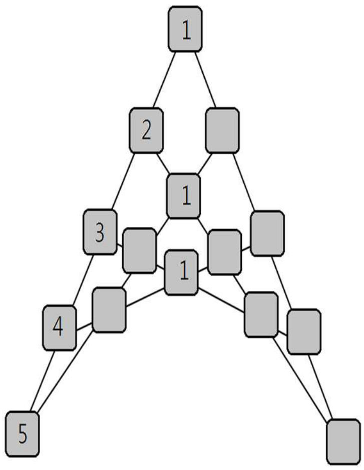
首先，我們在找規律的同時，發現圖形中的每個梯形(*abcd*、efgh、ijkl)如圖五，相加起來的和，每個梯形都一樣($2n+2$，$n$ 為線條數)。所以我們運用這種特性，找出標準快速解法。



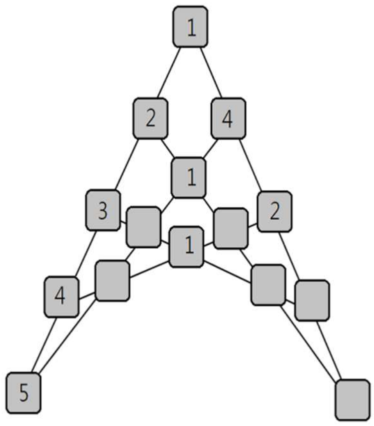

1. 先將最左邊的邊線，依序填上 1 到 $n$-1（如圖步驟 1）
2. 在中間那一行填上 1（如步驟 2）
3. 在尚未填的最外面一邊從最上面到中間填依序填上($n$-2)到 2 的偶數（如步驟 3）
4. 在那條現在從最下面到中間，依序填入 3 到 $n$-1 的奇數（如步驟 4）
5. 在左半邊的一直線上填上同一個數字(如圖 5）
6. 在數字的對面填上 $n$+1（如圖 6），故得標準快速解。



