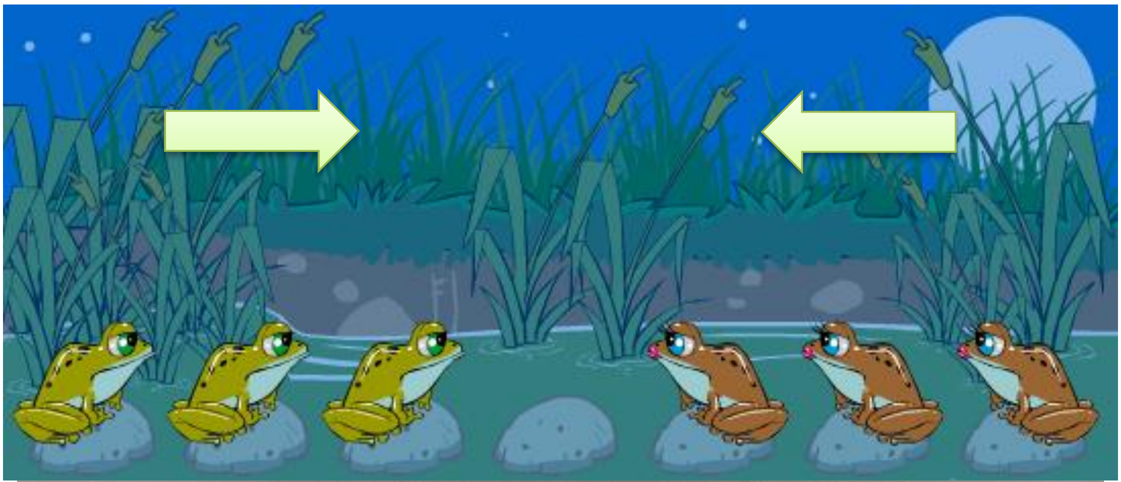
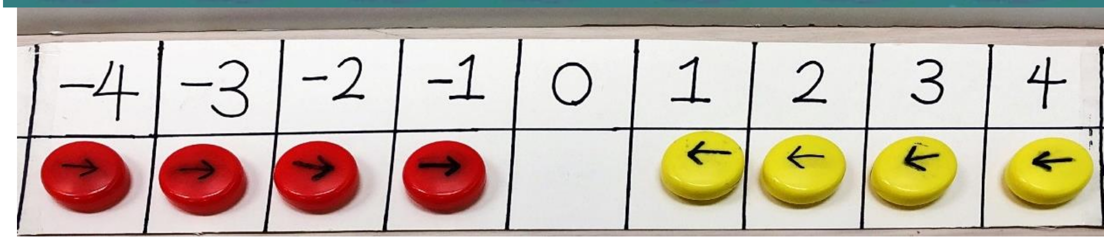
嘉義市第 37 屆中小學數學展覽會作品說明書

跳到別人家





科　　別：數學科

組　　別：國小組

關 鍵 詞：等差、最簡玩法、最多跳兩(三)步。

編　　號：

中　華　民　國　一　〇　八　年　三　月　十　九　日

摘　要

本研究主要探討青蛙跳的遊戲，二邊有同數量不同顏色的磁鐵(代替青蛙或人)，中間只有一個空格，不能往後跳，雙方的磁鐵最後要互換，改變規則，最多跳 2 步或 3 步。雖然歷屆一直有作品探討，但是仔細研讀，都沒有提出證明最簡的方法。本研究將所有空格處可移動的所有佈局都找出來，從成功走法中找最簡走法，再套用在磁鐵數少的情況，然後再擴增二邊的磁鐵數，此時用+−及數字符號來代表走向及跳格數，也利用「分段走+代號」，將數字或代號寫下來，就能從中歸納出公式出來。結果公式分為三項：(1)最多跳 2 步，A_n的公式=n(n+2)，例如二邊各有 n=4 的人數，A_4=24，代表 24 步可以互換完成。(2)最多跳 3 步的偶數情況，A_n的公式= $\frac{3}{4}n^2+n$，$n\geq 4$。(3)最多跳 3 步的奇數情況，A_n的公式= $\frac{3}{4}(n^2+2n-3)$，條件為$n\geq 7$。

壹、研究動機

因為我們的組員以前有玩過「聰明的青蛙跳」這份遊戲，要讓綠色和棕色青蛙互換，最多只能跳兩步，不能往後跳，於是我們就想到如何讓青蛙成功交換?但是走法太過於多元，我們從三年級資優班獨立研究課程就開始研究，直到現在四年級，二年來不斷的利用不同方法及紀錄方式分析，終於抽絲剝繭，不斷換走法及分析找到公式。

貳、研究目的與項目

研究一：最多跳兩步－解法

研究二-1：最多跳三步-偶數解法

研究二-2：最多跳三步-奇數解法

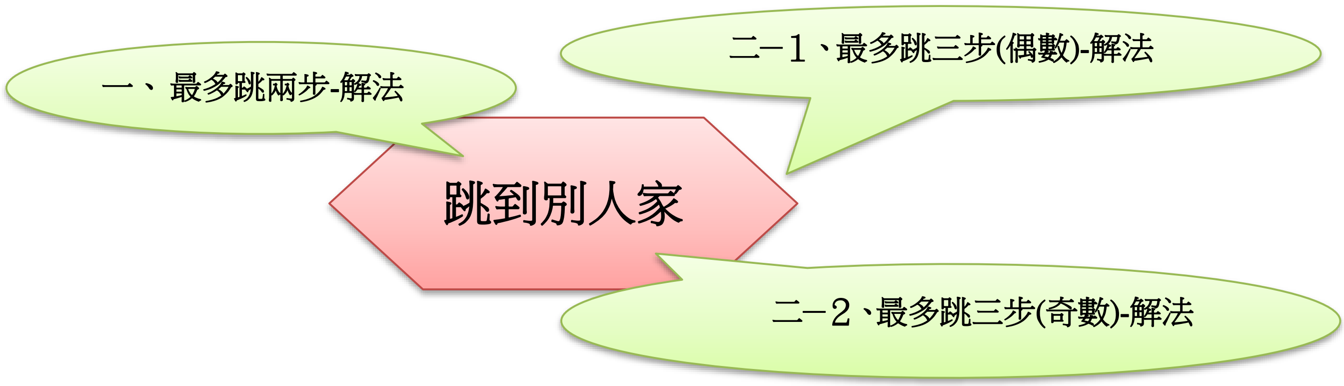


圖 1：研究架構圖

參、研究器材與設備

電腦、印表機、word、磁鐵。

肆、文獻探討

雖然有關青蛙跳的研究很多，第一件作品(第 24 屆國小組「有趣的移位遊戲」)出來後，大家就一直沿用所謂的最簡走法，再來就是將跳的路線從一字改變成十字、環形、折線形，或是最近第 56 屆的作品是改變遊戲規則(將所有青蛙集中在最後一格)。

