

嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會

作品說明書

作品名稱：野蠻人與傳教士~渡河問題之延伸與討論

科別：數學科

編號：

關鍵詞：座標圖、最短步數

野蠻人與傳教士~渡河問題之延伸與討論

摘要

本研究以渡河問題為主軸，探討野蠻人與傳教士由此岸渡河至彼岸的過程，運用表格建立模組，以系統狀態圖（有向圖）分析問題，改變人數、船載量，延伸到 m 對野蠻人，限制 i 位野蠻人不會划船，發現並證明格數轉換座標的公式，繪出各狀態之系統狀態圖，找出可解決問題的最短步數，分類系統狀態圖，在系統狀態圖中尋找規律，找出最短步數的公式，分類各狀況之公式並予以說明，因而判斷有無解。

壹、研究動機

回想在國小六年級時，在安親班曾玩過一片遊戲光碟，其中有一種適合給國小五年級玩的邏輯遊戲，遊戲闖關程度分為簡單版和困難版兩種，其中困難版的遊戲為「渡河問題」，當初為此遊戲耗費許多心力，待一學期結束後仍無所得，如今回想，難免心有不甘以及不服輸的感覺，因而升上國中後，欲再次挑戰此遊戲，故與夥伴討論後，決定以該遊戲作為科展主題做進一步研究與討論。

貳、研究目的

- 一、探討改變會划船與不會划船的野蠻人對移動次數與解法的影響。
- 二、探討小船載客量的變化對解法的影響。

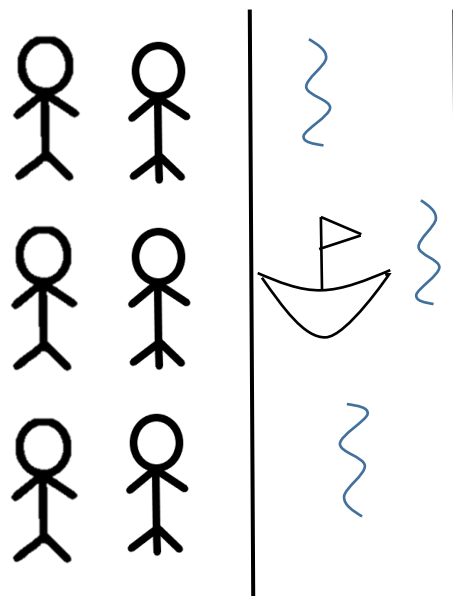
參、研究設備與器材

紙、筆、網際網路、電腦

肆、研究過程和方法

一、遊戲規則說明

- （一） 遊戲採用的版本為野蠻人與傳教士。
- （二） 有三對野蠻人與傳教士要渡河，河中現在只有一艘船，且小船的最大載運數為 2 人，若其中一岸野蠻人數量大於傳教士，則野蠻人會將傳教士吃掉，試問要如何做才能把全部的人安全運送到對岸呢？



二、名詞與符號定義

- (一) m ：會划船的傳教士在此岸的數量。
- (二) r ：會划船的野蠻人在此岸的數量。
- (三) i ：不會划船的野蠻人在此岸的數量。
- (四) (m, r, i) ：表示野蠻人與傳教士在岸上的數量。
- (五) c ：船的載量。
- (六) x ：可解決問題的最少次數（步數）。
- (七) n_x, n_y ：在系統狀態圖上分別走水平向與垂直向的格數。
- (八) E ：系統狀態圖在最右邊的狀態，也就是說在 $m = \text{「}m\text{ 值」}$ 那一列。
- (九) M ：系統狀態圖在中間的狀態，也就是說在 $m = \text{「}1 \sim (m-1)\text{ 值」}$ 那幾列。
- (十) L ：系統狀態圖在最左邊的狀態，也就是說在 $m=0$ 那一列。

三、建模

(一) 解原問題

依原問題之敘述可知 $m=3, r=3, c=2$ ，且 $m=0, 1, 2, 3, r=0, 1, 2, 3$ ，所以根據組合配對共有十六種，如下列兩表：

此岸各種情形為：

$r \backslash m$	0	1	2	3
3	(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)
2	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
1	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)
0	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)

而彼岸情形分別對應為：

$r \backslash m$	3	2	1	0
0	(3, 0)	(2, 0)	(1, 0)	(0, 0)
1	(3, 1)	(2, 1)	(1, 1)	(0, 1)
2	(3, 2)	(2, 2)	(1, 2)	(0, 2)
3	(3, 3)	(2, 3)	(1, 3)	(0, 3)

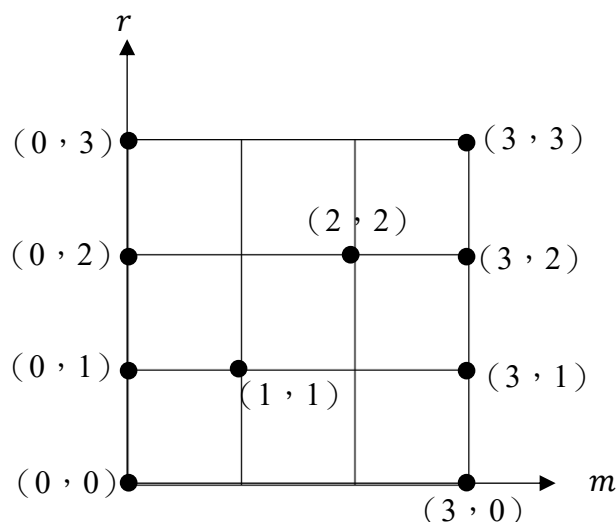
合併兩表，得：

$r \backslash m$	0	1	2	3
3	(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)
2	(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
1	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)
0	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)

* 黃色粗框表格代表不合題意情況（傳教士人數＜野蠻人人數，傳教士會被野蠻人吃掉）。

在上述三表中，發現若野蠻人數大於傳教士，在 E 系統與 L 系統都視為合理情況，因在此岸傳教士與野蠻人的數量為 $(m, 0)$ ，而在彼岸則為 $(0, r)$ ，所以野蠻人並無法吃掉傳教士。

以本問題為例，將上述所呈表格轉化為座標圖如下：



* 座標圖上僅列出符合題意情況之點坐標（傳教士人數 $\geq$ 野蠻人人數）

針對原問題發現渡河步驟使移動次數為最少時，其渡河詳細步驟如下：

$(3, 3) - (0, 2) + (0, 1) - (0, 2) + (1, 0) - (2, 0) + (1, 1)$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $(3, 1) \quad (3, 2) \quad (3, 0) \quad (3, 1) \quad (1, 1) \quad (2, 2)$

 $- (2, 0) + (0, 1) - (0, 2) + (0, 1) - (0, 2)$
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$
 $(0, 2) \quad (0, 3) \quad (0, 1) \quad (0, 2) \quad (0, 0)$ 共 11 次
 所得最少移動次數為 11 次，即 $x = 11$

說明：「 $-$ 」代表船從此岸移動到彼岸，「 $+$ 」代表船從彼岸移動回此岸，「 $\parallel$ 」下方所列數對為船移動後此岸的人數情形，依據移動結果，得到最少移動次數為 11 次，即 $x = 11$ 。