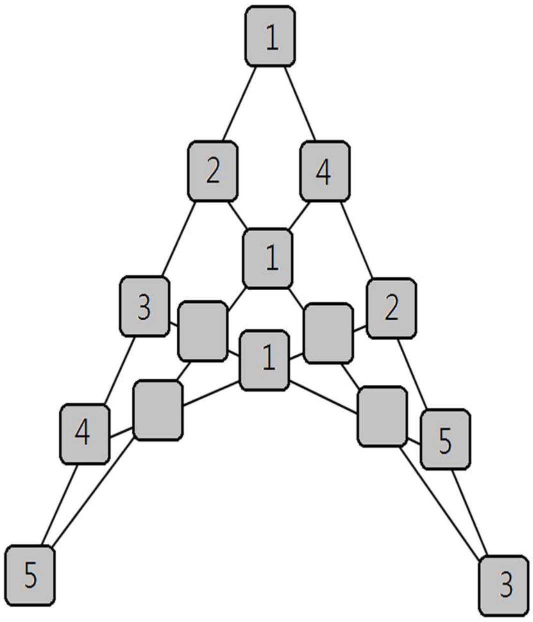

▲步驟 1



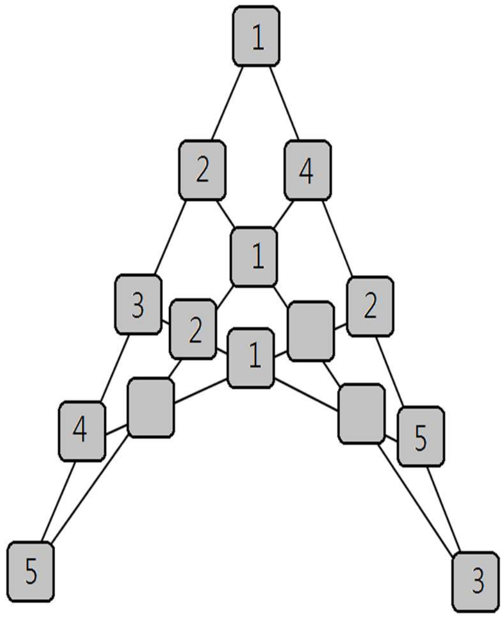

▲步驟 2



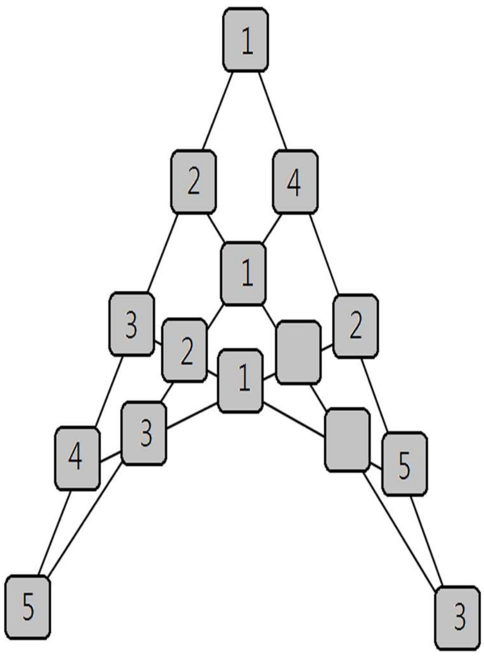

▲步驟 3



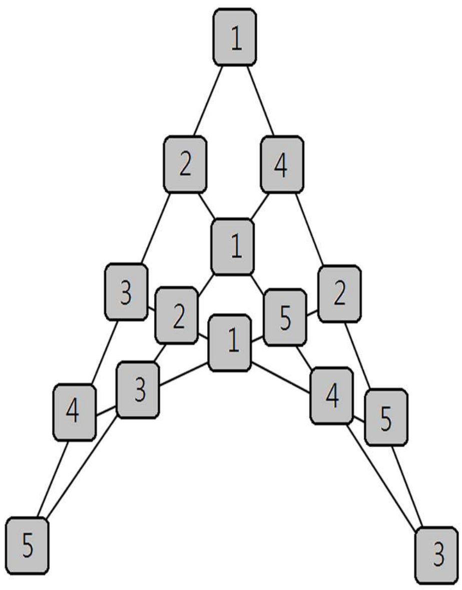

▲步驟 4




▲步驟 5-1



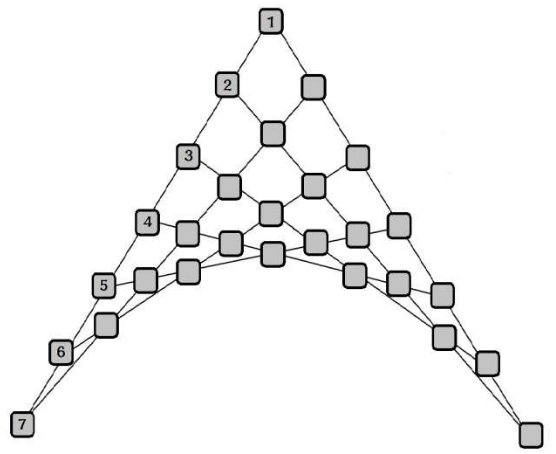
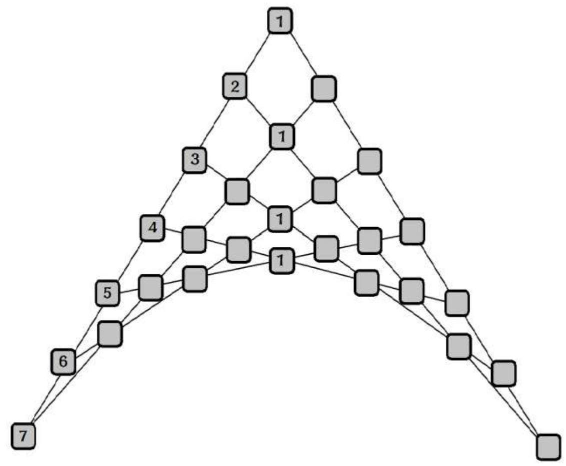
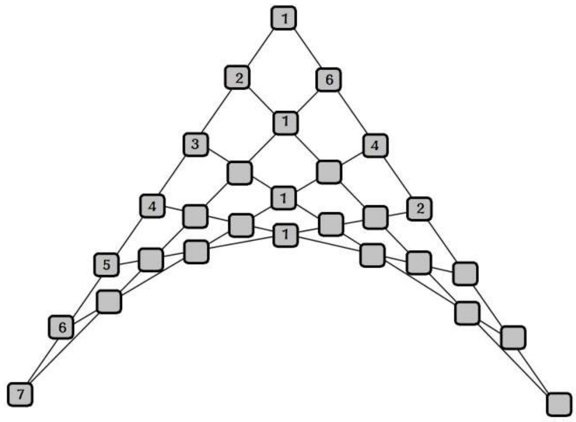
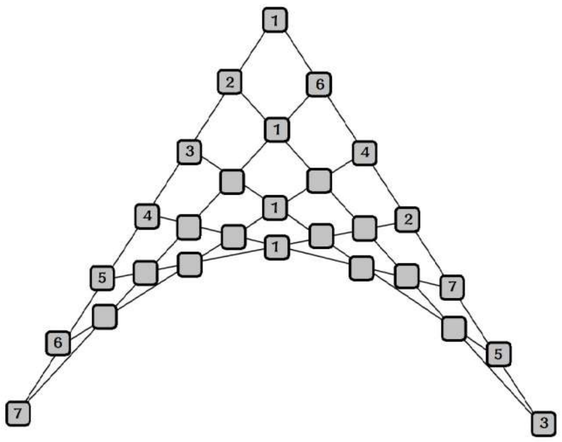
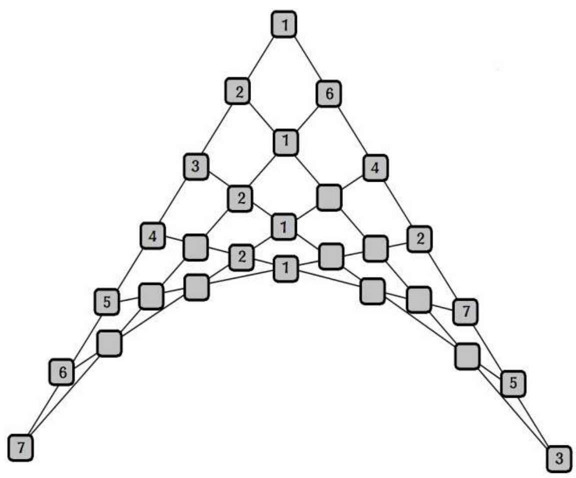
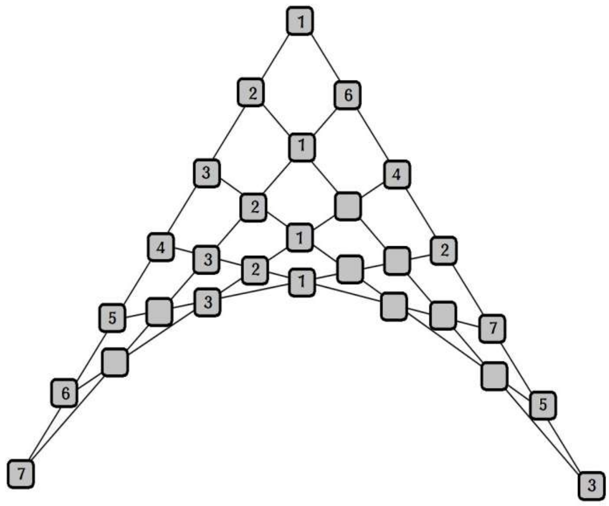