但是，我們發現，這些作品幾乎都是「直接寫出最簡走法」，而第一件作品(第 24 屆)是玩 5 次後，直接寫出這樣走是最簡，後面的作品，較完整一點的會寫出走法技巧(例如：隔位跳躍、棋子的移動位置、鋪路、寄青蛙、青蛙編號最大顆等)。

第 24 屆國小組「有趣的移位遊戲」

第 34 屆國小組「毛毛蟲變蝴蝶 ~ 移位遊戲的新發現」

第 48 屆國小組「毛毛蟲爬眼鏡—移位遊戲變形玩法」

第 56 屆國小組「『青蛙』『塔』移位遊戲」

表 1：文獻比較

歷屆	路線	二邊的個數(各幾個)	一次可跳的步數	中間空格數	最簡走法的證明	
第 24 屆作品	一字	推至 n	1、2	1	證明	無。玩 5 次。直接寫何種走法是最簡。
					方法	觀察空格位置
第 34 屆作品	一字(二邊不等長)、環形	1～10	1	1	證明	直接沿用第 24 屆的最簡走法。
					方法	無。
第 48 屆作品	多折眼鏡形	奇、偶(最多至 15)	1	1	證明	直沿用前面作品。
					方法	無。
第 56 屆作品	一字 青蛙集中	1～5	1、2	中間空格	證明	無。
					方法	寫出最簡玩法技巧。
本作品	一字	推至 n	1、2、3	1	證明	有。
					方法	1. 列出空格二邊 2 或 3 格的所有走法盤面，一一評估步數。 2. 以+-及數字表示走向及跳數。 3. 以分段走及代號歸納公式。

圖 2：「青蛙塔」遊戲(別組的作品)

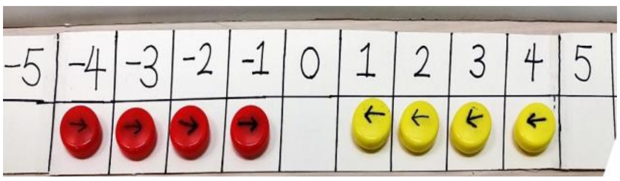


圖 3：「跳到別人家」遊戲(本作品)

伍、研究過程、結果與討論

一、遊戲規則與玩法

(一)遊戲規則

二邊有同數量不同顏色的磁鐵(代替青蛙或人)，中間只有一個空格，不能往後跳，雙方的磁鐵最後要互換。以下改變規則，最多跳 2 步或 3 步。

表 2:「互換前」及「互換完成」比較

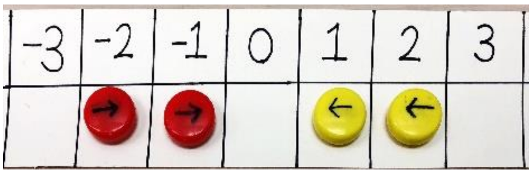
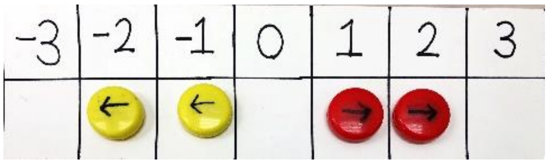
	

圖 4：互換前：左-紅　　右-黃	圖 5：互換完成：左-黃　　右-紅

(二)名詞解釋

1. **最多跳 2 步：**磁鐵只能跳 1 步或 2 步，可以跨過中間的磁鐵。
2. **最多跳 3 步：**磁鐵只能跳 1、2 或 3 步，可以跨過中間的磁鐵。
3. **+ － 符號：**磁鐵往右跳為 +，磁鐵往左為為 －，例以+-如：往左跳 1，記為-1。
4. **n 人互換：**二邊共有 n 人(分別以紅黃磁鐵代替二邊的人)以 n × n 表示，2×2 代表二邊各有 2 人的情況。
5. **最簡玩法：**走法步數最少，就是最簡玩法。

表 3：步法

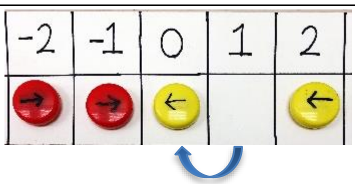
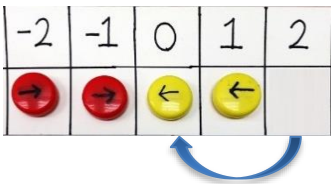
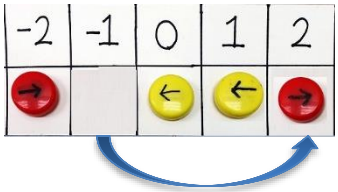
		

圖 6：往左跳 1，記為-1。	圖 7：往左跳 2，記為-2。	圖 8：往右跳 3，記為+3。

二、研究一：最多跳 2 步

根據不斷地分析，我們發現只有一種走法，那就是最簡玩法。

例題：2×2 的第一步，如果一開始就讓數字 2 下方的黃磁鐵跳過數字 1 下方的黃磁鐵，那紅色的磁鐵就會動彈不得，這就稱作「卡死」。所以，經由這個發現，我們發現了「最簡玩法」也就是「唯一的步數」。

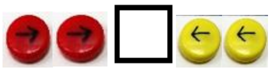
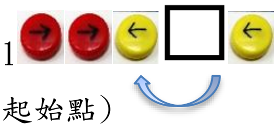
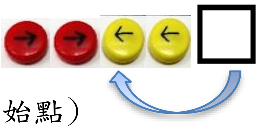
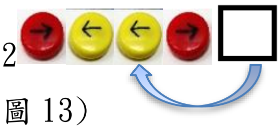
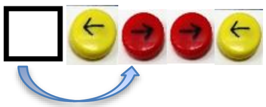
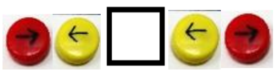
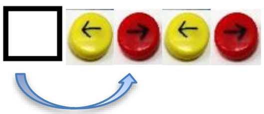
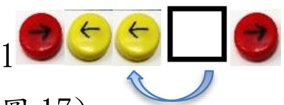
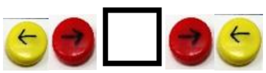
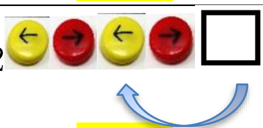
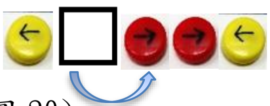
(一)最簡玩法