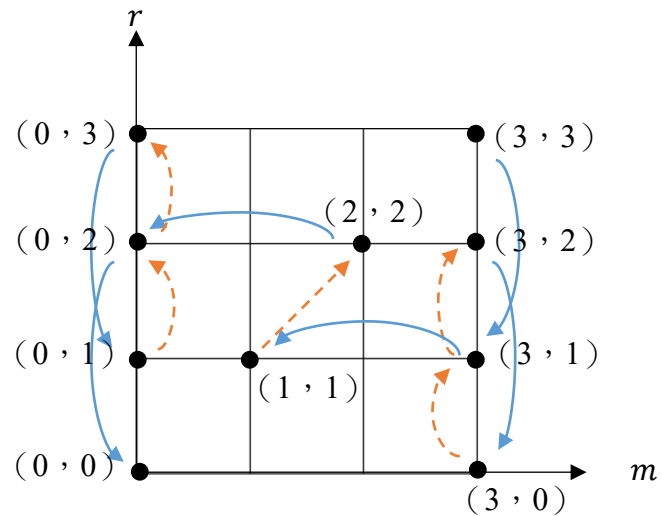
（二）圖解法

在後續研究過程中將使用系統狀態圖（有向圖）解決與討論問題。觀察繪製的系統狀態圖可知，路徑移動具規律性，說明如下：

* 起始點（原點）為 $(3, 3)$ ，終點為 $(0, 0)$ ，圖僅呈現此岸人數變化情形。

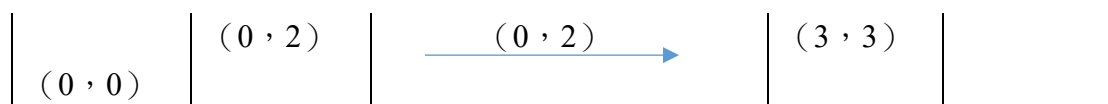
1. 去程路徑必往下，往左，與往左下（此岸人數減少，彼岸人數增加）移動，亦即路徑會遠離原點，接近終點。
2. 回程路徑必往上，往右，與往右上（此岸人數增加，彼岸人數減少）移動，亦即路徑會遠離終點，接近原點。
3. 路徑走法為一去一回。
4. 不可走左上-右下之路徑。

對照渡河詳細步驟將之繪製，則成如右側之系統狀態圖：



因系統狀態圖僅呈現此岸人數變化情形，故以另一圖形做進一步說明：

船移動後此岸剩餘人數	此岸人數		彼岸人數	船移動後彼岸剩餘人數
	(3, 3)	$\xrightarrow{(1, 1)}$	(1, 1)	
(2, 2)				
(3, 2)		$\xleftarrow{(1, 0)}$		(0, 1)
	(3, 2)	$\xrightarrow{(0, 2)}$	(0, 3)	
(3, 0)				
(3, 1)		$\xleftarrow{(0, 1)}$		(0, 2)
	(3, 1)	$\xrightarrow{(2, 0)}$	(2, 2)	
(1, 1)				
(2, 2)		$\xleftarrow{(1, 1)}$		(1, 1)
	(2, 2)	$\xrightarrow{(2, 0)}$	(3, 1)	
(0, 2)				
(0, 3)		$\xleftarrow{(0, 1)}$		(3, 0)
	(0, 3)	$\xrightarrow{(0, 2)}$	(3, 2)	
(0, 1)				
(0, 2)		$\xleftarrow{(0, 1)}$		(3, 1)



* 藍色實線代表船由此岸移動至彼岸，橘色虛線代表船由彼岸移動回此岸，觀察渡河次數發現共走 11 次。

(三) 延伸

將原問題調整為「有成對的傳教士與野蠻人要渡河，但有些野蠻人不會划船」此條件，仍使用座標圖解說明，則此問題將有三個變數 (m, r, i)，在空間中將會呈一三維圖形，若要使用狀態圖則需降低維度表示。

因 i 為一新變數，我們令此變數為第三維，如圖 (三) 所示：

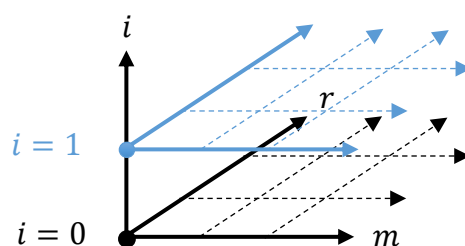


圖 (三)

而降維後如圖 (四) 所示。

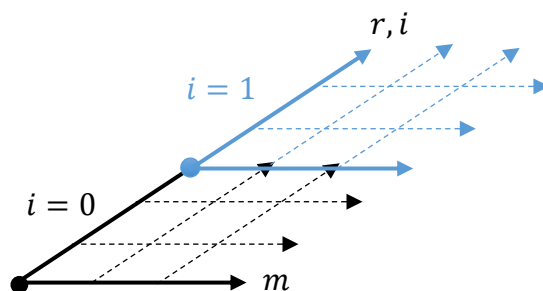
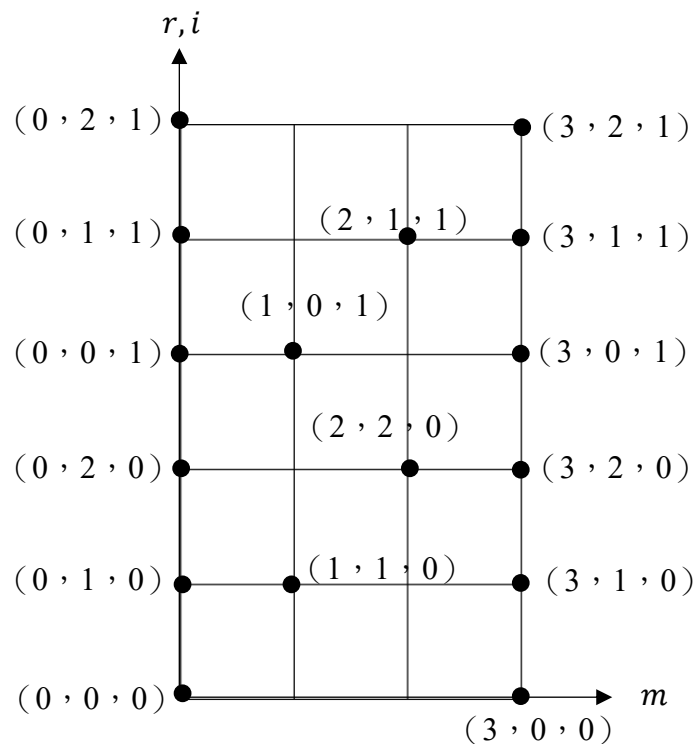


圖 (四)

1. 依此問題，以下列舉各狀況進行分析： $m=3$ ， $r=2$ ， $i=1$ ， $c=2$ 時：

$\begin{matrix} m \\ (r, i) \end{matrix}$	0	1	2	3
(2, 1)	(0, 2, 1)	(1, 2, 1)	(2, 2, 1)	(3, 2, 1)
(1, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(3, 1, 1)
(0, 1)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(2, 0, 1)	(3, 0, 1)
(2, 0)	(0, 2, 0)	(1, 2, 0)	(2, 2, 0)	(3, 2, 0)
(1, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(2, 1, 0)	(3, 1, 0)
(0, 0)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(2, 0, 0)	(3, 0, 0)

下圖為 $(3, 2, 1)$ 的圖：



路徑的走法為 $E \rightarrow M \rightarrow L$ ，因此由 E 系統 $\rightarrow$ M 系統時須慎選切入點，而由 M 系統 $\rightarrow$ L 系統則需慎選切出點，以下將針對幾個點坐標與切入點、切出點進行說明。

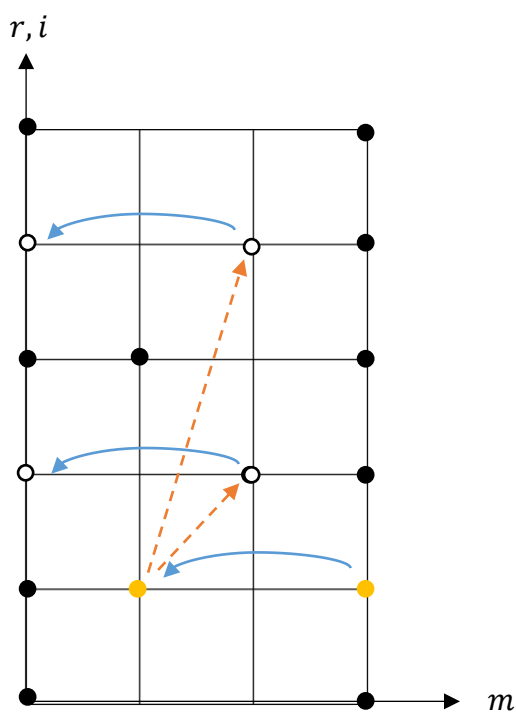
(一) 切入點不可為 $(3, 0, 0)$ ，因為在 M 系統中沒有一點可供切入。