▲步驟 5-2

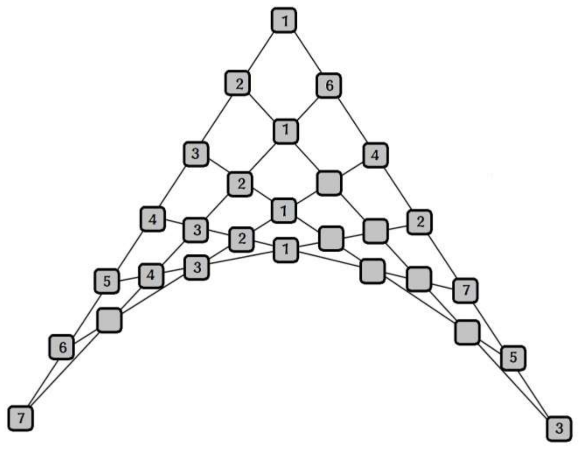



▲步驟 6

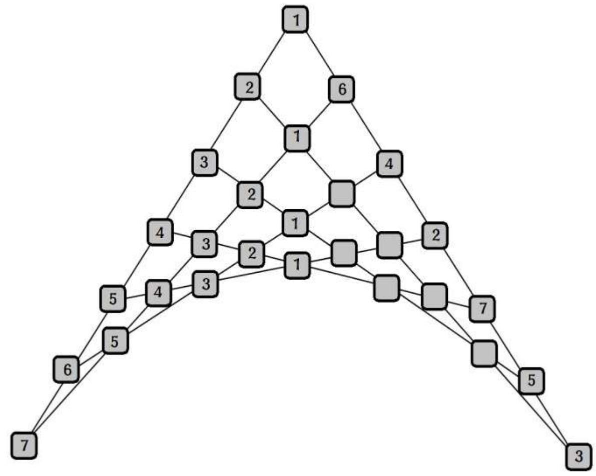
對於任意的偶數條線相交，這個方法都可以使用。

(二) 以 n=8 為例

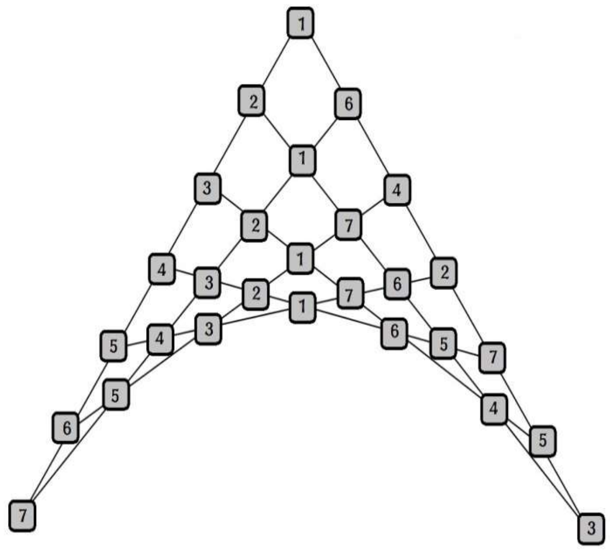
| | |
|---|---|
|  ▲步驟 8-1 |  ▲步驟 8-2 |
|  ▲步驟 8-3 |  ▲步驟 8-4 |
|  ▲步驟 8-5 |  ▲步驟 8-6 |