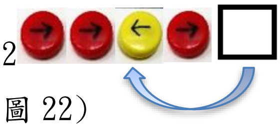
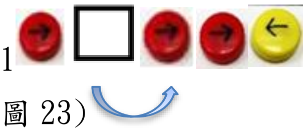
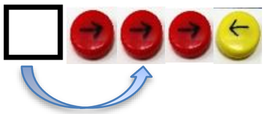
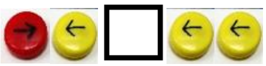
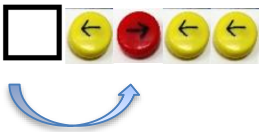
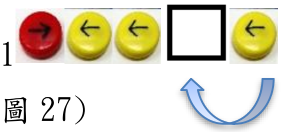
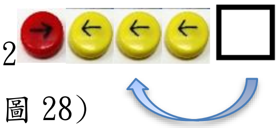
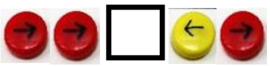
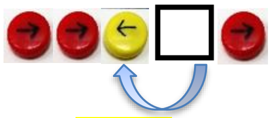
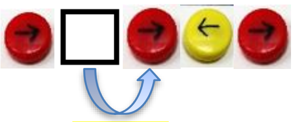
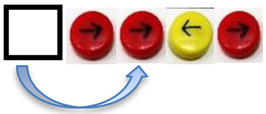
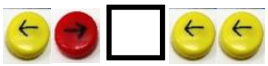
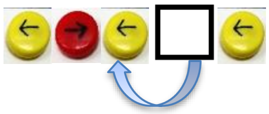
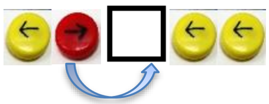
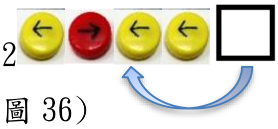
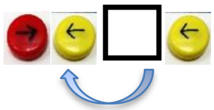
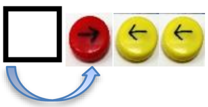
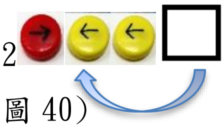
1.分析出全部發生的盤面：(█ 代表已到邊界)

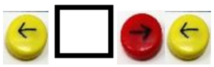
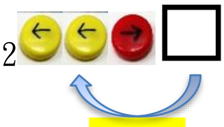
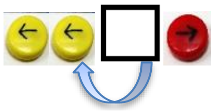
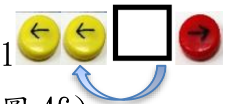
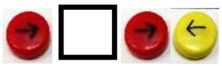
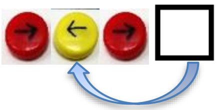
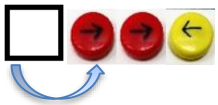
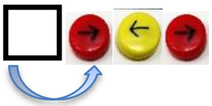
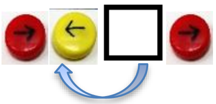
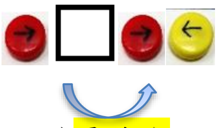
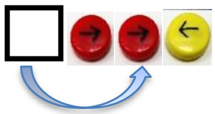
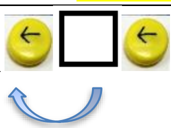
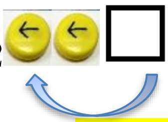
因為遊戲規則是最多跳 2 步，所以以下分析空格處(符號□)二邊各 2 格情況的佈局，裡面有失敗及成功走法，其中成功走法中再找出最簡走法，幫助我們遇到各種盤面時，知道每一步可以用哪一種最簡走法，這樣連接出整個最簡走法。

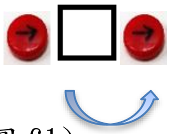
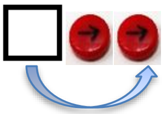
以下的佈局，<u>二邊其實可以想像還有很多紅黃磁鐵延伸放著</u>。因為遊戲規則是最多跳 2 步，這表示每次的移動只有「空格處的二邊各 2 顆磁鐵才能移動」，所以，以下佈局在空格處(□)二邊只需要「最多各 2 格的佈局」。

表 4：**最多跳 2 步**-步法情況

佈局	走法	成功走法	失敗走法
 (圖 9)	-1、-2	-1  (起始點) (圖 10) 最簡★	-2  (起始點) (圖 11)
 (圖 12)	-2、+2	無(不得走成這樣)	-2  (圖 13) +2  (圖 14)
 (圖 15)	-1、+2	+2  (圖 16)最簡★	-1  (圖 17)
 (圖 18)	-2、+1	-2  (圖 19)最簡★	+1  (圖 20)

 (圖 21)	-2、+1、+2	-2 (圖 22) 最簡★	+1 (圖 23) +2 (圖 24)
 (圖 25)	-1、-2、+2	+2 (圖 26) 最簡★	-1 (圖 27) -2 (圖 28)
 (圖 29)	-1、+1、+2	-1 (圖 30)最簡★ +1 (圖 31)最簡★	+2 (圖 32)
 (圖 33)	-1、-2、+1	-1 (圖 34)最簡★ +1 (圖 35)最簡★	-2 (圖 36)
 (圖 37)	-1、-2、+1	-1 (圖 38)最簡★ +1 (圖 39)最簡★	-2 (圖 40)

 （圖 41）	-2	-2 （圖 42）最簡★	
 （圖 43）	-1	-1 （圖 44）最簡★	
 （圖 45）	-1	無（不得走成這樣）	-1 （圖 46）
 （圖 47）	-2、+1	-2 （圖 48）最簡★	+1 （圖 49）
 （圖 50）	+1、-1	+1 （圖 51）最簡★ -1 （圖 52）最簡★	
 （圖 53）	-1、+1、+2	-1 （圖 54）最簡★ +1 （圖 55）最簡★	+2 （圖 56）
 （圖 57）	-1、-2	-1 （圖 58） -2 （圖 59）最簡★	

 （圖 60）	+1、+2	+1 （圖 61） +2 （圖 62）最簡★	

2. 以下是根據表 4 中可以成功走下去的佈局，再找出最簡走法，以二邊各 2 人為例：

從表 4 得知「空格處二邊的各種成功及最簡走法」，我們將這些走法應用在 2 人互換的情況，得到最簡走法是：−1, (+2), +1, (−2, −2), +1, (+2), −1，圖示方法在下面。

表 5：2x2 情況，最多跳 2 步的玩法

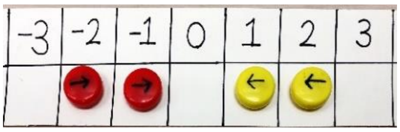
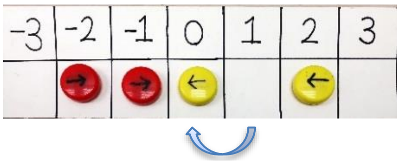
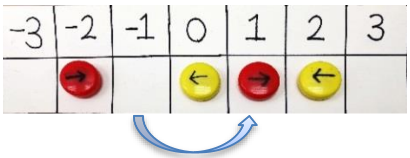
		

圖 63：初始	圖 64：第 1 步黃−1	圖 65：第 2 步，紅+2

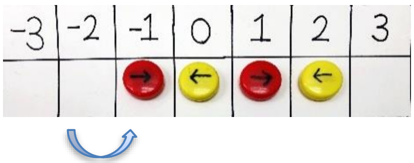
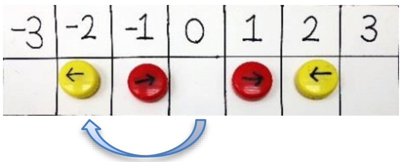
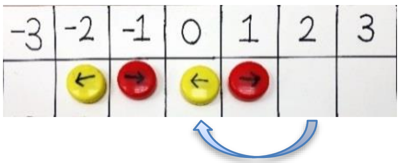