- (二) 切入點亦不可為 $(3, 2, 0)$ 、 $(3, 1, 1)$ 、 $(3, 2, 1)$ ，其原因為若選擇以上三點，則依據路徑移動規則（一去一回），分別對應須切入到 $(2, 2, 0)$ 、 $(2, 1, 1)$ 及 $(2, 1, 1)$ ，故必須退回 E 系統。
- (三) 在 E 系統中，因為 $(3, 0, 0)$ 、 $(3, 1, 0)$ 、 $(3, 2, 0)$ 依據船載量及野蠻人是否會划船之因素，皆不可能走到 $(3, 0, 1)$ ，可知 $(3, 0, 1)$ 此點只會發生在去程，其下一步必為回程，故其下一步行進路徑則不可能走到 $(1, 0, 1)$ 。

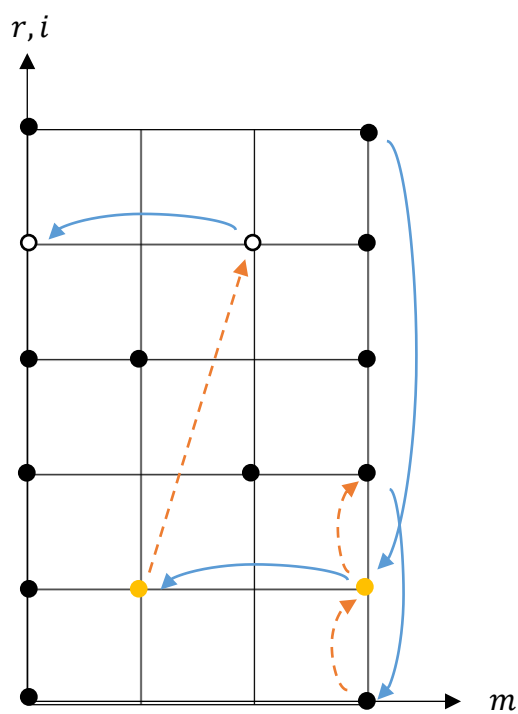
綜上所述，在 E 系統中，切入點只能選擇 $(3, 1, 0)$ ，而 M 系統切入點相對應為 $(1, 1, 0)$ 。在原問題中，由 $(3, 3)$ 的移動步驟得知 $(1, 1) \rightarrow (2, 2)$ 此方式可推得 $(1, 1, 0)$ 接續移動至 $(2, 1, 1)$ 或 $(2, 2, 0)$ ，此時 $(2, 1, 1)$ 與 $(2, 2, 0)$ 兩點則視為切出點，而 $(2, 1, 1)$ 與 $(2, 2, 0)$ 的切出點則分別對應為 $(0, 1, 1)$ 以及 $(0, 2, 0)$ ，如下圖（五）所示。

觀察下圖（六），在 E 系統中，由於從 $i = 1$ 的座標不可能移動到 $(3, 2, 0)$ ，而 $(3, 2, 0)$ 也不可能移動成 $i = 1$ （不會划船的野蠻人渡河或會划船的野蠻人增加），再者， $(3, 1, 1)$ 、 $(3, 0, 1)$ 也不可能移動至 $(3, 1, 0)$ ，故移動至 $(3, 2, 0)$ 此點時必為遠離終點，其下一步必為靠近終點，此外，檢視圖（六）亦發現 $(3, 0, 0)$ 的下一步必為遠離終點，而從 E 系統切到 M 系統必為靠近終點，依據去回規則，則其下一步必為遠離終點。另外，因 L 系統與 E 系統只有 m 不同，所以 L 系統保留與 E 系統相同之特性，與 $(3, 2, 0)$ 相對應可知 $(0, 2, 0)$ 的下一步亦必為靠近終點，因此 $(0, 2, 0)$ 不為切出點，而 $(0, 1, 1)$ 為切出點。

由原問題的 $(3, 3)$ 渡河步驟： $(3, 3) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (0, 3) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (0, 2) \rightarrow (0, 0)$ 可對應 $(3, 2, 1) \rightarrow (3, 1, 0) \rightarrow (3, 2, 0) \rightarrow (3, 0, 0) \cdots \rightarrow (0, 0, 0)$ ，該路徑移動如圖（七）所示。

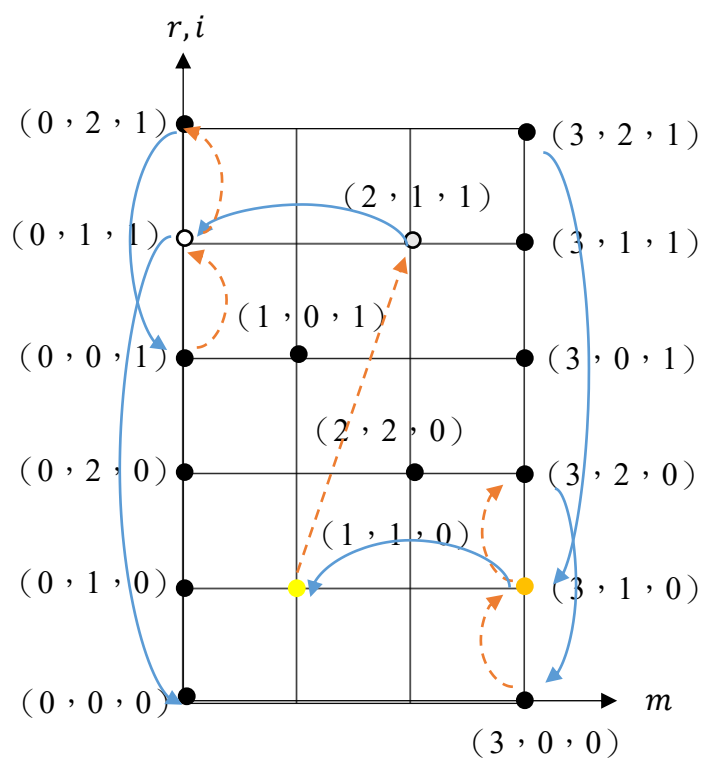


圖（五）



圖（六）

* 黃色實心代表切入點，黑色空心代表切出點。



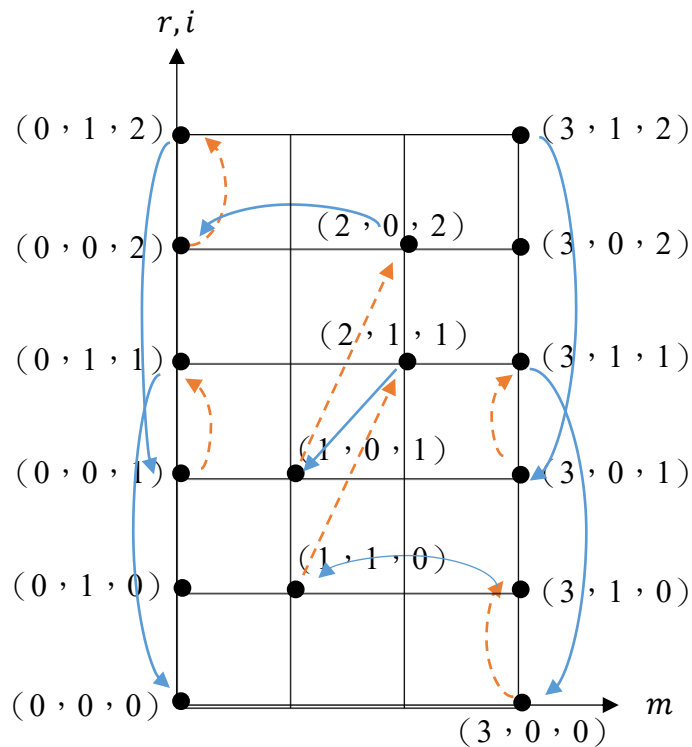
圖（七）

$x = 11$

2. $m=3, r=1, i=2, c=2$ 時：

$\begin{matrix} m \\ (r, i) \end{matrix}$	0	1	2	3
(1, 2)	(0, 1, 2)	(1, 1, 2)	(2, 1, 2)	(3, 1, 2)
(0, 2)	(0, 0, 2)	(1, 0, 2)	(2, 0, 2)	(3, 0, 2)
(1, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(3, 1, 1)
(0, 1)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(2, 0, 1)	(3, 0, 1)
(1, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(2, 1, 0)	(3, 1, 0)
(0, 0)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(2, 0, 0)	(3, 0, 0)