▲步驟 8-7



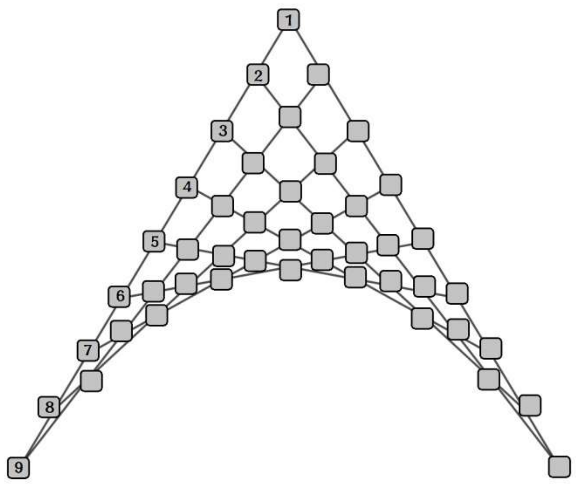
▲步驟 8-8



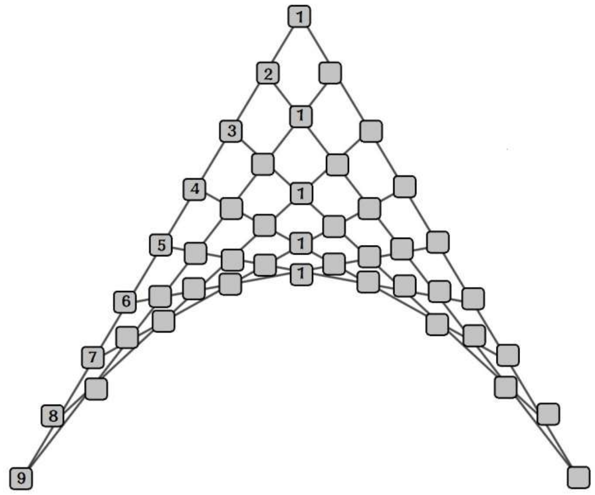
▲步驟 8-9

對於任意的偶數條線相交，這個標準快速解方法都可以使用。

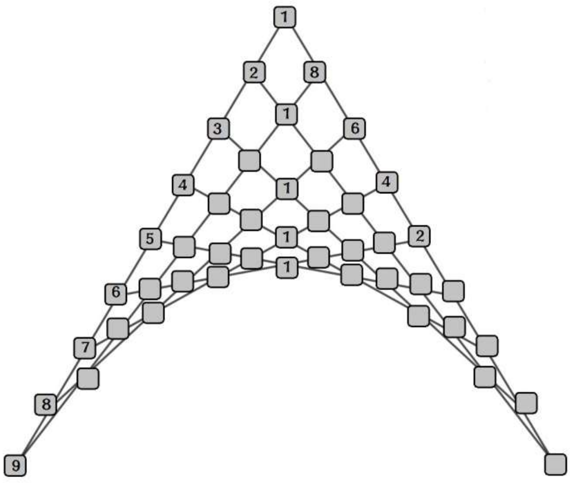
(三) 以 n=10 為例



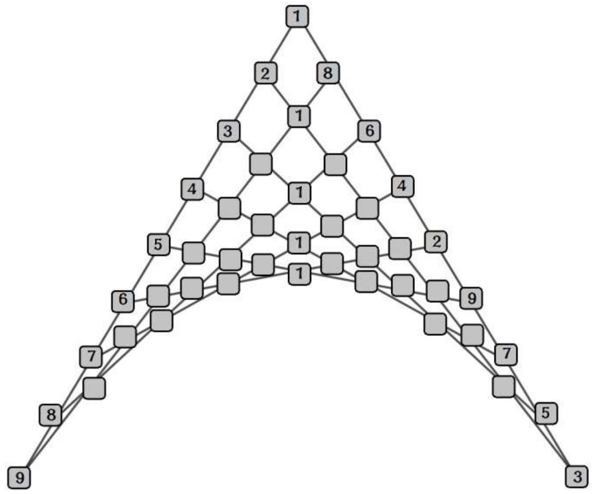
▲步驟 10-1



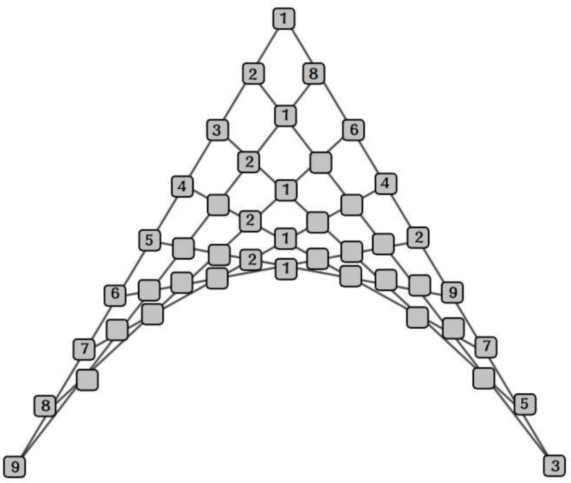
▲步驟 10-2



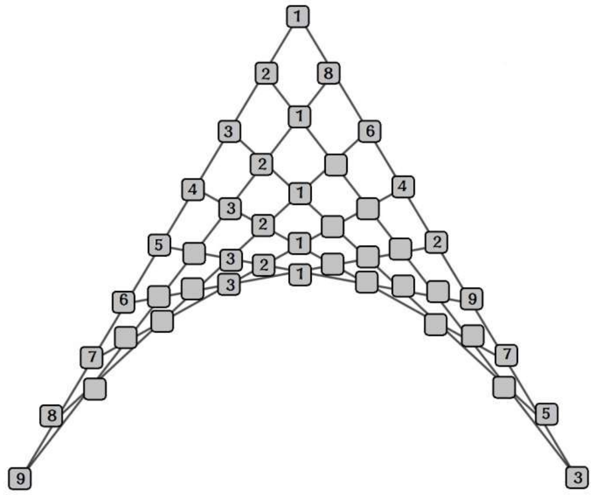
▲步驟 10-3



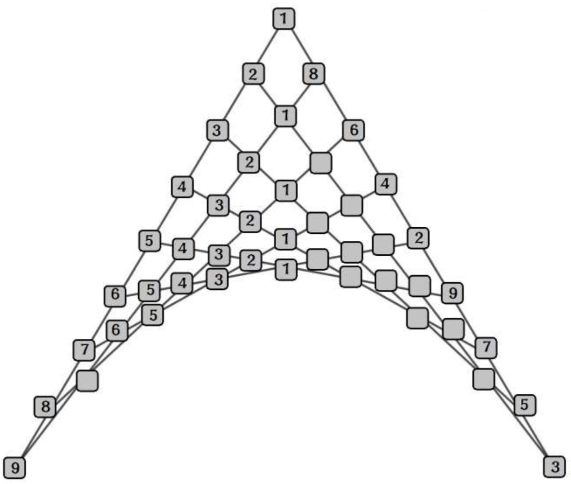
▲步驟 10-4



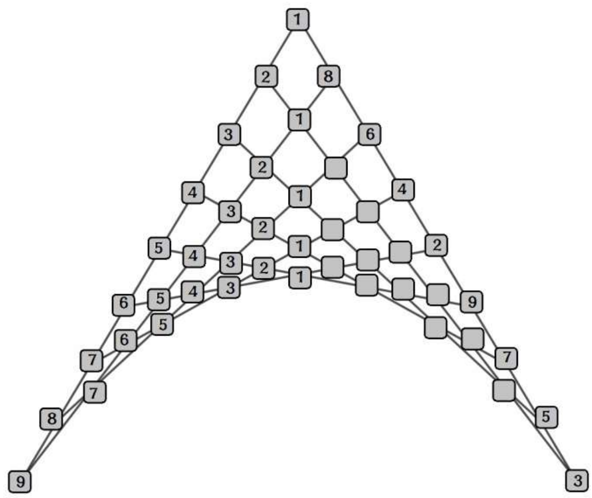
▲步驟 10-5



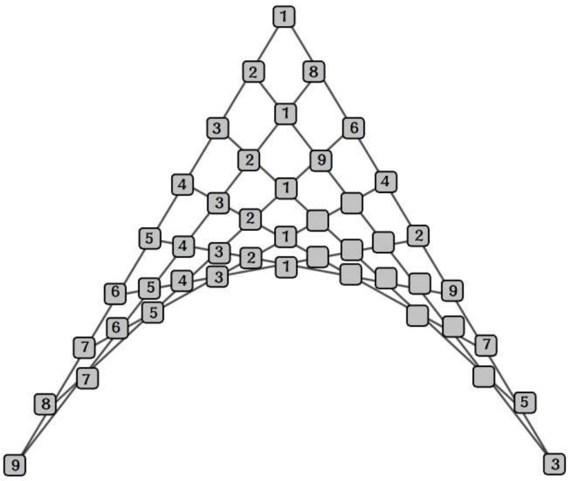
▲步驟 10-6



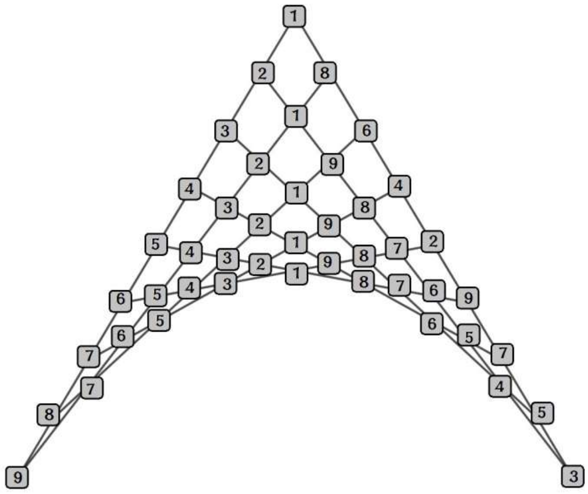
▲步驟 10-7



▲步驟 10-8

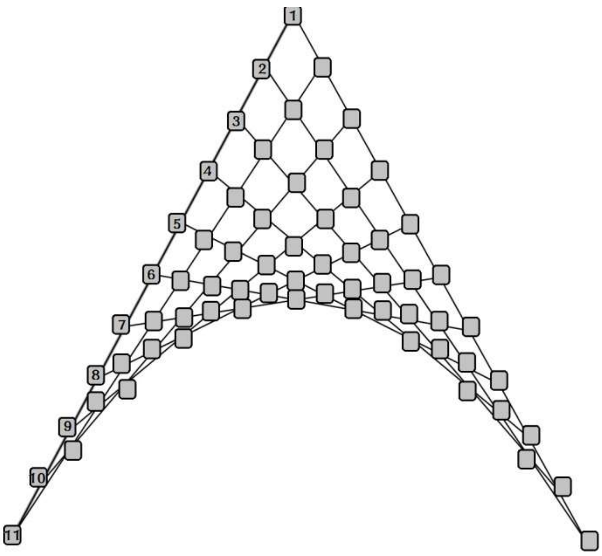


▲步驟 10-9

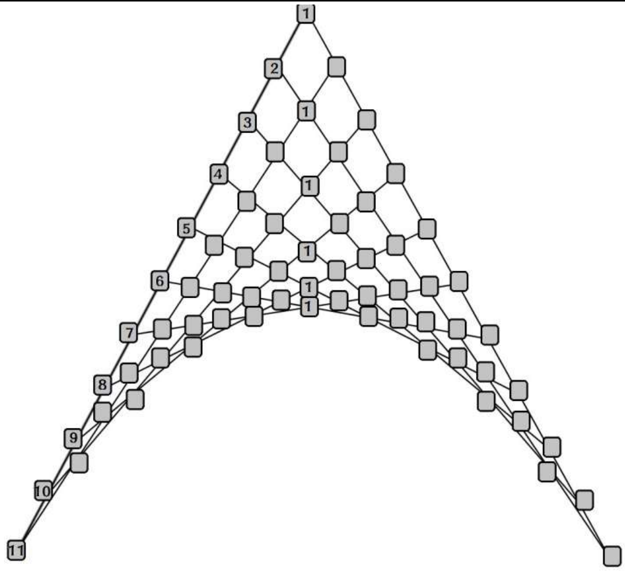


▲步驟 10-10

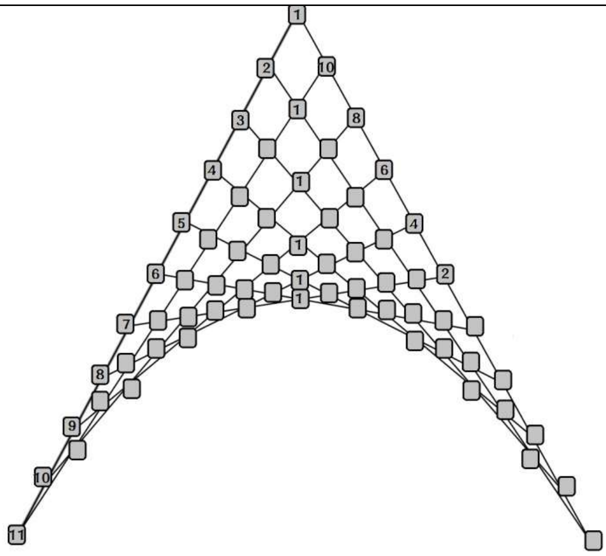
(四) 以 n=12 為例



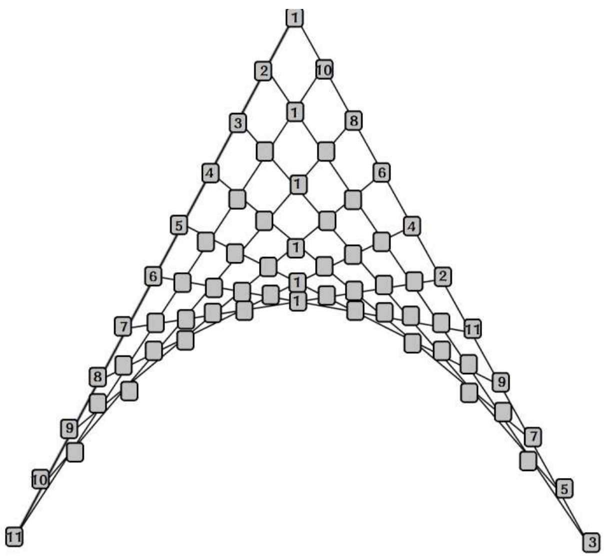
▲步驟 12-1



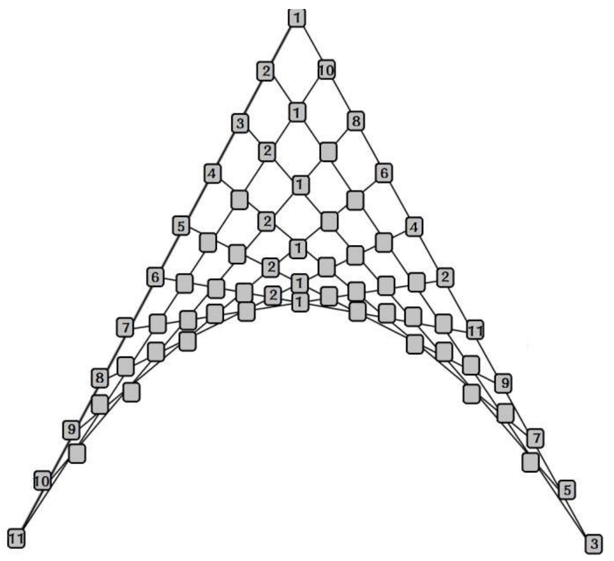
▲步驟 12-2



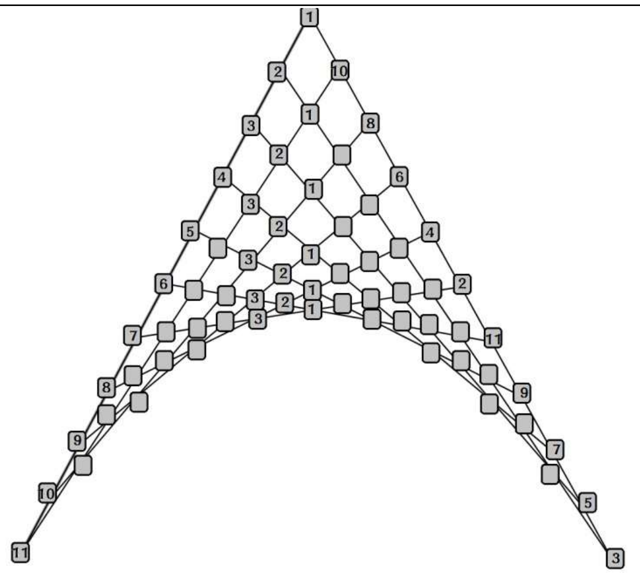
▲步驟 12-3



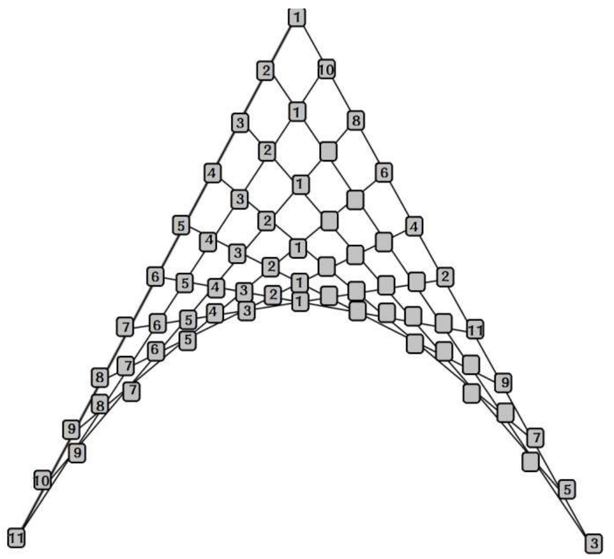
▲步驟 12-4



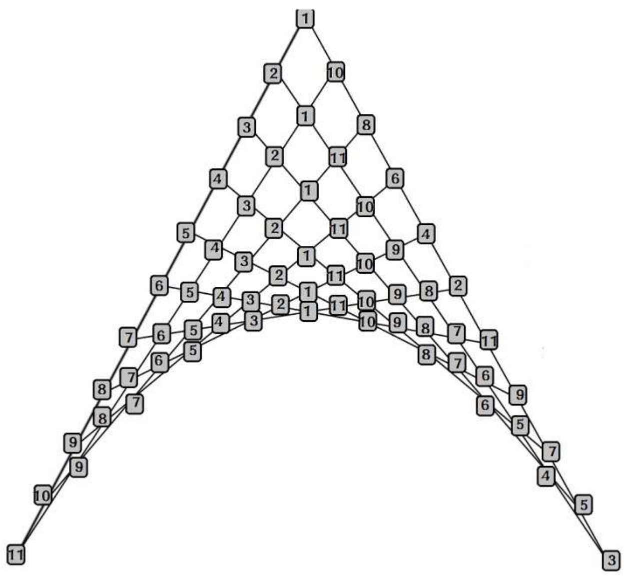
▲步驟 12-5



▲步驟 12-6



▲步驟 12-7

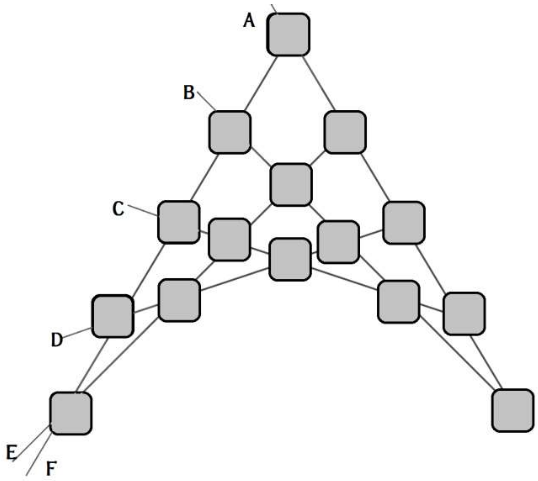


▲步驟 12-8

(五) 利用表格呈現

我們發現當線的數量越來越大時，圖形畫出來並不是那麼的明顯，所以我們打算用別的方式呈現。我們將線條當作縱座標，第幾個數字當橫坐標，畫出圖形(如圖 5)
我們發現，這個表格會對稱

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| B | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 |
| C | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 |
| D | 4 | 3 | 1 | 5 | 2 |
| E | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | | |




▲圖 5

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| B | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 |
| C | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 |
| D | 4 | 3 | 1 | 5 | 2 |
| E | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

▲我們運用這種特性來填

填法為

1. 先在第 1 個數字的那一行填上 1 到 n，並在對稱的邊填上同樣的數字(如步驟 2-1)
2. 在 A 那一行先從偶數最大填到最小，奇數由最小填到最大從尾到中間，和上方步驟 3、4 意思一樣(如步驟 2-2)
3. 在中間填上 1，而最中間填上兩個 1(如步驟 2-3)
4. 在數字 6 個 1 的左半邊，依序填下，直到最下面的數字，，最後一行(最後一個膚色的當作沒有，繼續填下去)先不填(如步驟 2-4)
5. 接著在另一邊填上相加為 n+1(如步驟 2-5)
6. 在皮膚色的格子填上和上方相同的數字

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | | | | |
| B | 2 | | | | |
| C | 3 | | | | |
| D | 4 | | | | |
| E | 5 | | | | |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | | |

▲步驟 2-1

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| B | 2 | | | | 3 |
| C | 3 | | | | 5 |
| D | 4 | | | | 2 |
| E | 5 | | | | 4 |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | | |

▲步驟 2-2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| B | 2 | 1 | | | 3 |
| C | 3 | | 1 | | 5 |
| D | 4 | | 1 | | 2 |
| E | 5 | | | 1 | 4 |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | | |

▲步驟 2-3

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| B | 2 | 1 | | | 3 |
| C | 3 | 2 | 1 | | 5 |
| D | 4 | 3 | 1 | | 2 |
| E | 5 | | | 1 | 4 |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | | |

▲步驟 2-4

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| B | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 |
| C | 3 | 2 | 1 | | 5 |
| D | 4 | 3 | 1 | 5 | 2 |
| E | 5 | | 2 | 1 | 4 |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | | |

▲步驟 2-5

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| B | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 |
| C | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 |
| D | 4 | 3 | 1 | 5 | 2 |
| E | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | | |

▲步驟 2-6

我們發現這是個對稱的圖形(如圖六)。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| B | 2 | 1 | 5 | 4 | 3 |
| C | 3 | 2 | 1 | 4 | 5 |
| D | 4 | 3 | 1 | 5 | 2 |
| E | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 |
| F | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | | | | | |

▲圖六

這種方法的優點，是不用畫出圖形，利用表格就能做出來。

以下為 n=18 為例。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 17 | 15 | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 | 3 |
| B | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| C | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 4 | 5 |
| D | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 6 | 5 | 7 |
| E | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 8 | 7 | 6 | 9 |
| F | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 10 | 9 | 8 | 7 | 11 |