		

圖 66：第 3 步+1	圖 67：第 4 步−2	圖 68：第 5 步−2

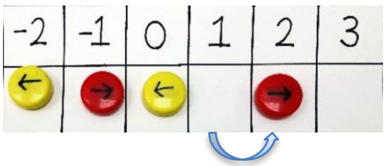
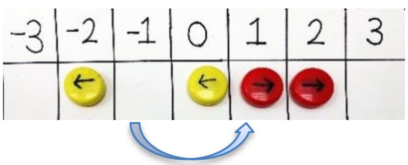
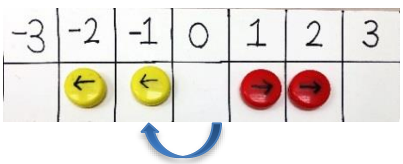

		

圖 69：第 6 步+1	圖 70：第 7 步+2	圖 71：第 8 步−1 完成！

(二)最簡走法「增加人數」時，以數字與+−符號來呈現結果：

我們將最簡走法用符號及數字整理出來，

2 人互換：−1, (+2), +1, (−2, −2), +1, (+2), −1

3 人互換：−1, (+2), +1, (−2, −2), −1, (+2, +2, +2), −1, (−2, −2), +1, (+2), −1

4 人互換：−1, (+2), +1, (−2, −2), −1, (+2, +2, +2), +1, (−2, −2, −2, −2), +1, (+2, +2, +2), −1, (−2, −2), +1, (+2), −1

5 人互換：−1, (+2), +1, (−2, −2), −1, (+2, +2, +2), +1, (−2, −2, −2, −2), −1, (+2, +2, +2, +2, +2), −1, (−2, −2, −2, −2), +1, (+2, +2, +2), −1, (−2, −2), +1, (+2), −1

6 人互換：-1,(+2),+1,(-2,-2),-1,(+2,+2,+2),+1,(-2,-2,-2,-2),-1,(+2,+2,+2,+2,+2),+1,(-2,-2,-2,-2,-2,-2),+1,(+2,+2,+2,+2,+2),-1,(-2,-2,-2,-2),+1,(+2,+2,+2),-1,(-2,-2),+1,(+2),-1

(三)分析

1. 3 人互換比 2 人互換多了 7 步；

   4 人互換比 3 人互換多了 9 步；

   5 人互換比 4 人互換多了 11 步；

   6 人互換比 5 人互換多了 13 步；

   ……

2. 以上增加的步數，分別是……起來的部分，得知

   -2),-1,(+2,+2,+2),-1,(-2　　3 個+2、2 個-1、2 個-2。

   +2),+1,(-2,-2,-2,-2),+1,(+2,+2　　4 個-2、2 個+1、3 個+2。

   -2,-2),-1,(+2,+2,+2,+2,+2),-1,(-2,-2,　　5 個+2、2 個-1、4 個-2。

   依此類推，n 人互換比(n-1)人互換增加的步數為：n 個±2、2 個±1、(n-1)個±2。

   整理後，**增加的步數=n+2+(n-1)=2n+1**。

3. 找出 A_n 與 A_{n-1} 的關係

   $A_1=3$

   $A_2=A_1+5=8$

   $A_3=A_2+7=15$

   $A_4=A_3+9=24$

   …

   $A_n=A_{n-1}+(2n+1)$

4. 找出 A_n 的公式

   將上第 3 點的各式等號二邊同時相加，得到

   $A_1+A_2+\cdots+A_n=A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}+[3+5+7+\cdots+(2n+1)]$

   $A_n=[3+5+7+\cdots+(2n+1)]$　等差為 2

   $A_n=\frac{3+(2n+1)}{2}n=n(n+2)$

   A_n 的公式 $A_n=n(n+2)$

5. 代入 A_n 公式驗算

   例如：n=3 代入 $A_n=n(n+2)$，$A_3=15$；n=4 代入 $A_n=n(n+2)$，$A_4=24$，完全正確。

我們將遊戲規則提高難度，改為「最多跳 3 步」，經過好幾個月的分析，發現偶數與奇數是不同的情況，所以分開敘述，研究二-1 是偶數，研究二-2 是奇數。

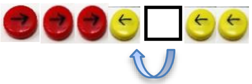
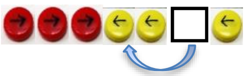
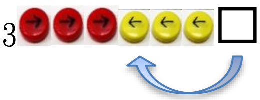
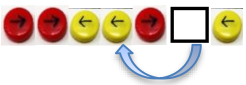
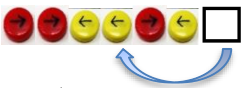
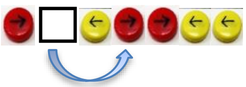
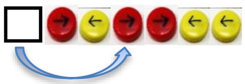
三、研究二-1：最多跳 3 步(偶數)

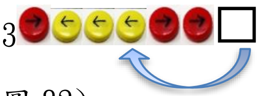
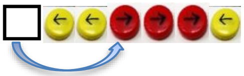
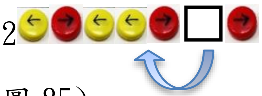
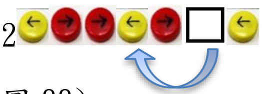
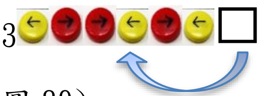
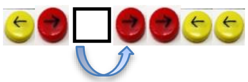
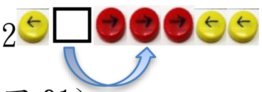
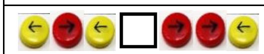
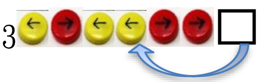
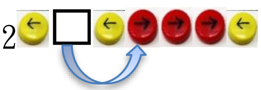
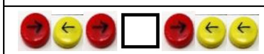
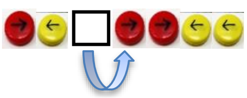
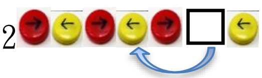
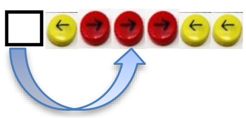
(一)最簡玩法

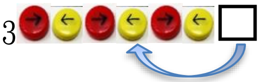
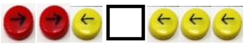
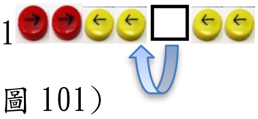
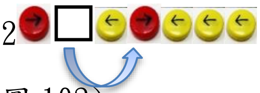
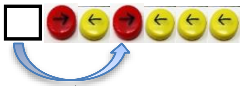
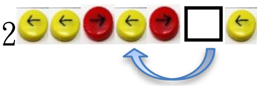
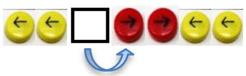
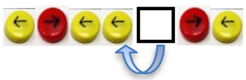
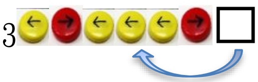
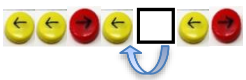
1. 分析出全部發生的盤面：(█ 代表已到邊界)

