

# 嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：獨「數」一格

關 鍵 詞：九宮格

編 號：

## 摘要

我們在老師的指導下，利用加法算式填寫九宮格的數學遊戲，並找出適合的數字以滿足它的組合方式，發現九宮格要填入的數字訣竅是：可以先將這九個數字先做排序，依照由小到大的順序，中間的那一位數字置中當成格子中心的數字，再依照排序為第一、第三、第七、第九的序位的數字，排列於九宮格的四個側邊，再將排序為第二、第四、第六、第八的序位的數字，排列於九宮格的四個角落；再來就是將九個數字的總和求出除以三。完成以上兩個步驟後，我們就可以很快的組合出一個完整的九宮格的組合，我們試著用不同的組合方式找出來，並加以歸納它可能的規律性。

## 壹、研究動機

有一天上課時，老師讓我們玩了一個數學遊戲，是有關於在九宮格內各填入一到九的數字，數字不可以重複，其中每一行、每一列及斜線的三個數字加總起來的和相同，並且數字不能重複，老師問我們：「你們知不知道怎麼填？」，我們都覺得十分有趣，便趕緊試試看，在嘗試的過程中，一開始隨機填入數字時沒多久就會陷入膠著。於是，我問老師是否有特殊的訣竅，老師說：「你們可以想看看每一行或列的和應該會是多少？」，就開始了這一次的探索旅程了。

## 貳、研究目的

- 一、利用加法算式找出一個九宮格內，九個數字的所有可能的組合方式。
- 二、當九個數字為連續整數時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？
- 三、當九個數字為連續偶數的整數時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？
- 四、當九個數字為連續奇整數時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？
- 五、當九個數字為連續的等差數列整數時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？
- 六、當九個數字部分為等差數列部分不是等差數列的情況時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？
- 七、找出能符合九宮格數字的規律，更快的判斷出是否能成為九宮格數列的方法。

## 參、研究過程

- 一、利用加法算式找出一個九宮格內，九個數字的所有可能的組合方式。

(一) 分析九個數字誰該置中：我們將九個數字依照大小排序為 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9。

(二) 各行各列的總和是 15： $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ ，因為總共有三行，除三則可得到每一行的和為 15。

(三) 推算出的結果

2	9	4
7	5	3
6	1	8

$$\begin{aligned} 9+5+1=15 & \quad ; \quad 9+4+2=15 \\ 8+6+1=15 & \quad ; \quad 8+5+2=15 \\ 8+4+3=15 & \quad ; \quad 7+6+2=15 \\ 7+5+3=15 & \quad ; \quad 6+5+4=15 \end{aligned}$$

出現了二次的數字：1、3、7、9 → 四個側邊  
出現了三次的數字：2、4、6、8 → 四個角落  
出現了四次的數字：5 → 中間

二、當九個數字為連續整數時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？

(一) 分析九個數字誰該置中：我們將九個數字依照大小排序為

- 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10；
- 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11；
- 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12；
- 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13；
- 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14。

(二) 各行各列的總和均為 9 的倍數：總和除以三則可得到每一行或列的和均為一整數。

(三) 推算出的結果

5	10	3
4	6	8
9	2	7

6	11	4
5	7	9
10	3	8

7	12	5
6	8	10
11	4	9

8	13	6
7	9	11
12	5	10

9	13	7
8	10	12
14	6	11

10	15	8
9	11	13
14	7	12

53	58	51
52	54	56
57	50	55

$$\begin{aligned}
 58+54+50=162 & \quad ; & \quad 58+53+51=162 \\
 57+55+50=162 & \quad ; & \quad 57+54+51=162 \\
 57+53+52=162 & \quad ; & \quad 56+55+51=162 \\
 56+54+52=162 & \quad ; & \quad 55+54+53=162
 \end{aligned}$$

出現了二次的數字： 50、52、56、58      → 四個側邊  
 出現了三次的數字： 51、53、55、57      → 四個角落  
 出現了四次的數字： 54                              → 中間

三、當九個數字為連續偶數的整數時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？

(一) 分析九個數字誰該置中：我們將九個數字依照大小排序為

- 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18；
- 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20；
- 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22；
- 8, 10, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26 . . . . .。

(二) 各行各列的總和均為 9 的倍數：總和除以三則可得到每一行或列的和均為一整數。

(三) 推算出的結果

8	18	4
6	10	14
16	2	12

10	20	6
8	12	16
18	4	14

12	22	8
10	14	18
20	6	16

14	24	10
12	16	20
22	8	18

16	26	12
14	18	22
24	10	20

$$\begin{array}{ll}
26+18+10=54 & ; \quad 26+16+12=54 \\
24+18+12=54 & ; \quad 24+20+10=54 \\
24+16+14=54 & ; \quad 22+20+12=54 \\
22+18+14=54 & ; \quad 20+18+16=54
\end{array}$$