觀察圖（五）可知，從切入點到切出點之路徑必形成一 Z 字型，換言之，在 E、L 系統上各取一點，在 M 系統上取兩點，若行進路徑不能形成 Z 字型，則在 E、L 系統上選取的點則不為切入點與切出點，若能形成 Z 字型，則在 E、L 系統上選取的點可能分別為切入點與切出點，故切入點與切出點不一定為唯一。



圖（八）

$$x = 13$$

整理 $m=3, r=1, i=2, c=2$ 時之繪製系統狀態圖如上圖，在圖（八）中，發現在 M 系統中移動路徑為 5 步（非一般的 3 步）時，切入點與切出點仍形成一 Z 字型，觀察其中步數變化，得知在 M 系統中的步數為 $n_M = 1 + (2n - 1) + 1 = 2n + 1$ ，式子中的第一個數字 1 為 E 切入點到 M 切入點的步數； $(2n-1)$ 為 M 切入點到 M 切出點的步數且步數為奇數；第二個數字 1 則為 M 切出點到 L 切出點的步數，檢視上圖可發現，在 $(3, 1, 2)$ 此狀況， $x = 13$ ，。

3. $m=3, r=0, i=3, c=2$ 時：

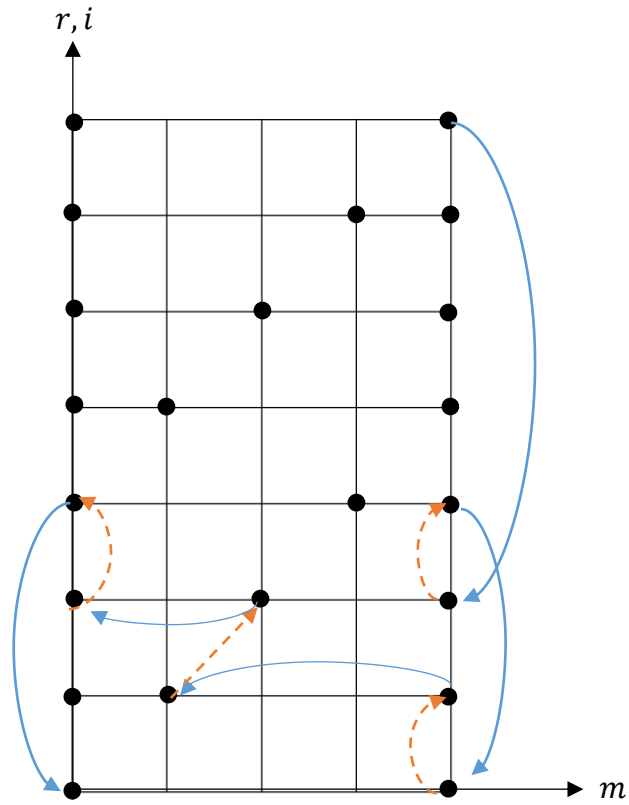
將本狀況 $(3, 0, 3)$ 之討論視為一基本型 $(3, 3)$ ，因所有野蠻人皆不會划船，意謂移動路徑不會出現上下移動之步數，換言之，若 $n_x = 0, n_y = 0$ ，系統狀態圖同 $(3, 3)$ ，因切入點為 $(3, 1)$ ，切出點為 $(0, 2)$ 且 $n_x = 0, n_y = 0$ ，所以此命題無解。

4. $m=4, r=3, i=1, c=3$ 時：

$\begin{matrix} m \\ (r, i) \end{matrix}$	0	1	2	3	4
$(3, 1)$	$(0, 3, 1)$	$(1, 3, 1)$	$(2, 3, 1)$	$(3, 3, 1)$	$(4, 3, 1)$
$(2, 1)$	$(0, 2, 1)$	$(1, 2, 1)$	$(2, 2, 1)$	$(3, 2, 1)$	$(4, 2, 1)$
$(1, 1)$	$(0, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(2, 1, 1)$	$(3, 1, 1)$	$(4, 1, 1)$
$(0, 1)$	$(0, 0, 1)$	$(1, 0, 1)$	$(2, 0, 1)$	$(3, 0, 1)$	$(4, 0, 1)$
$(3, 0)$	$(0, 3, 0)$	$(1, 3, 0)$	$(2, 3, 0)$	$(3, 3, 0)$	$(4, 3, 0)$
$(2, 0)$	$(0, 2, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(2, 2, 0)$	$(3, 2, 0)$	$(4, 2, 0)$
$(1, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(1, 1, 0)$	$(2, 1, 0)$	$(3, 1, 0)$	$(4, 1, 0)$
$(0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(2, 0, 0)$	$(3, 0, 0)$	$(4, 0, 0)$

在所有人均會划船的情況下，若 $c = 2, m \geq 4$ 時， x 無解（於後續討論將說明），欲使本狀況可進行討論，則需改變船載量，亦即 $c=3$ 。

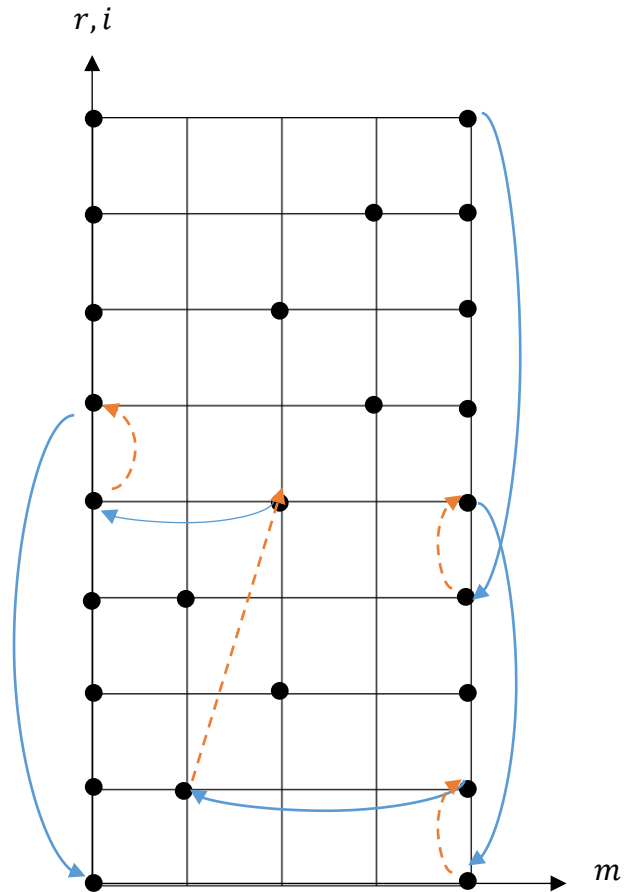
下圖為 $(4, 3, 1)$ 的圖和解法為 9 步， $x = 9$



5. $m=4, r=2, i=2, c=3$ 時：

$(r, i) \backslash m$	0	1	2	3	4
$(2, 2)$	$(0, 2, 2)$	$(1, 2, 2)$	$(2, 2, 2)$	$(3, 2, 2)$	$(4, 2, 2)$
$(1, 2)$	$(0, 1, 2)$	$(1, 1, 2)$	$(2, 1, 2)$	$(3, 1, 2)$	$(4, 1, 2)$
$(0, 2)$	$(0, 0, 2)$	$(1, 0, 2)$	$(2, 0, 2)$	$(3, 0, 2)$	$(4, 0, 2)$
$(2, 1)$	$(0, 2, 1)$	$(1, 2, 1)$	$(2, 2, 1)$	$(3, 2, 1)$	$(4, 2, 1)$
$(1, 1)$	$(0, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(2, 1, 1)$	$(3, 1, 1)$	$(4, 1, 1)$
$(0, 1)$	$(0, 0, 1)$	$(1, 0, 1)$	$(2, 0, 1)$	$(3, 0, 1)$	$(4, 0, 1)$
$(2, 0)$	$(0, 2, 0)$	$(1, 2, 0)$	$(2, 2, 0)$	$(3, 2, 0)$	$(4, 2, 0)$
$(1, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(1, 1, 0)$	$(2, 1, 0)$	$(3, 1, 0)$	$(4, 1, 0)$
$(0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(2, 0, 0)$	$(3, 0, 0)$	$(4, 0, 0)$