| G | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 13 |
| H | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 15 |
| I | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 17 |
| J | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 2 |
| K | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 4 |
| L | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 6 |
| M | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 14 | 8 |
| N | 14 | 13 | 12 | 11 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 15 | 10 |
| O | 15 | 14 | 13 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 16 | 12 |
| P | 16 | 15 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 17 | 14 |
| Q | 17 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 16 |
| R | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

▲圖 7，為 18 條線

五、探討 n（$n \in \mathrm{N}, n \geq 2$）條線圖形的解的個數及關係。

(一) 設有一個 n 條線的圖形，則能填入的數字為 1~(n-1)，每種數字各能填入$\frac{n(n-1)}{2}$個。

當填入第 1 個數字時，其相同的數字能填入之空格便減少$(n-1)\times 2-1=2\mathrm{n}-3$格，而倘若又再填入第 2 個同一數字時，其剩餘相同數字所能填入之格數便再減少$(n-1)\times 2-1-1\times 2\times 2=2\mathrm{n}-7$格，第 3 次填入相同數字時，則剩餘能填之空格更再減少$(n-1)\times 2-1-2\times 2\times 2=2\mathrm{n}-11$格......。

因此即能得知：當填入第 m 個相同的數字時，此數字所剩餘能填之空格會再減少$(n-1)\times 2-1-(m-1)\times 2\times 2=2\mathrm{n}+1-4m$格。

令 n 條線時，填入第 m 個相同的數字時，此數字所剩餘能填之空格再減少的格數為$A(n,m)$即再有每多填入一個數字時，所減少能填之的格數為數列$A(n,m)$。

$$
\begin{aligned}
\text{令}\mathrm{S}(n,m) &= A(n,1)+\mathrm{A}(n,2)+...+A(n,m)\\
&=2n\times m+1\times m-4\times\frac{m(\mathrm{m}+1)}{2}\\
&=2mn+m-2m^2-2m\\
&=2mn-m-2m^2
\end{aligned}
$$

設一數$\mathrm{B}(n,m)=\frac{n(n-1)}{2}-S(n,m-1)$ ➡ 當要填入第 m 個相同數字時，所剩餘可填的空格數

$$
\begin{aligned}
\text{令}\mathrm{S}(n,m-1) &= 2n(m-1)-(m-1)-2(m-1)^2\\
&=2mn-2n-m+1-2m^2+4m-2\\
&=2mn-2n-2m^2+3m-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \mathrm{B}(n,m) &= \frac{n(n-1)}{2}-S(n,m-1)\\
&=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-2mn+2n+2m^2-3m+1\\
&=2m^2-(2n+3)m+(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+1)\\
&=(m-\frac{n+1}{2})[2\mathrm{m}-(n+2)]
\end{aligned}
$$