出現了二次的數字： 10、14、22、26      → 四個側邊  
 出現了三次的數字： 12、16、20、24      → 四個角落  
 出現了四次的數字： 18                              → 中間

四、當九個數字為連續奇整數時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？

(一) 分析九個數字誰該置中：我們將九個數字依照大小排序為

- 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17;
- 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19;
- 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21;
- 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23;
- 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25;
- .....。

(二) 各行各列的總和均為 9 的倍數：總和除以三則可得到每一行或列的和均為一整數。

(三) 推算出的結果

7	17	3
5	9	13
15	1	11

9	19	5
7	11	15
17	3	13

11	21	7
9	13	17
19	5	15

13	23	9
11	15	19
21	7	17

15	25	11
13	17	21
23	9	19

$$\begin{array}{l}
 25+15+11=51 \quad ; \quad 25+17+9=51 \\
 23+15+13=51 \quad ; \quad 23+19+9=51 \\
 23+17+11=51 \quad ; \quad 21+17+13=51
 \end{array}$$

$$21+19+11=51 \quad ; \quad 19+17+15=51$$

出現了二次的數字： 9、13、21、25      → 四個側邊  
 出現了三次的數字： 11、15、19、23      → 四個角落  
 出現了四次的數字： 17                      → 中間

五、當九個數字為連續的等差數列整數時，是否都可以成功的排列出符合條件的九宮格？

(一) 分析九個數字誰該置中：我們將九個數字依照大小排序

- 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 ;
- 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33 ;
- 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41 ;
- 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49 ;
- 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57 ;
- .....

(二) 各行各列的總和均為 9 的倍數：總和除以三則可得到每一行或列的和均為一整數。

(三) 推算出的結果

22	57	8
15	29	43
50	1	36

22	57	8
15	29	43
50	1	36

22	57	8
15	29	43
50	1	36

22	57	8
15	29	43
50	1	36

22	57	8
15	29	43
50	1	36

$$\begin{aligned}
 57+22+8=87 & \quad ; \quad 57+29+1=87 \\
 50+22+15=87 & \quad ; \quad 50+36+1=87 \\
 50+29+8=87 & \quad ; \quad 43+36+8=87 \\
 43+29+15=87 & \quad ; \quad 36+29+22=87
 \end{aligned}$$

出現了二次的數字： 1、15、43、57

出現了三次的數字： 8、22、36、50

出現了四次的數字： 29

→ 四個側邊  
 → 四個角落  
 → 中間

六、當九個數字部分為等差數列部分不是等差數列的情況時，是否可以成功的排列出符合條件的九宮格？

(一) 分析九個數字誰該置中：我們將九個數字依照大小排序

1、最前端的兩位數字的差及最後端的兩位數字依序倆倆的差距相同，其餘的數字間隔均為 1

(1) 第一個及第二個數字、第八及第九個數字均相差 2，其餘的數字間隔均為 1  
例如：1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11；

9	5	4
1	6	11
8	7	3

可以排出完整的九宮格

(2) 第一個及第二個數字、第八及第九個數字均相差 3，其餘的數字間隔均為 1  
例如：1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13  
則無法排出九宮格來

(3) 第一個及第二個數字、第八及第九個數字均相差 4，其餘的數字間隔均為 1  
例如：1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15  
則無法排出九宮格來

(4) 第一個及第二個數字、第八及第九個數字均相差 5，其餘的數字間隔均為 1  
例如：1, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 17  
則無法排出九宮格來

(5) 第一個及第二個數字、第八及第九個數字均相差 6，其餘的數字間隔均為 1  
例如：1, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 19  
則無法排出九宮格來