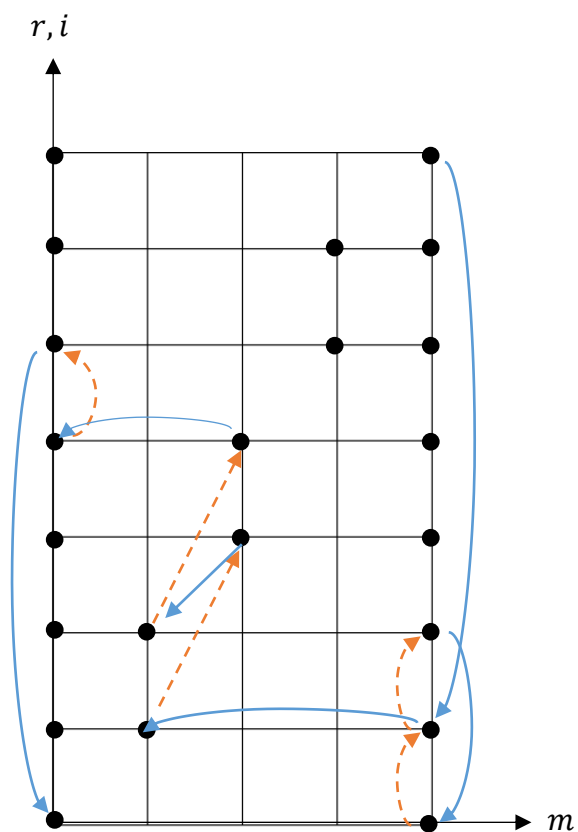
下圖為 $(4, 2, 2)$ 的圖和解法為 9 步：



6. $m=4, r=1, i=3$ 時, $c=3$:

$(r, i) \backslash m$	0	1	2	3	4
(1, 3)	(0, 1, 3)	(1, 1, 3)	(2, 1, 3)	(3, 1, 3)	(4, 1, 3)
(0, 3)	(0, 0, 3)	(1, 0, 3)	(2, 0, 3)	(3, 0, 3)	(4, 0, 3)
(1, 2)	(0, 1, 2)	(1, 1, 2)	(2, 1, 2)	(3, 1, 2)	(4, 1, 2)
(0, 2)	(0, 0, 2)	(1, 0, 2)	(2, 0, 2)	(3, 0, 2)	(4, 0, 2)
(1, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(3, 1, 1)	(4, 1, 1)
(0, 1)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(2, 0, 1)	(3, 0, 1)	(4, 0, 1)
(1, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(2, 1, 0)	(3, 1, 0)	(4, 1, 0)
(0, 0)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(2, 0, 0)	(3, 0, 0)	(4, 0, 0)

下圖為 $(4, 1, 3)$ 的圖和解法為 11 步：

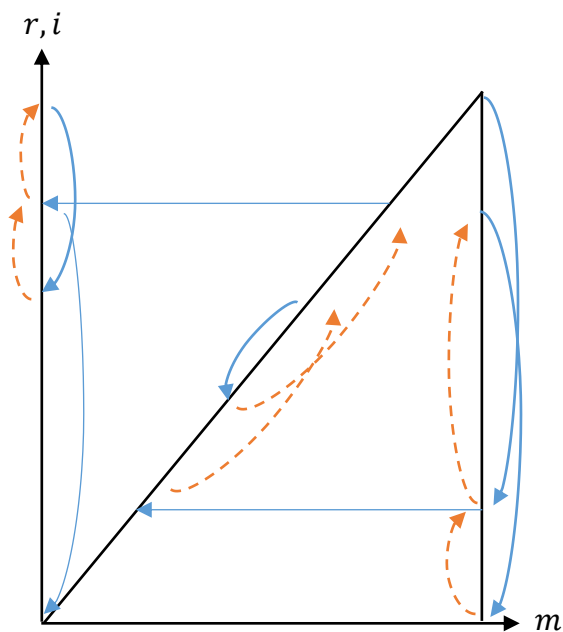
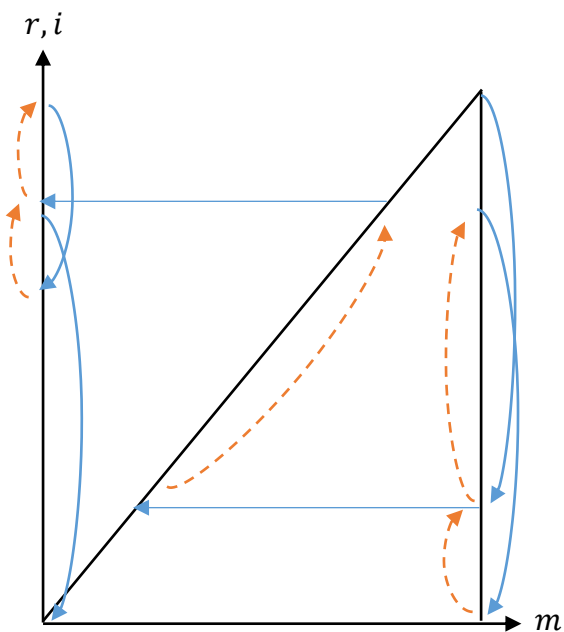


伍、研究結果與討論

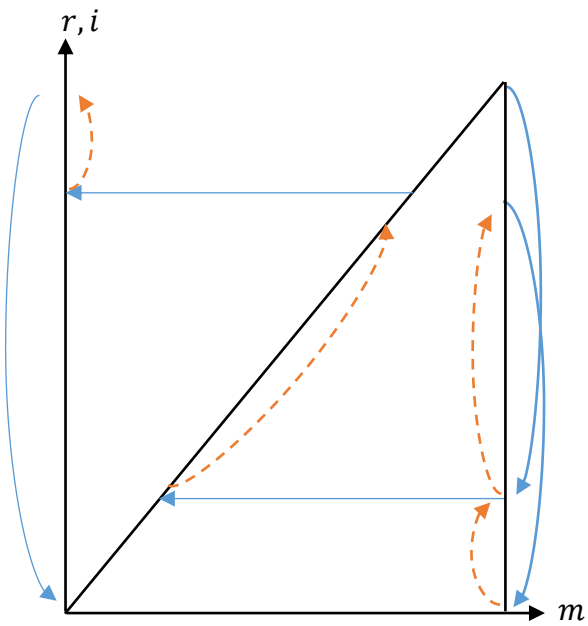
一、將系統狀態圖進行分類 ($c = m - 1$)