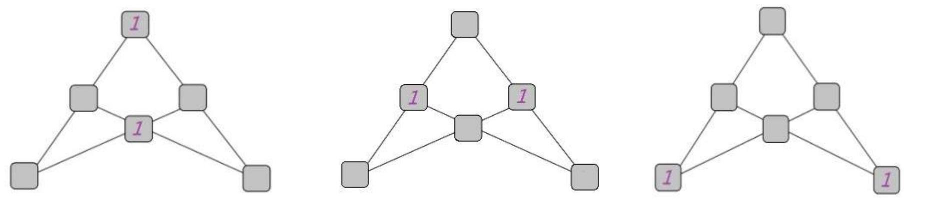
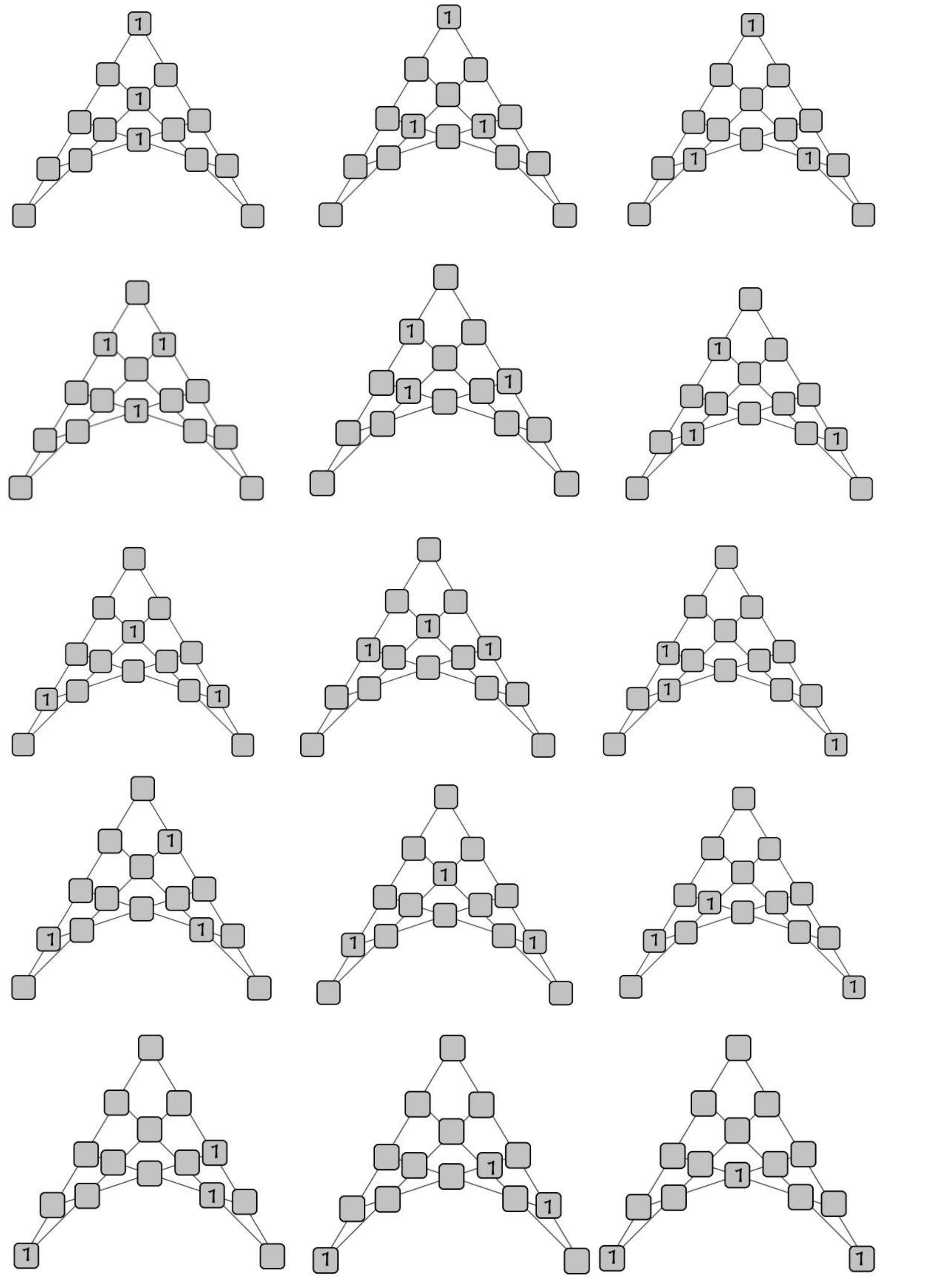
故填入第一種所有數字的可能情形有$\mathrm{B}(n,1)\cdot\mathrm{B}(n,2)\cdot\mathrm{B}(n,3)\cdot...\cdot\mathrm{B}(n,\frac{n}{2})\cdot\frac{1}{\frac{n}{2}!}$

(二) 利用填入第一種所有數字的可能情形有 $B(n,1)\cdot B(n,2)\cdot B(n,3)\cdot\ldots\cdot B(n,\frac{n}{2})\cdot\frac{1}{\frac{n}{2}!}$ 來舉例

| n 條線 | 填入第一種所有數字的所有可能情形 |
|---|---|
| n=4 | $\therefore B(4,m)=(m-\frac{5}{2})(2m-6)$<br>$B(4,1)=(1-\frac{5}{2})(2-6)=(-\frac{3}{2})\times(-4)=6$<br>$B(4,2)=(2-\frac{5}{2})(4-6)=(-\frac{1}{2})\times(-2)=1$<br>$\boxed{1\times 3}$<br>4 條線的交點填入所有第一種數字的所有可能情形：$6\times 1\times\frac{1}{2\,!}=3$ 種 |
| n=6 | $\therefore B(6,m)=(m-\frac{7}{2})(2m-8)$<br>$B(6,1)=(1-\frac{7}{2})(2-8)=(-\frac{5}{2})\times(-6)=15$<br>$B(6,2)=(2-\frac{7}{2})(4-8)=(-\frac{3}{2})\times(-4)=6$<br>$B(6,3)=(3-\frac{7}{2})(6-8)=(-\frac{1}{2})\times(-2)=1$<br>$\boxed{1\times 3\times 5}$<br>6 條線的交點填入所有第一種數字的所有可能情形：$15\times 6\times 1\times\frac{1}{3\,!}=15$ 種 |
| n=8 | $\therefore B(8,m)=(m-\frac{9}{2})(2m-10)$<br>$B(8,1)=(1-\frac{9}{2})(2-10)=(-\frac{7}{2})\times(-8)=28$<br>$B(8,2)=(2-\frac{9}{2})(4-10)=(-\frac{5}{2})\times(-6)=15$<br>$B(8,3)=(3-\frac{9}{2})(6-10)=(-\frac{3}{2})\times(-4)=6$<br>$B(8,4)=(4-\frac{9}{2})(8-10)=(-\frac{1}{2})\times(-2)=1$<br>$\boxed{1\times 3\times 5\times 7}$<br>8 條線的交點填入所有第一種數字的所有可能情形：$28\times 15\times 6\times 1\times\frac{1}{3\,!}=105$ 種 |