2、最前端的三位數字的差及最後端的三位數字依序倆倆的差距相同，其餘的數字間隔均為 1

(1) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第七及第八個數字、第八及第

## 九

個數字均相差 2，其餘的數字間隔均為 1

例如：1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13；

則無法排出九宮格來

- (2) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第七及第八個數字、第八及第九

個數字均相差 3，其餘的數字間隔均為 1

例如：1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 17；

則無法排出九宮格來

- (3) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第七及第八個數字、第八及第九

個數字均相差 4，其餘的數字間隔均為 1

例如：1, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 21；

則無法排出九宮格來

- (4) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第七及第八個數字、第八及第九

個數字均相差 5，其餘的數字間隔均為 1

例如：1, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25；

則無法排出九宮格來

- (5) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第七及第八個數字、第八及第九

個數字均相差 6，其餘的數字間隔均為 1

例如：1, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 29；

則無法排出九宮格來

- 3、最前端的四位數字的差及最後端的四位數字依序倆倆的差距相同，其餘的數字間隔均為 1

- (1) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第三及第四個數字、第六及第七

個數字、第七及第八個數字、第八及第九個數字均相差 2，其餘的數字間隔均為 1

例如：1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15；

則無法排出九宮格來

- (2) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第三及第四個數字、第六及第七

個數字、第七及第八個數字、第八及第九個數字均相差 3，其餘的數字間隔均為 1

例如：1, 4, 7, 10, 11, 12, 14, 16, 18；

則無法排出九宮格來

- (3) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第三及第四個數字、第六及第七個數字、第七及第八個數字、第八及第九個數字均相差 4，其餘的數字間隔均為 1

例如：1，5，9，13，14，15，19，23，27；

則無法排出九宮格來

- (4) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第三及第四個數字、第六及第七個數字、第七及第八個數字、第八及第九個數字均相差 5，其餘的數字間隔均為 1

例如：1，6，11，16，17，18，23，28，33；

則無法排出九宮格來

- (5) 第一個及第二個數字、第二及第三個數字、第三及第四個數字、第六及第七個數字、第七及第八個數字、第八及第九個數字均相差 6，其餘的數字間隔均為 1

例如：1，7，13，19，20，21，27，33，39；

則無法排出九宮格來

(二) 各行各列的總和均為 9 的倍數：總和除以三則可得到每一行或列的和均為一整數。

七、找出能符合九宮格數字的規律，更快的判斷出是否能程位九宮格數列的方法。

(一) 分析九個數字誰該置中：我們將九個數字依照大小排序  
找出中間數置中

(二) 各行各列的總和均為 9 的倍數（但仍有數列無法排出九宮格來）。

# 研究目的

一. 利用加法算式找出一個九宮格內，九個數字的所有可能的組合方式。

例. 數字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9  
 所有數字總和 ÷ 3 = 每一列式子相加的總合

$$= \frac{1+2+3+\dots+9}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 9 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 9 & 4 \\ \hline 7 & 5 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$$

↑            ↑

找出組合  
(八個式子)

- 在八個式子中出現的次數
- 1+5+9    3+4+8
  - 1+6+8    3+5+7
  - 2+5+8    4+5+6
  - 2+6+7
  - 2+4+9
- 2次: 1, 3, 7, 9  
 3次: 2, 4, 6, 8  
 4次: 5

再由數字的組合方式  
 逐步推敲出它們在九宮格中的位置!

- (在八個式子中出現 4 次的定為九宮格的中間數)
- (在八個式子中出現 3 次的數定會排在四個角落之中)
- (在八個式子中出現 2 次的數定會排在剩下的格子中)

圖二

圖一

二. 九個為連續整數的數能否成功排列成九宮格.

例. 數字. 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58

$\Rightarrow$  每列數字總和 =  $\frac{486}{3} = 162$ .

排列組合

53	58	51
52	54	56
57	50	55

在 8 個式子中出現  
的次數.

2 次. 50 52 56 58

3 次. 51 53 55 57

4 次. 54

$50 + 54 + 58$

$50 + 55 + 57$

$51 + 54 + 57$

$51 + 55 + 56$

$51 + 53 + 58$

$52 + 53 + 57$

$53 + 54 + 55$

$52 + 54 + 56$

三. 九個為連續偶數的數, 能否成功排列出九宮格.

例. 數字 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48.

⇒ 每列數字總和 = 120

排列組合:

$$32 + 40 + 48$$

$$36 + 38 + 46$$

$$32 + 42 + 46$$

$$36 + 40 + 44$$

$$34 + 40 + 46$$

$$38 + 40 + 42$$

$$34 + 38 + 48$$

$$34 + 42 + 44$$

在 8 個式子中  
出現的次數:

2次: 32, 36, 44, 48

3次: 34, 38, 42, 46

4次: 40

⇒

38	48	34
36	40	44
46	32	42

圖三

四. 九個為連續奇數的數能否成功排列成九宮格

例 1. 數字 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87

⇒ 每列數字總合: 237

排列組合

在 8 個式子中出現的次數 ⇒

2次: 71, 75, 83, 87

3次: 73, 77, 81, 85

4次: 79

$$71 + 79 + 87 \quad 73 + 77 + 87$$

$$73 + 79 + 85 \quad 75 + 77 + 85$$

$$75 + 79 + 83$$

$$77 + 79 + 81$$

$$71 + 81 + 85$$

$$73 + 81 + 83$$

77	87	73
75	79	83
85	71	81

⇐

圖四

# 五. 九個等差的數, 能否成功排列成九宮格.

例1) 數字 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52  
 ⇒ 每列數字總合: 108

排列組合  
 出現次數

20+36+52	24+40+44
20+40+48	28+36+44
24+32+52	28+32+48
24+36+48	32+36+40

2次: 20, 28, 44, 48  
 3次: 24, 32, 40, 48  
 4次: 36

↓

32	52	24
28	36	44
48	20	40

例2) 數字: 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91  
 ⇒ 每列數字總合: 165

排列組合.

19+55+91	46+55+64	出現次數	46   91   28
19+64+82	28+37+44		37   55   73
28+55+82	28+37+44	2次: 19, 37, 73, 91	⇒ 82   19   64
28+46+91	28+64+73	3次: 28, 46, 64, 82	
28+64+73	37+46+82	4次: 55	
37+46+82	37+55+73		

## 規律

由上面的例子我們發現:

若將9個數字分別依字母 a, b, c, d, e, f, g, h, i 的  
 順序代替, 則

d	i	b
c	e	g
h	a	f

圖五

九宮格

六. 九個不規則的差數, 能否成功排列成

I) 間格前後1格不同, 後都相同  
 在這格, 2是一個特殊的數字, 只有2可以

1. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 11

9	5	4
1	6	11
8	7	3

但是, 如果是3的話  
 ...  
 (是用2的方式)  
 最後發現, 剩下的等不成立?

1. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 13.

10	6	5
1	7	13
9	8	4

不成立

II) 間格前後2格不同, 後都相同

在這, 所有的數都無法成立九宮格, 舉2個例子.

例1. (差2)  
 1. 3. 5. 6. 7. 8. 9. 11. 13

(這為這裡第一章所使用的方法)

6	13	3
5	7	9
11	1	8

(不成立)

其餘都是21

例2. (差3)  
 1. 4. 7. 8. 9. 10. 11. 14. 17

8	17	4
7	9	11
14	1	10

(不成立)

其餘都是27

(在這裡的最後發現, 剩下都不成立) (會有兩列數字不符)

III) 間格前後3格不同, 其餘都相同.

在這, 所有的數都無法成立九宮格, 舉2個例子:

例1. (差2)  
 1. 3. 5. 7. 8. 9. 11. 13. 15

(一樣)

7	15	3
5	8	11
13	1	9

(不成立)

例2. (差5)  
 1. 6. 11. 16. 17. 18. 23. 28. 33

16	33	6
11	17	23
28	1	18

(不成立)

(跟上面一樣, 會有兩列數字不符)  
 (最後發現, 其它的數字都不成立)

圖六

## 肆、研究討論:

在研究過程中，我們提出了以下幾個問題討論：

- 一、當九個數字部分為等差數列部分不是等差數列的情況時，是否可以成功的排列出符合條件的九宮格？出現了一個例外情況則是最前端的兩位數字的差及最後端的兩位數字依序倆倆的差距相同，其餘的數字間隔均為 1 的 (1) 中：第一個及第二個數字、第八及第九個數字均相差 2，其餘的數字間隔均為 1

例如：1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11；

9	5	4
1	6	11
8	7	3

可以排出完整的九宮格；其餘情況均無法完成九宮格，讓我們無法理解。

## 伍、研究結論:

從一連串的研究，計算和歸納整理，我們經由九個連續數字的組合方式到連續偶數的組合再到連續奇數的組合方式一直到最後以不規則的組合方式排列，進而找出較為迅速的解法，可子很快的排列出九宮格的方法。藉由先找出九個數的總和算出一行或列的和是多少，再找出置中的數字後，發現這樣的規律後便可以很快的找到要填寫的數字。

不過這個研究讓我們頭痛的是，我們所做到的不規則數列的九宮格中，為何同為不規則數列中只有兩數相差為 2 時可以成功的排列出九宮格，而其他的不規則數列則無法成功的排列出九宮格。後來我們發現不能成功的排出九宮格的數列和可以成功排出九宮格的數列在數字與數字之間的差較大。老師問我們，做了這個數學研究，對我們的影響有什麼呢？我們想了想，應該是對於一些數學遊戲，更有熱情，並學會思考其中的規律，讓自己在面對數學問題時不再只是盲目的一拿到題目就亂試一通。讓腦袋先思考一番再下手吧！

## 陸、參考資料

- 1、南一版國小數學第 12 冊第 2、第 6 單元「怎樣解題」。