1. $m = 3, r \geq i$

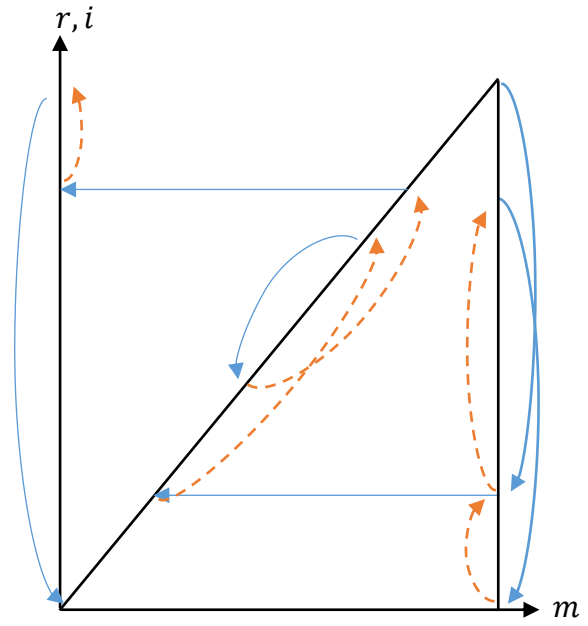
2. $m = 3, r < i$



3. $m > 3, r \geq i$

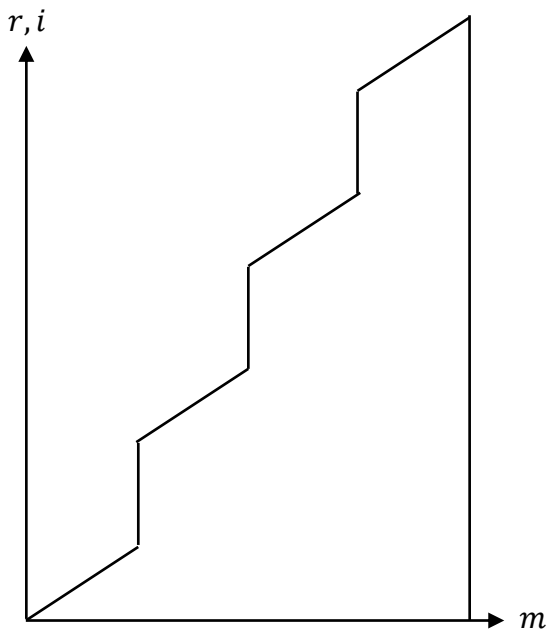


4. $m > 3, r < i$

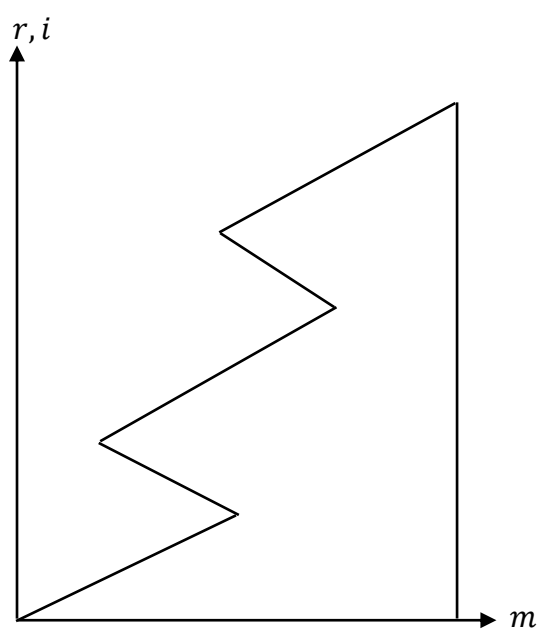


此外，亦針對系統狀態圖之 M 系統中 r 值之不同分類出四種相異類型的圖形，整理觀察結果如下：

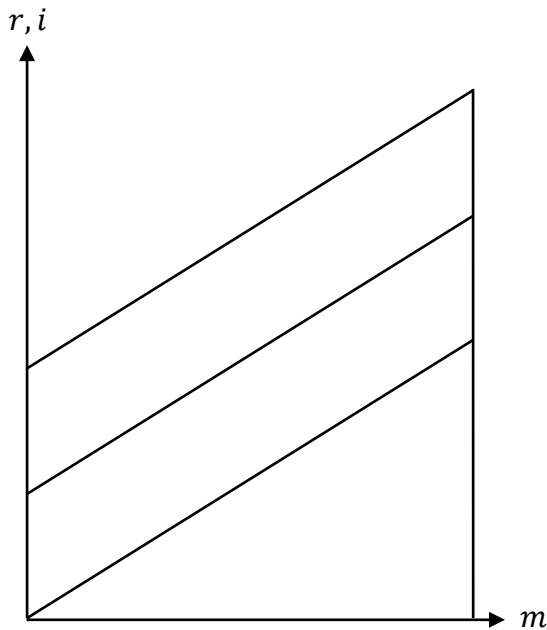
1. $r = 1$



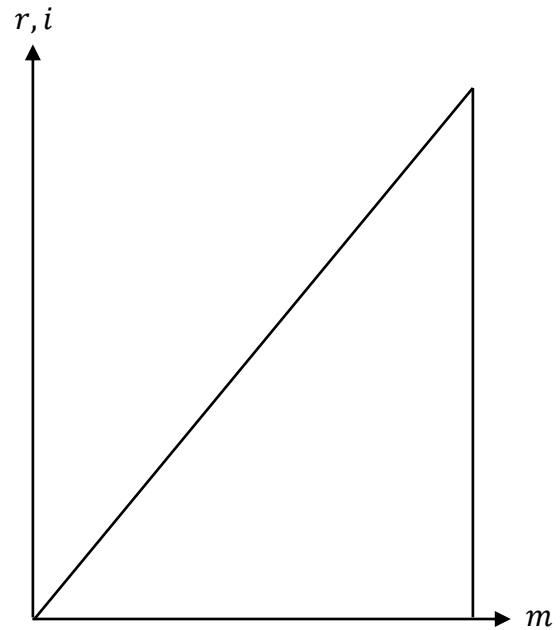
2. $r = 2$



3. $r \geq 3$



4. $r = m$



二、格數轉換座標公式

(一) 整理實作之結果，發現在所有系統中的格數轉換公式

公式(1)： $n_x = m$

公式(2)： $n_y \div (r + 1) = i' \cdots r' (i' + r' \leq c)$

證明：(1) $n_x = 1$ 時， m 增加為 1； $n_x \pm n$ 時，則 $m \pm n$ ，故 $n_x = m$ 。

(2) 從 (m, r, i) 移動至 $(m, r, i + 1)$ 須走 $(r + 1)$ 格，即 $n_y = r + 1$ ，從 (m, r, i) 移動至 $(m + 1, r, i + 1)$ 須走 $(r + 2) = (r + 1) + 1$ 格， $n_y = (r + 1) + 1$ ，故 $n_y \div (r + 1) = i' \cdots r' (i' + r' \leq c)$ ，可是船載量最多為 c 個人，因此 $i' + r' \leq c$ 。

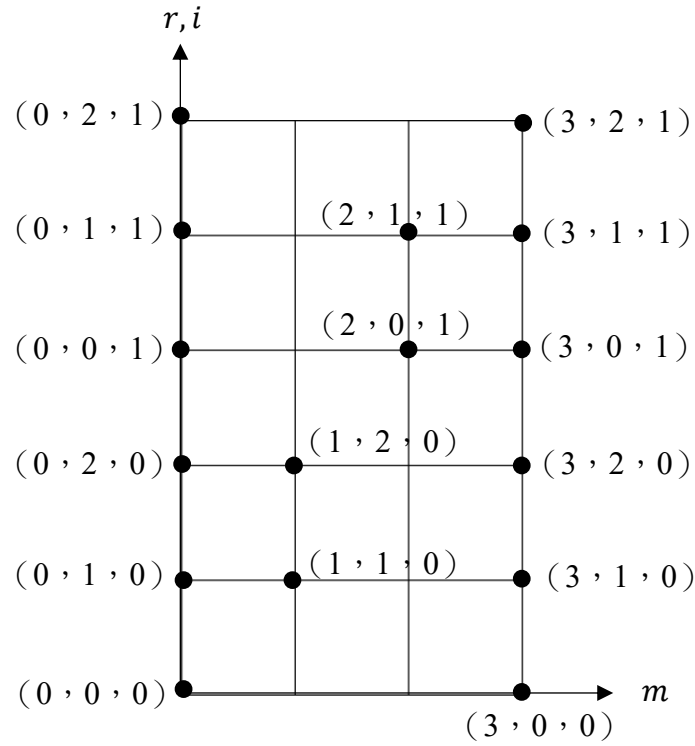
(二) 發現一： r, i 軸上的格子數量為 $ri + r + i$ 格。

以 $(3, 2, 1)$ 的圖為例，可看出 r, i 軸的有 6 個點、5 個方格，由上而下依序為 $(3, 2, 1) \rightarrow (3, 1, 1) \rightarrow (3, 0, 1) \rightarrow (3, 2, 0) \rightarrow (3, 1, 0) \rightarrow (3, 0, 0)$ 共五方格，由此可知： r, i 軸上的格子數量為 $ri + r + i$ 格。