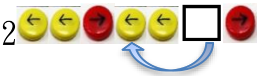
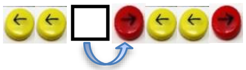
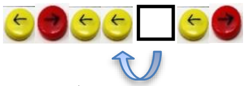
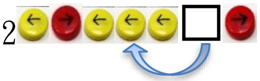
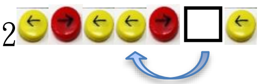
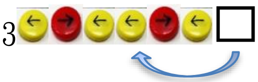
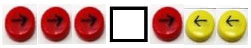
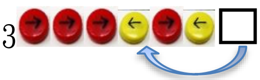
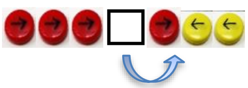
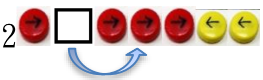
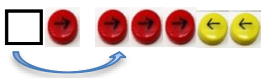
以下的佈局，二邊其實可以想像還有很多紅黃磁鐵延伸放著。因為遊戲規則是最多跳 3 步，這表示每次的移動只有「空格處的二邊各 3 顆磁鐵才能移動」，所以，以下佈局在空格處(□)二邊只需要「最多各 3 格的佈局」。

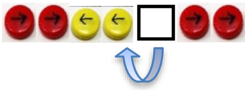
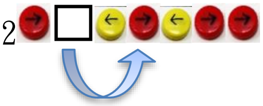
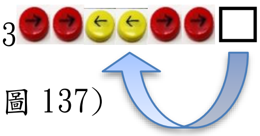
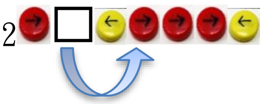
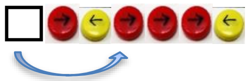
表 6：二邊顆數最多跳 3 步-步法情況（偶數與奇數都適用）

佈局	走法	成功走法	失敗走法
 (圖 72)	-1、-2、-3	-1  (圖 73) -2  (起始點) (圖 74) 最簡★	-3  (圖 75)
 (圖 76)	-2、-3、+2、+3	-2  (圖 77) -3  (圖 78) 最簡★ +2  (圖 79) +3  (圖 80) 最簡★	

 （圖 81）	-3、+3	無(不得走成這樣)	-3 （圖 82） +3 （圖 83）
 （圖 84）	-2、+2	-2 （圖 85） 最簡★ +2 （圖 86） 最簡★	
 （圖 87）	-2、-3、+1、+2	-2 （圖 88） -3 （圖 89） 最簡★ +1 （圖 90）	+2 （圖 91）
 （圖 92）	-3、+2	-3 （圖 93） 最簡★	+2 （圖 94）
 （圖 95）	+1、+3、-2、-3	+1 （圖 96） +2 （圖 97）	+3 （圖 99）

		-3 （圖 98） 最簡★	
 （圖 100）	−1、−2、−3、+2、+3	-1 （圖 101） +2 （圖 102） +3 （圖 103） 最簡★	-2 （圖 104） -3 （圖 105）
 （圖 106）	−2、−3、+1	-2 （圖 107） -3 （圖 108） 最簡★ +1 （圖 109） （後續會失敗）	
 （圖 110）	−1、−3、−2	-1 （圖 111） +2 （圖 112） 最簡★	-3 （圖 113）
 （圖 114）	−1、−2、+1	-1 （圖 115）	

		-2 （圖 116） 最簡★ +1 （圖 117）	
 （圖 118）	-1、-2、+2	-1 （圖 119） +2 （圖 120） 最簡★	-2 （圖 121）
 （圖 122）	-2、-3、+2	-2 （圖 123） -3 （圖 124） 最簡★ +2 （圖 125）	
 （圖 126）	-2、-3、+1、+2、+3	-2 （圖 127） -3 （圖 128） 最簡★ +1	+2 （圖 130） +3 （圖 131）

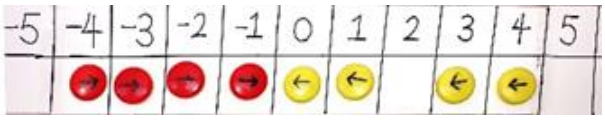
		(圖 129)	
 (圖 132)	-1、+2、+3	-1 (圖 133) +2 (圖 134) +3 (圖 135) 最簡★	
 (圖 136)	-3、+2、+3	-3 (圖 137)	+2 (圖 138) +3 (圖 139)

2. 以下是根據表 6 中可以成功走下去的佈局，再找出最簡走法，以二邊各 4 人為例：

從表 6 得知「空格處二邊的各種成功及最簡走法」，我們將這些走法應用在 4 人互換的情況，得到最簡走法是：

-2+3-2+3+2-3+2-3-3+2-3+2+3-2+3-2，圖示方法在下面。

表 7：4x4 情況，最多跳 3 步的玩法

	
圖 140：初始	圖 141：第 1 步，←-2
	
圖 142：第 2 步，+3→	圖 143：第 3 步，←-2

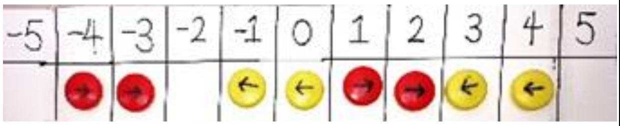
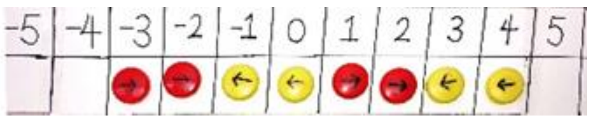

	

圖 144：第 4 步，+3→	圖 145：第 5 步，+2→

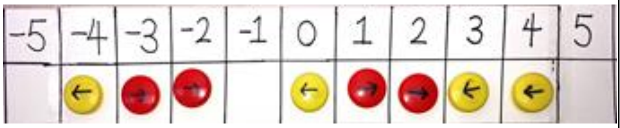
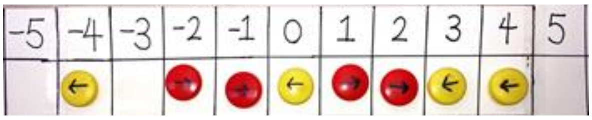

	

圖 146：第 6 步，←-3	圖 147：第 7 步，+2→

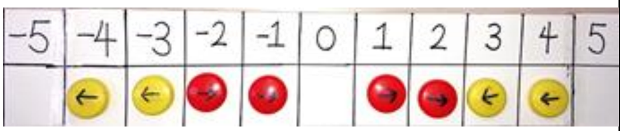
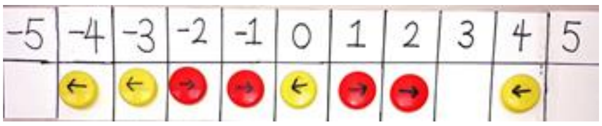

	

