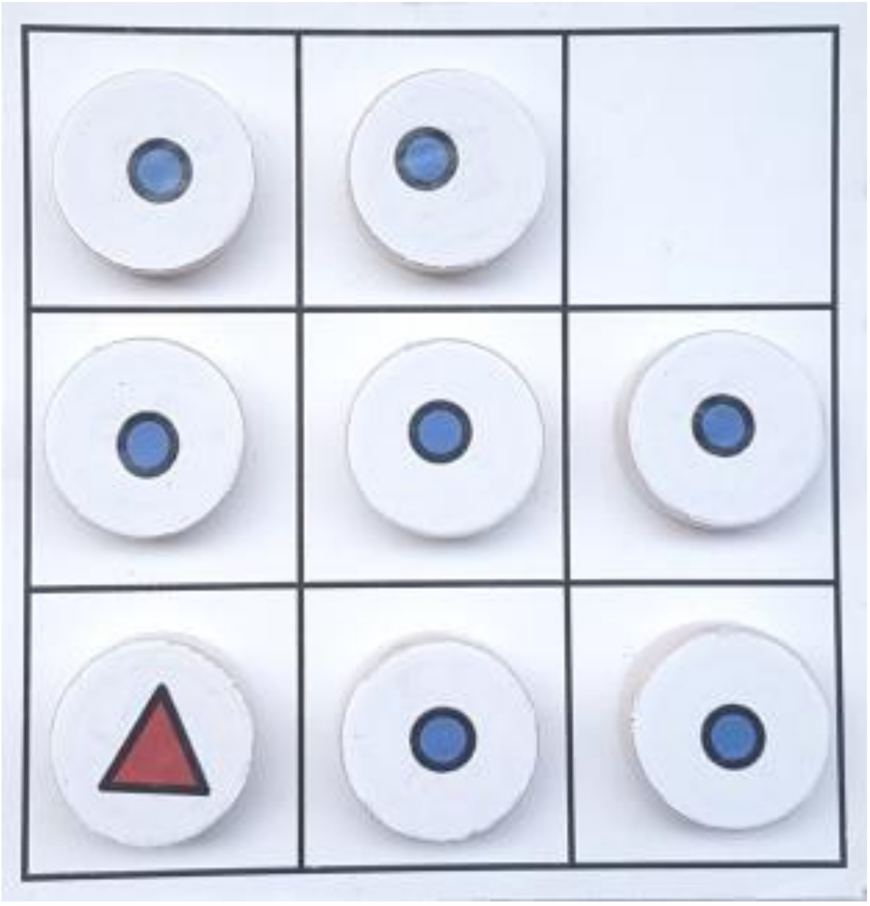
嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：**阿爸「拈」我(**移位出九宮棋——安全殘局之分析)



關 鍵 詞：路徑、餘數、安全殘局

編　　號：

阿爸「拈」我 (移位出九宮棋——安全殘局之分析)

摘要

如圖 1，在移位出九宮的遊戲規則下，主棋(▲)只能往上或往右移位，和空位(□)有相鄰的棋才可以移入□，移位的棋原來的位置便空出，形成新的□，▲遇到□一定要移入，最後將▲移到右上角終點者為贏。首先，從簡化問題入手，請參照圖 4，從▲的六種移位路徑(R)著手，可以發現以左下角到右上角為對稱線，其中 R1 與 R6、R2 與 R5、R3 與 R4 互為對稱路徑；再將其他 7 顆一般棋(●)放入，留下右上角為空位，接著討論□移位總步數與▲的移位路徑關係，發現 R2 與 R5 符合□移位最少總步數(S_3)為 13 步。進而推導計算出正 n^2 宮格的□移位最少總步數(Sn)為 2(n-1) +3[2(n-1)-1]= 8n-11 步，且一定為奇數步數。兩人輪流玩移位出九宮遊戲時，在每人每次可移位 1 步或 2 步的情形下，發現先下者先移 1 步，則留下安全殘局 12=4(1+2)步，則在接下來每一輪(兩人各下完 1 次)結束時，先下者皆可以留下 3 的整數倍為安全殘局，依序為 3(1+2)、2(1+2)、(1+2)，所以先下者能掌控全局，最終將▲移到終點上，只要中間不犯錯，就能可立於不敗。