說明： r, i 軸上的點為 r 與 i 組合之結果， $r=0, 1, 2, \dots, r$ ， $i=0, 1, 2, \dots, i$ ，其組合數有 $(r + 1)(i + 1) = ri + r + i + 1$ ，即 r, i 軸上的點數，因為格子數 = 點數 - 1，可得格子數 = $(ri + r + i + 1) - 1 = ri + r + i$

三、討論 $c = m - 1$ 時之步數公式

(一) 下圖為 $m=3, r=2, i=1, c=2$ 之系統狀態圖（未列出移動路徑）



(二) 取頂符號內的取值

由上所整理之格數轉換公式

$$n_y \div (r + 1) = i' \cdots r' (i' + r' \leq c) - (1)$$

$$n_x = m - (2)$$

i' , r' 分別為 i , r 的變化量，即渡河時船上之是否會划船的野蠻人數，在此 r 意指所有會划船的野蠻人之數量

在本狀況中，我們得知下列情形：

$$i' = 0, r' = 1, 2 \Rightarrow n_y = 1, 2$$

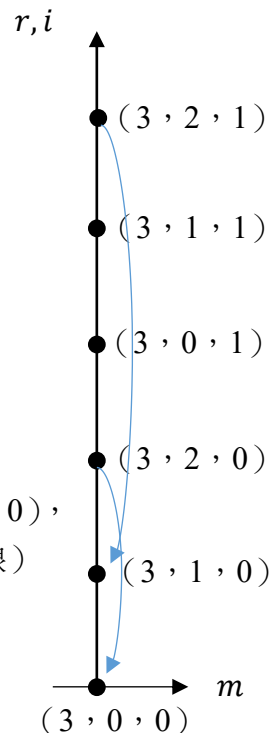
$$i' = 1, r' = 1, 2 \Rightarrow n_y = 4, 5$$

$\therefore S = \{1, 2, 4, 5\}$ ， S 為在 E , L 系統中所有合理狀況中 n_y 之集合

[]：取頂符號，不小於此數之最小整數，為高斯符號的一種，相當於「無條件進位到整數位」。 $S = \{1, 2, 4, 5\}$ 時，第一次 n_y 取值為 4，總格數為 5，不包含回程之步數並要回到 $(3, 0, 0)$ ，再回到切入點 $(3, 1, 0)$ ，故所得去程步數應為 $[5/4]$ 。

說明：因第一次選取為 n_y 之最大值 4 ($c=2$, n_y 不為 5 因為載運量不足)，去程的步數為 $[5/4]$ ，而第二次去程點座標需歸回 $(3, 0, 0)$ ，然而步數 2 不一定恰為最大整數值，故取 $[5/4]$ 之值，且回程（橘色虛線）為 $[5/4] - 1$ 步，根據去回規則，再加上 $(3, 0, 0) \rightarrow (3, 1, 0)$

（回切入點）此步驟，可知 E 系統的總步數為 $2 [5/4]$ 。



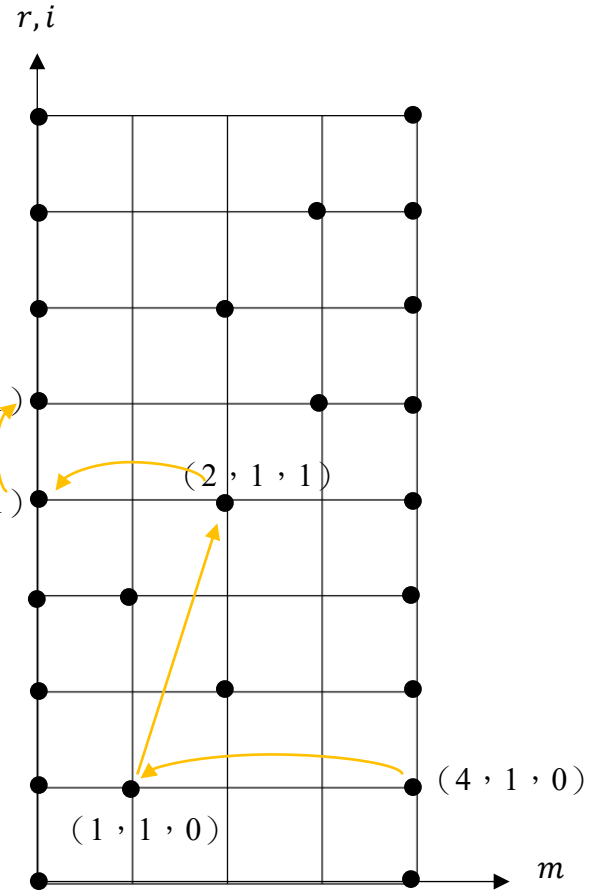
檢視圖（七）和圖（八），觀察 M 系統之集合將其定義為 $n_M = \{3,5\}$ ，第 1 型式 $M=3$ ，第 2 型式 $=5$ ，亦即第一型式中之移動步數為 3，而第二型式中之移動步數為 5。經實作後，發現在多個在系統狀態圖中切入點皆為 $(m, 1, 0)$ 。

以 M 系統中 $(2, 1, 1)$ 為例， $(1, 1, 0)$ 可以直接移動至 $(2, 1, 1)$ ，而第 2 型中 $(1, 1, 0)$ 無法直接移動至 $(2, 0, 2)$ ，必須先移動至 $(1, 0, 1)$ 才能移動至 $(2, 0, 2)$ 。過程中發現其他狀況亦為如此，故由此推論第 1 型式 M 系統步數為 3，第 2 型式 M 系統步數則為 5。

發現二：M 系統格數的集合 $n_M = \{3,5\}$ 的成立

說明：在 M 系統可切出的點為 (m, r, i) ，而欲切入至 L 系統，其切出點為 $(0, r, i)$ ，回到上一步驟，需往回至少走 1 步，其點座標為 $(0, r+1, i)$ 或 $(0, 0, i+1)$ ，但該狀況 $(0, 0, i+1)$ 並不允許，故所得 r 和 i 值要很小，因而皆選擇數值為 1，亦即切出點為 $(0, 1, 1)$ ，如右圖所示。

在 M 系統中移動步數為 5，亦即第 2 型式並無此特性，路徑需再經一次轉折， $n_M = 5$ ， $(0, 1, 1)$ 由此可知第 1 型式 $n_M = 3$ ，第 2 型式 $n_M = 5$ 。



觀察 L 系統時，發現除 $m=3$ 時的系統狀態圖之外，其餘均為點對稱 $4 \left\lceil \frac{ri+r+i}{S(max)} \right\rceil$ ，而其他的皆為 E 系統步數： $\left\lceil \frac{ri+r+i}{S(max)} \right\rceil$ ，L 系統步數： $2 \left\lceil \frac{ri+r+i}{S(max)} \right\rceil$ 或 $1 \left\lceil \frac{ri+r+i}{S(max)} \right\rceil$ ，

E 系統步數 $2 \left\lceil \frac{ri+r+i}{S(max)} \right\rceil$ 共三種分配類型。

[]：取頂符號，不小於此數之最小整數，為高斯符號的一種。

說明：除 $m=3$ 以外，發現步數皆為 E 系統步數： $2 \left\lceil \frac{ri+r+i}{S(max)} \right\rceil$ ，L 系統步數： $\left\lceil \frac{ri+r+i}{S(max)} \right\rceil$ 此類型進行分配，由上所述得知當 $n_M = 5$ 時，E 系統移動至切入點 $(4, 1, 0)$ 必須移動 $[8/7]$ 步，故總步數為兩倍的 $[8/7]$ ，加上後來的 L 系統 1 倍的 $[8/7]$ 所以為