圖 148：第 8 步，←-3	圖 149：第 9 步，←-3

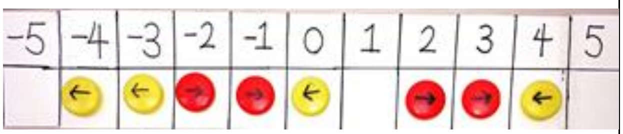
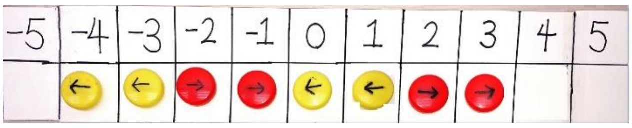

	

圖 150：第 10 步，+2→	圖 151：第 11 步，←-3

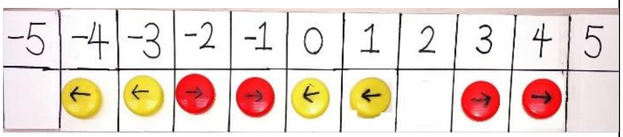
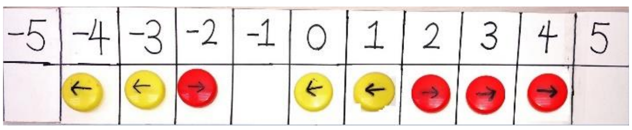

	

圖 152：第 12 步，+2→	圖 153：第 13 步，+3→

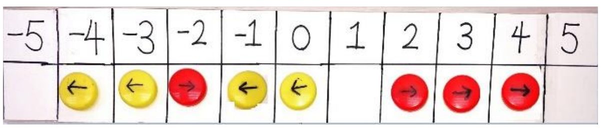
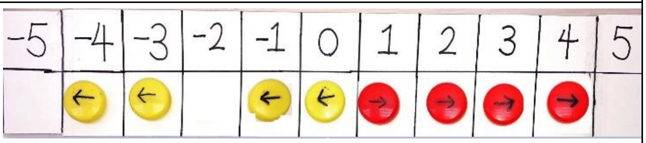

	

圖 154：第 14 步，←-2	圖 155：第 15 步， +3→

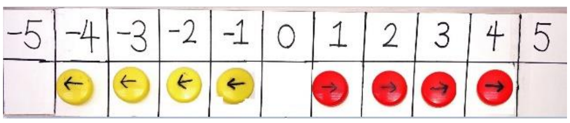



圖 156：第 15 步，←-2，完成!	

(二)最簡走法「增加人數」時，以數字與+-符號來呈現結果：

因為數字太多，記在筆記本上根本就是一堆數字，例如：4 人互換的最簡是：-2+3-2+3+2-3+2-3-3+2-3+2+3-2+3-2，<u>人數繼續增加上去，根本就是無法分析</u>。

解決方法

後來組員建議，把所有數字紀錄在電腦 word 上，我們漸漸將這一堆數字，利用「分段走」，在 word 改變顏色、加( )、底色、粗體等方法，以代號分類，A、B、…等，再分析 A、B…等代號出現的情況，才找到規律性。

例如：4 人互換的最簡走法改為四段走，再以代號表示。

(-2+3-2+3)(+2-3+2-3)(-3+2-3+2)(+3-2+3-2)

A_1　　A_2　　B_1　　B_2

以下是我們玩到 10 人互換後，找出會有這些分段代號：

分段代號
A_1 =(-2+3-2+3)、A_2=(+2-3+2-3)、B_1=(-3+2-3+2)、B_2=(+3-2+3-2)、C_1=(-3+2-3)、C_2=(-3+2-3)。

以下開始增加人數，以分段代號表示走法：

4 人互換：A_1 A_2 B_1 B_2，　　步數=2A+2B=2x4 步+2x4 步=16 步。

6 人互換：A_1 A_2 C_1 A_1 C_2 B_2 C_1 B_1 B_2，　　步數=3A+3B+3C =3x4 步+3x4 步+3x3 步 =33 步。

8 人互換：A_1 A_2 C_1 A_1 2C_2 $A_2$2C_1 B_1 2C_2 B_2 C_1 B_1 B_2，

步數=4A+4B+8C =4x4+4x4+8x3=56 步。

10 人互換：A_1 A_2 C_1 A_1 2C_2 A_2 3C_1 A_1 3C_2 B_2 3C_1 B_1 2C_2 B_2 C_1 B_1 B_2

步數=5A+5B+15C =5x4+5x4+15x3=85 步。

為了計算差值，整理為

1. 4 人互換：A_1 A_2 ************ B_1 B_2 (拉開，比較容易比對差異處)

   6 人互換：A_1 A_2 $\boxed{C_1\ A_1\ C_2\ B_2\ C_1}$ B_1 B_2

   差：C_1 A_1 C_2 B_2 C_1 ，也就是 1A、1B、3C，多 17 步。

2. 6 人互換：A_1 A_2 C_1 A_1 C_2 *************** B_2 C_1 B_1 B_2

   8 人互換：A_1 A_2 C_1 A_1 C_2 $\boxed{C_2\ A_2\ C_1\ C_1\ B_1\ C_2\ C_2}$ B_2 C_1 B_1 B_2

   差：C_2 A_2 C_1 C_1 B_1 C_2 C_2，也就是 1A、1B、5C，多 23 步。

3. 8 人互換：A_1 A_2 C_1 A_1 $2C_2$ A_2 $2C_1$ ******************** B_1 $2C_2$ B_2 C_1 B_1 B_2

10 人互換：A_1 A_2 C_1 A_1 $2C_2$ A_2 $2C_1$ $\boxed{C_1\ A_1\ C_2\ C_2\ C_2\ B_2C_1\ C_1\ C_1}$ B_1 $2C_2$ B_2 C_1 B_1 B_2

差：C_1 A_1 C_2 C_2 C_2 B_2 C_1 C_1 C_1，也就是 1A、1B、7C，多 29 步。

(三)分析

1. 以上**增加的步數**分別是

6 人比 4 人多：1A、1B、3C。

8 人比 6 人多：1A、1B、5C。

10 人比 8 人多：1A、1B、7C。

依此類推，n 人互換比(n−2)人互換增加的步數為：**1A、1B、(n−3)C**；1 個 A(±2, ±3, ±2, ±3)是 4 步；1 個 B(±3, ±2, ±3, ±2)是 4 步；1 個 C(±3, ±2, ±3)是 3 步。

整理後，**增加的步數= 1×4+1×4+(n−3)×3 = 8+3×(*n*−3)**。

2. 找出 A_n 與 A_{n-2} 的關係

A_4= 2A+2B=16

A_6= A_4+(1A+1B+3C)=35

A_8= A_6+(1A+1B+5C)=56

A_{10}= A_8+(1A+1B+7C)=85

…

A_n=A_{n-2}+[1A+1B+(n−3)C]

3. 找出 A_n 的公式

將上第 3 點的各式等號二邊同時相加，得到

$A_4+A_6+\cdots+A_n = A_4+A_6+\cdots+A_{n-2}+(2A+2B)+(\frac{n}{2}-2)\times(1A+1B)+[3+5+\cdots+(n-3)]\times C$