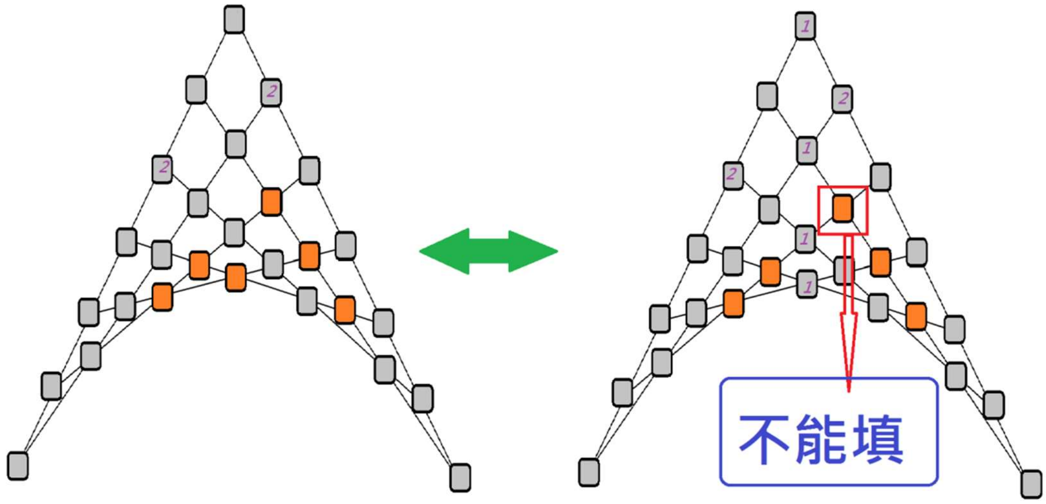
| n 條線 | 填入第一種所有數字的所有可能情形 |
| --- | --- |
| n=10 | $\therefore \mathrm{B}(10,m)=(m-\frac{11}{2})(2\mathrm{m}-12)$<br>$\mathrm{B}(10,1)=(1-\frac{11}{2})(2-12)=(-\frac{9}{2})\times(-10)=45$<br>$\mathrm{B}(10,2)=(2-\frac{11}{2})(4-12)=(-\frac{7}{2})\times(-8)=28$<br>$\mathrm{B}(10,3)=(3-\frac{11}{2})(6-12)=(-\frac{5}{2})\times(-6)=15$<br>$\mathrm{B}(10,4)=(4-\frac{11}{2})(8-12)=(-\frac{3}{2})\times(-4)=6$<br>$\mathrm{B}(10,5)=(5-\frac{11}{2})(10-12)=(-\frac{1}{2})\times(-2)=1$ $\boxed{1\times3\times5\times7\times9}$<br>10 條線的交點填入所有第一種數字的所有可能情形： $45\times28\times15\times6\times1\times\frac{1}{5\,!}=945$ 種 |
| n | $\therefore \mathrm{B}(\mathrm{n},m)=(m-\frac{n+1}{2})[2\mathrm{m}-(n+2)]$<br>$\mathrm{B}(\mathrm{n},1)=(1-\frac{n+1}{2})[2-(n+2)]=\frac{1-n}{2}\times(-n)=\frac{n(n-1)}{2}$<br>$\mathrm{B}(\mathrm{n},2)=(2-\frac{n+1}{2})[4-(n+2)]=\frac{3-n}{2}\times(2-n)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$<br>$\mathrm{B}(\mathrm{n},3)=(3-\frac{n+1}{2})[6-(n+2)]=\frac{5-n}{2}\times(4-n)=\frac{(n-4)(n-5)}{2}$<br>......<br>$\mathrm{B}(\mathrm{n},\frac{n}{2})==\frac{[n-(n-2)][\mathrm{n}-(n-1)]}{2}=\frac{2\times1}{2}$<br>$\therefore \mathrm{B}(\mathrm{n},m)=(m-\frac{n+1}{2})[2\mathrm{m}-(n+2)]$<br>$\mathrm{B}(\mathrm{n},1)=(1-\frac{n+1}{2})[2-(n+2)]=\frac{1-n}{2}\times(-n)=\frac{n(n-1)}{2}$<br>$\mathrm{B}(\mathrm{n},2)=(2-\frac{n+1}{2})[4-(n+2)]=\frac{3-n}{2}\times(2-n)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$<br>$\mathrm{B}(\mathrm{n},3)=(3-\frac{n+1}{2})[6-(n+2)]=\frac{5-n}{2}\times(4-n)=\frac{(n-4)(n-5)}{2}$<br>......<br>$\mathrm{B}(\mathrm{n},\frac{n}{2})==\frac{[n-(n-2)][\mathrm{n}-(n-1)]}{2}=\frac{2\times1}{2}$<br>$\therefore \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot\frac{(n-4)(n-5)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2\times1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{n}{2}!}=1\times3\times5\times7\times\ldots\times(n-1)$<br>n 條線的交點填入所有第一種數字的所有可能情形: $1\times3\times5\times7\times\ldots\times(n-1)$ 種 |

(三) 圖例

| n 條線 | 填入第一種所有數字的所有可能情形 |
| --- | --- |
| n=4 的 3 種情形 |  |
| n=6 的 15 種情形 |  |

# 伍、討論

一、在研究過程中，我們試著利用自己定義的 B 函數，找出可填入的格子數量，填第一種所有數字時沒問題，但在填第二種所有數字進去時，因為先前填的第一個數字會影響阻礙到數字的填入，需開始討論。




二、只完成填入第一種所有數字的填法數 n（$n \in \mathrm{N}, n \geq 2$）條線圖形的解的個數。總填法數目，留待之後再繼續研究。

# 陸、結論

一、<u>*奇數條*</u>線兩兩相交的圖形，無法在交點填完所有數字。

二、若要填出的圖形，數字部分左右對稱，線的數量必為 4 的倍數。

三、找出標準快速解法(快速填入所有數字)。

四、探討 n（$n \in \mathrm{N}, n \geq 2$）條線圖形的解的個數及關係。

n 條兩兩相交的直線，發現填入第一種所有數字的可能情形有

$$\mathrm{B}(n,1)\cdot\mathrm{B}(n,2)\cdot\mathrm{B}(n,3)\cdot\cdots\cdot\mathrm{B}(n,\frac{n}{2})\ \frac{1}{\frac{n}{2}!}=1\times3\times5\times7\times\ldots\times(n-1)$$ 種。

# 柒、　參考資料及其他

一、游森鵬（民 107）。森鵬教官的數學題 標好標滿。科學研習月刊第 57 卷第 5 期。