$2\left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil + \left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil$ ，整理結果所得步數公式： $x = 3\left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil + n_M(m \neq 3)$ ，當 m 為 3 時，其步數公式則為

$$x = 4\left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil + n_M。$$

四、討論 $c = m$ 時之步數公式

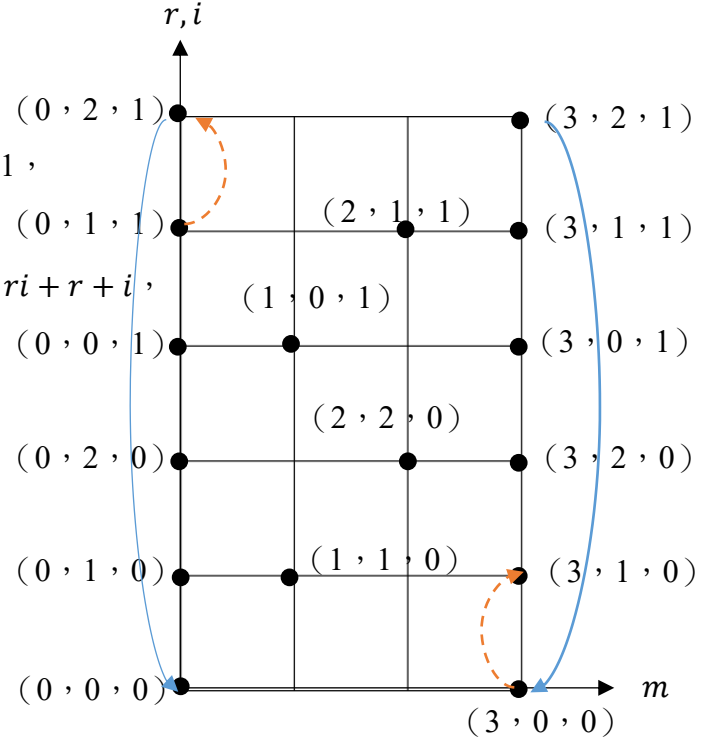
以 $(3, 2, 1)$ 的圖形進行討論，因 $c=m$ ， $m=r+1$ ，

所求第 1 步的 $S(max)$ 為 E 系統的整個距離，

亦即 $ri + r + i$ ，代入 $\left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil$ ，得 $\left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil = ri + r + i$ ，

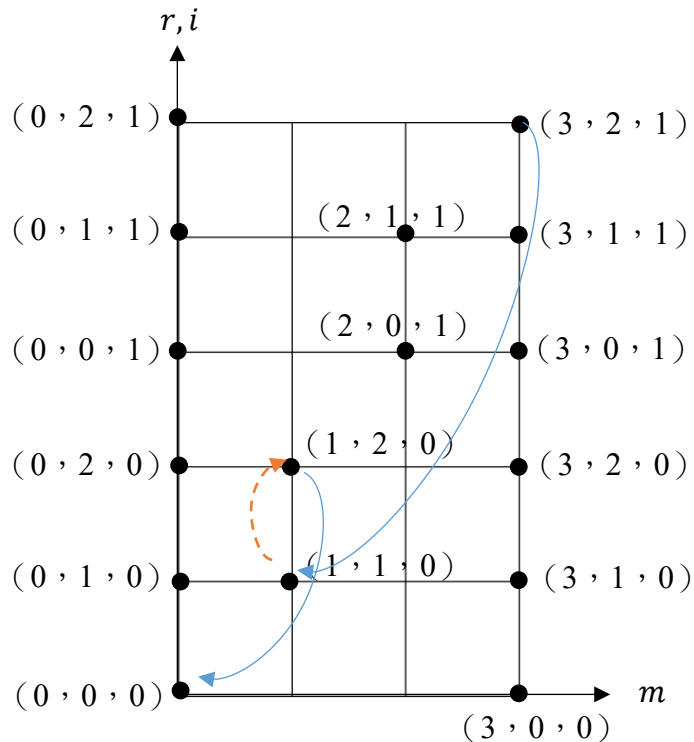
則 $\left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil = 1$ ，代入所導出之步數公式，

得 $x = 4 + n_M$ 。



五、 $c \geq m + 1$ 時之步數討論

當 $c \geq m + 1$ 時，可發現移動路徑為 M 系統斜線，如下圖所示。



以 $(3, 2, 1)$ 為例， $c \geq m + 1$ 時， $c = 4$ ， $x = 3$ ，觀察上圖可知，將 (m, r, i) 移動至 $(0, 0, 0)$ ， $n_x + n_y = 2m$ ，發現有兩種性質：

- (一) 性質 1： $c \geq 2m$ ， $x = 1$ 。
- (二) 性質 2： $2m > c \geq m + 1$ ， $x = 3$ 。

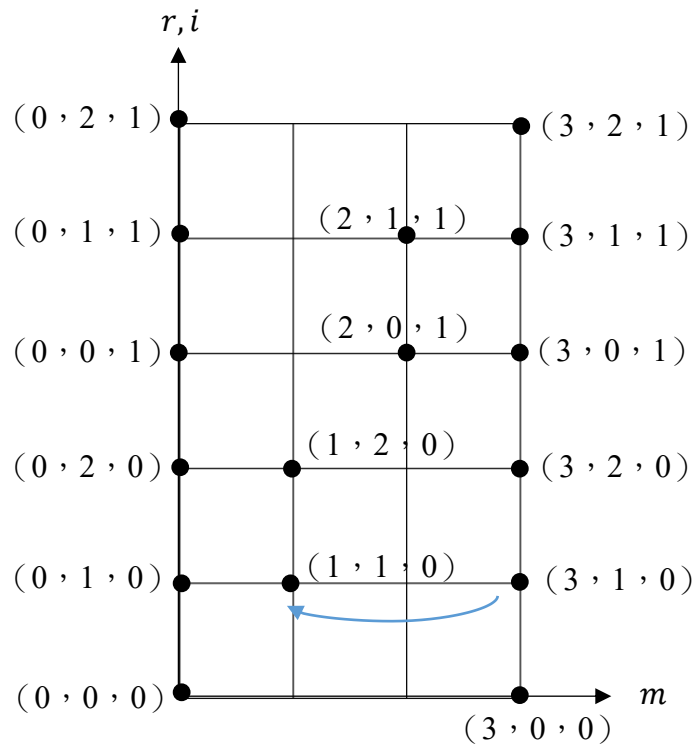
說明：

- (一) 性質 1，可直接由原點 $(3, 2, 1)$ 移動回 $(0, 0, 0)$ ，所以 $x = 1$ 。
- (二) 性質 2，無法直接移動至 $(0, 0, 0)$ ，假設 $c = m + a (a \in \mathbb{N})$ ，不計算回程的步數，第一步加第二步去程時，得其步數為 $2m + 2a$ ，故回程的步數要為 $2a (a \geq 1)$ ，因此，回程的步數至少是 2 或 2 以上，由此可發現不論是 2 或 2 以上之步數皆可在 M 系統中找到，所以當 $2m > c \geq m + 1$ 時， $x = 3$ 。

六、判斷有無解

性質 3： $c < m - 1$ 時，此命題無解。

說明：因為在切入點時，必須從 (m, r, i) 至 $(1, 1, 0)$ 所以 n_x 為至少為 $m - 1$ 。



陸、結論

一、當 $c = m - 1$ 時

- (一) 有 4 種不同種類的步數走法，如上述之系統狀態圖所示。

二、格數公式

- (一) $n_x = m$
- (二) $n_y \div (r + 1) = i' \cdots r' (i' + r' \leq c)$
- (三) r, i 軸上的格子數量為 $ri + r + i$ 格

三、當 $c = m - 1$ 時，步數公式為：

- (一) $m > 3$ ， $x = 3 \left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil + n_M$

(二) $m = 3$, $x = 4 \left\lceil \frac{ri+r+i}{s(max)} \right\rceil + n_M$

(三) $n_M = \{3, 5\}$ 時，

1. $r \geq i$ 時， $n_M = 3$

2. $r < i$ 時， $n_M = 5$

四、當 $c = m$ 時，步數公式為： $x = 4 + n_M$

五、 $c \geq m + 1$ 時的，步數為：

(一) 當 $c \geq 2m$, $x = 1$

(二) 當 $2m > c \geq m + 1$, $x = 3$

六、判斷有無解

(一) $c \geq m - 1$ 時，此命題有解，反之則無解。

柒、參考資料及其他

林炳炎 (2010)。北投埔林炳炎-渡河問題。 <https://pylin.kaishao.idv.tw/?p=2356>。