$A_n=\frac{n}{2}\times(1A+1B)+[\frac{(n-3+3)}{2}\times(\frac{n}{2}-2)]\times C$，等差為 2 個 C，項數為$(\frac{n}{2}-2)$。

$A_n=\frac{n}{2}\times(1A+1B)+(\frac{n(n-4)}{4})\times C$

其中 1A+1B 代表有 4 步+4 步=8 步；1 個 C 代表有 3 步，代入得到步數

$A_n = \frac{n}{2}\times 8+\frac{n(n-4)}{4}\times 3= 4n+\frac{nn-4n}{4}\times 3=4n+\frac{3}{4}n^2-3n=\frac{3}{4}n^2+n$

A_n 的公式 **$A_n=\frac{3}{4}n^2+n$，$n\geq 4$，n 是偶數**。

4. 帶入數字計算

例如：n=6 代入 A_n 得 $A_6=\frac{3}{4}\times 36+6=33$；n=8 代入 A_n 得 $A_8=\frac{3}{4}n^2+n=56$，完全正確。

四、研究二-2：最多跳 3 步(奇數)

(一)最簡玩法

1. 分析出全部發生的盤面：(█ 代表已到邊界)

最簡走法空格處二邊各 3 顆的佈局與研究二-1 的表 7 相同，所以不再重複。

2. 以下是根據表 6 中可以成功走下去的佈局，再找出最簡走法，以二邊各 3 人為例：

從表 6 得知「空格處二邊的各種成功及最簡走法」，我們將這些走法應用在 3 人互換的情況，得到最簡走法是：(-2+3-2+3) (+1) (-3-3) (+2+3) (-2)，圖示方法在下面。

表 8：3x3 情況，最多跳 3 步的玩法

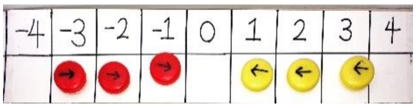
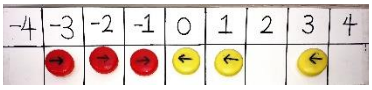
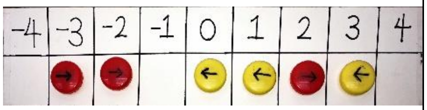
		

圖 157	圖 158：第一步，←-2	圖 159：第二步，+3→

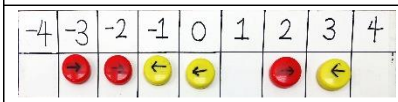
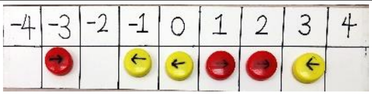
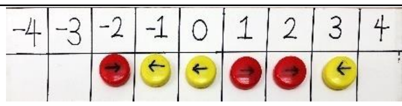

		

圖 160：第三步，←-2	圖 161：第四步，+3→	圖 162：第五步，+1→

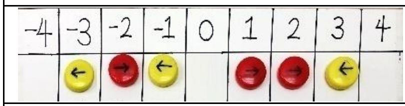
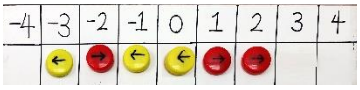
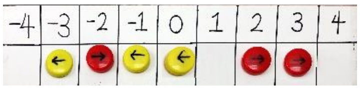

		

圖 163：第六步，←-3	圖 164：第七步，←-3	圖 165：第八步，+2→

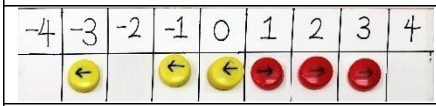
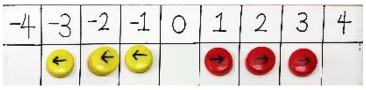

	

圖 166：第九步，+3→	圖 167：第十步，←-2，完成!	

(二)最簡走法「增加人數」時，以數字與+-符號來呈現結果：

採用「分段走+代號」的紀錄方法，以英文 A、B、…等重新定義代號，找到規律性：

例如：3 人互換的最簡走法改為五段走，再以代號表示。

(-2+3-2+3) (+1) (-3-3) (+2+3) (-2)

A (+1) G F (-2)

以下是研究二-2 會用到的代號

研究二-2 分段代號
A=(-2+3-2+3)
B=(+2-3+2-3)
C=(-3+2-3)、(+3-2+3)
D=(-1+2-3)、(+1-2+3)
E=(-1-2)、(+1+2)、(-1+2)、(+1-2)、(-1-3)、(+1+3)、(-1+3)、(+1-3)
F=(-2-1)、(+2+1)、(-2+1)、(+2-1)、(-2-3)、(+2+3)、(-2+3)、(+2-3)
G=(-3-1)、(+3+1)、(-3+1)、(+3-1)、(-3+2)、(+3-2)、(-3-3)、(+3+3)

以下開始增加人數，以分段代號表示走法：

1 人互換：(-1)F，步數=1+2=3 步。

3 人互換：A(+1)GF(-2)，步數=4+1+2+2+1=10 步。

5 人互換：ABCDC2GF(-2)，步數=(4x2)+(3x3)+(2x3)+1=24 步。

7 人互換：ABCA2CD2CGF(+2)C2GF(-2)，步數=(4x3)+(3x7)+(2x5)+(1x2)=45 步。

9 人互換：ABCA2CB3CD3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)，步數=(4x4)+(3x13)+(2x7)+(1x3)=72 步。

11 人互換：ABCA2CB3CA4CD4CGF(+2)3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)，步數=(4x5)+(3x21)+(2x9)+(1x4)=105 步。

13 人互換：ABCA2CB3CA4CB5CD5CGF(-2)4CGF(+2)3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)，步數=(4x6)+(3x31)+(2x11)+(1x5)=144 步。

15 人互換：ABCA2CB3CA4CB5CA6CD6CGF(+2)5CGF(-2)4CGF(+2)3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)，步數=(4x7)+(3x43)+(2x13)+(1x6)=185 步。

為了計算差值，整理為

1. 3 人互換：A(-1)　　GF(+2)

   5 人互換：A　　BCDCGGF(+2)

   差：BCDCG，也就是多 14 步(-1 不比較)。

2. 5 人互換：ABC　D　　　C2GF(+2)

   7 人互換：ABCA2CD2CGF(+2)C2GF(-2)

   差：A2C、2CGF(+2)，也就是多 21 步。

3. 7 人互換：ABCA2C　D　　　2CGF(+2)C2GF(-2)

9 人互換：ABCA2CB3CD3CGF(+2)2CGF(+2)C2GF(-2)

差：B3C、3CGF(-2)，也就是多 27 步。

4. 9 人互換：ABCA2CB3C　　D　　　3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)

11 人互換：ABCA2CB3C　A4CD4CGF(-2)3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)

差：A4C、4CGF(+2)，也就是多 33 步。

5. 11 人互換：ABCA2CB3CA4C　D　　　4CGF(+2)3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)

13 人互換：ABCA2CB3CA4CB5CD5CGF(+2)4CGF(+2)3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)

差：B5C、5CGF(-2)，也就是多 39 步。

6. 13 人互換：

ABCA2CB3CA4CB5C　D　　　5CGF(-2)4CGF(+2)3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)

15 人互換：

ABCA2CB3CA4CB5CA6CD6CGF(+2)5CGF(-2)4CGF(+2)3CGF(-2)2CGF(+2)C2GF(-2)

差：A6C、6CGF(+2)，也就是多 45 步。

(三)分析

1. 以上**增加的步數**分別是

5 人比 3 人多：1B、1C、1D、1F、1G。

7 人比 5 人多：1A、4C、1F、1G，(+2)。

9 人比 7 人多：1B、6C、1F、1G，(-2)。

11 人比 9 人多：1A、8C、1F、1G，(-2)。

13 人比 11 人多：1B、10C、1F、1G，(+2)。

15 人比 13 人多：1A、12C、1F、1G，(+2)。

表 9：人數差距時增加的步數整理表

比對	步法	步數
5 人比 3 人多	1B、2C、1F、1G	1×4+2×3+(1+1)×2
7 人比 5 人多	1A、4C、1F、1G，(+2)	1×4+4×3+(1+1)×2+1
9 人比 7 人多	1B、6C、1F、1G，(-2)	1×4+6×3+(1+1)×2+1
11 人比 9 人多	1A、8C、1F、1G，(+2)	1×4+8×3+(1+1)×2+1
13 人比 11 人多	1B、10C、1F、1G，(-2)	1×4+10×3+(1+1)×2+1
15 人比 13 人多	1A、12C、1F、1G，(+2)	1×4+12×3+(1+1)×2+1
n比$(n-2)$多的步法	(A 或 B)+$(n-3)$C+1F+1G+(±1)	$1\times4+(n-3)\times3+2+2+1=3(n-3)+9=3n$

以上其中，

1 個 A 或 B (±2,±3,±2,±3)是 4 步；

1 個 C(±3,±2,±3)是 3 步；

1 個 F (-2-1,+2+1,-2+1,+2-1,-2-3,+2+3,-2+3,+2-3)2 開頭，只有 2 步；

1 個 G (-3-1,+3+1,-3+1,+3-1,-3+2,+3-2,-3-3,+3+3)3 開頭，只有 2 步。

也就是，A、B 是 4 步，C 是 3 步，F、G 是 2 步，(±1)是 1 步。

2.從表 4 得知，n比(n-2)多的步法是(A 或 B)+(n-3)C+1F+1G+(±1)，

步數為 1×4+(n-3)×3+2+2+1=3(n-3)+9=3n

依此類推，n 人互換比(n-2)人互換**增加步數為：**

$$(\mathbf{4}\times\mathbf{1})+[\mathbf{3}\times(\boldsymbol{n}-\mathbf{3})]+(\mathbf{2}\times\mathbf{2})+(\mathbf{1}\times\mathbf{1})=\mathbf{3n}$$**，條件為$\boldsymbol{n}>\mathbf{5}$。**

3. 找出 An 與 An-2 的關係

A7=A5+$(4\times1)+[3\times(7-3)]+(2\times2)+(1\times1)$=A5+4+12+4+1=45

A9=A7+$(4\times1)+[3\times(9-3)]+(2\times2)+(1\times1)$=A7+4+18+4+1=72

A11= A9+$(4\times1)+[3\times(11-3)]+(2\times2)+(1\times1)$=A9+4+24+4+1=105

An(n>5)=An-2+$(4\times1)+[3\times(n-3)]+(2\times2)+(1\times1)$

4. 找出 An 的公式

將上第 3 點的各式等號二邊同時相加，得到

$A_7+\cdots+A_n = A_5+\cdots+A_{n-2}+N\ (4\times1+2\times2+1\times1)+3$［4+6+…+(n-3)］

N=項數=(n-7)/2+1=(n-5)/2

=A_n=A_5+9N+3[(n-1)N]/2

=A_5+9×(n-5)/2+3[(n-1)(n-5)/2]

=24+9×(n-5)/2+3[(n-1)(n-5)/2]

= $\frac{3}{4}$ (n^2+2n-3) **條件為$\boldsymbol{n}>\mathbf{5}$，n 是奇數。**

5.帶入數字計算

A_7=(3·7^2+6·7-9)/4=147+33/4=45，完全正確。

A_9=(3·9^2+6·9-9)/4=243+45/4=72，完全正確。

陸、結論

遊戲規則是，二邊有同數量不同顏色的磁鐵(代替青蛙或人)，中間只有一個空格，不能往後跳，雙方的磁鐵最後要互換。我們改變規則，最多跳 2 步或 3 步，當二邊分別有 n 人時，分析出最簡步數的公式。

我們的特色是，分析空格處二邊可移動的磁鐵數，例如：最多跳 2 步，只能移動空格處的二邊各 2 格；最多跳 3 步，只能移動空格處的二邊各 3 格。

當我們將所有空格處可移動的所有佈局都找出來，從成功走法中找最簡走法，再套用在磁鐵數少的情況，然後再增加二邊的磁鐵數，此時用+-及數字符號來代表走向及跳格數，將數字寫下來，就能從數字中歸納出公式出來。

當遊戲規則提高難度，變成最多跳 3 步時，要分成二邊是奇、偶磁鐵分析，同時因為最簡走法變複雜，我們找到「分段走+代號」的方法，使複雜長串的數字變成英文代號，當人數增加時，分析這些英文代號出現的規律性，可以歸納出公式。

公式如下：

一、最多跳 2 步

(一)每增加 1 人，增加的步數=2n+1。

(二)A_n 的公式=n(n+2)。

(三)驗算：n=3 代入 A_n=3×(3+2)，A_3=15；n=4 代入 A_n=4×(4+2)，A_4=24，完全正確。

二、最多跳 3 步

(一)偶數情況

1. 每增加 1 人，增加的步數=$8+3\times(n-3)$。

2. A_n 的公式= $\frac{3}{4}n^2+n$，n≥ 4， n 是偶數。

3. 驗算：n=6 代入 $A_n=\frac{3}{4}6^2+6$，A_6=48；n=8 代入 $A_n=\frac{3}{4}8^2+8$，A_8=56，完全正確。

(二)奇數情況

1. 每增加 1 人，增加的步數= **3n**。

2. A_n 的公式= $\frac{3}{4}(n^2+2n-3)$，條件為$n\geq 7$，n 是奇數。

3. 驗算：n=7 代入 $A_n=\frac{3}{4}(7^2+2\times7-3)$，$A_7$=45；n=9 代入 $A_n=\frac{3}{4}(9^2+2\times9-3)$，$A_9$=72，完全正確。

柒、參考資料

一、聰明的青蛙跳 http://two.game.tw/html/paper1274.html

二、無作者(2012 年)。第 52 屆國小組「向前行的青蛙!」。資料來源：

https://market.cloud.edu.tw/api/download/155590/21224991/pdf

三、潘豐佑(2016 年)第 56 屆國小組「青蛙塔」。資料來源：

http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/pdf/080404.pdf