壹、研究動機：

有一天，我和我爸爸在家裡玩起了移位出逃九宮格棋的遊戲，簡稱為移位出九宮。在九宮格上共有八顆棋和一個空位，如下圖 1，規則是左下的主棋(▲)不可往回走，即只可以往上或往右走，且不能往斜走，和空位(□)有相鄰的棋才可以移入□，且用最少移位總步數，最後能將▲移到圖 1 中的右上角的終點者為贏，兩人輪流下，每人每次可移位 1 或 2 步。爸爸總是能最後將▲移到終點，讓我很不服氣，但是我發現，不管怎麼走總移步數都是奇數，不會出現偶數。為什麼會這樣呢？因為在六上數學(康軒版)第十一冊剛學到「列式與解題」 單元，所以想要以此為基礎，並尋找有興趣的同學，藉此次的科展來深入探討移位出九宮的問題。

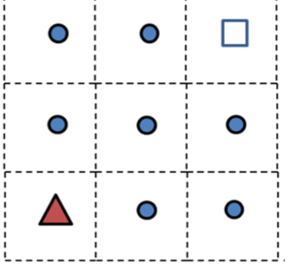


圖 1、電腦操作之移位出九宮棋盤與棋

貳、研究目的：

一、探討九宮格的主棋(▲)移位路徑(R)與空位(□)移位總步數的問題。

二、利用規律性找出空位(□)移位最少總步數(Sn)的規則，並推算出正 n^2 宮格的 Sn 公式化情形。

三、找出兩人輪流下，每人每次可移動 1 步或 2 步時的安全殘局規律，並推算出兩人每次可移動 1 或 2 或 3…或 k 步時的安全殘局。

四、根據一開始的遊戲規則，推算出完不同正 n^2 宮格時的致勝關鍵？

五、探討主棋移到終點是贏或是輸時，所運用的安全殘局有何不同？

參、研究設備與器材

自製棋盤和棋子、紙、筆、電腦。

肆、研究過程方法與結果

一、符號定義與名詞定義

(一) ▲表示為主棋，只有 1 顆。

(二) ● 表示為一般的棋，共有 7 顆。

(三) □表示為空位，只有 1 位空位，為記錄與計算移位步數之需要而出現之符號，在實際棋盤上是空白空無一物的。

(四) R 表示為在正 n^2 宮格中主棋(▲)的移位路徑。

(五) Sn 表示為空位(□)移位最少總步數，是將▲從左下角移到正 n^2 宮格右上角終點時□移動的總步數中最少的情形。

(六) M1n 表示為正 n^2 宮格中主棋(▲)完成第一次移位時空位(□)移動的最少步數；▲完成第二次移位時□移動的最少步數為 M2n；依序類推…

(七)Tn 表示為主棋(▲)在正 n^2 宮格中的總移位次數是 2(n-1)。

(八)正 n^2 宮格：一邊為 n 格的正方形方格。

(九)安全殘局：兩人輪流走一定步數，每人每次最少走 1 步，最多可以走 K 步，K 要小於總步數，最後走完最後 1 步的人為贏，因此，K+1 步為安全殘局，則 K+1 的整數倍也會是安全殘局。

(十) 步數計算標準：和空位(□)相鄰的棋移入□或說□移動一格，稱為移位 1 步。

二、一開始時的遊戲規則說明(即和阿爸對奕時的規則)

如下圖 2，兩人輪流移位九宮格中的棋到和□相鄰的位置上，每人每次可移 1 步或 2 步，要用□移位最少總步數完成遊戲，看誰能將▲從左下角最後移到右上角的終點者為贏。遊戲一開始，▲在九宮格左下角的位置，□在九宮格右上角。 ▲只能往上或往右移動，不可斜走，不可往回走；● 只能左、右或上、下移動，不可斜走；和□有相鄰的棋才可以移入□，移動的棋原來的位置便空出，形成新的□。□碰到▲時只能繞著▲相鄰位置移動，▲碰到□一定要移入□，最後誰能將▲移到右上角終點者為贏。

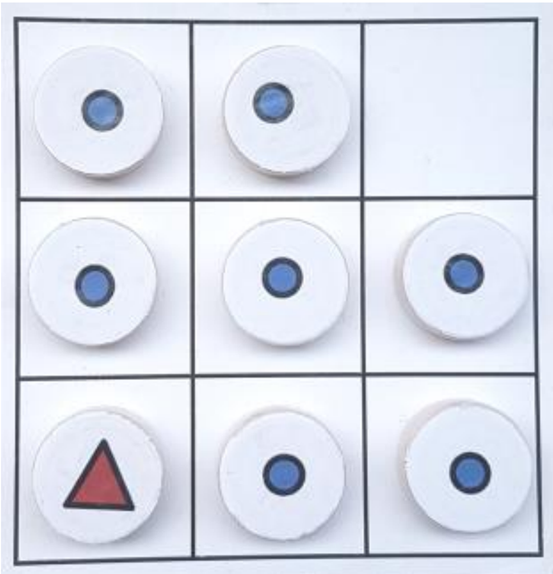
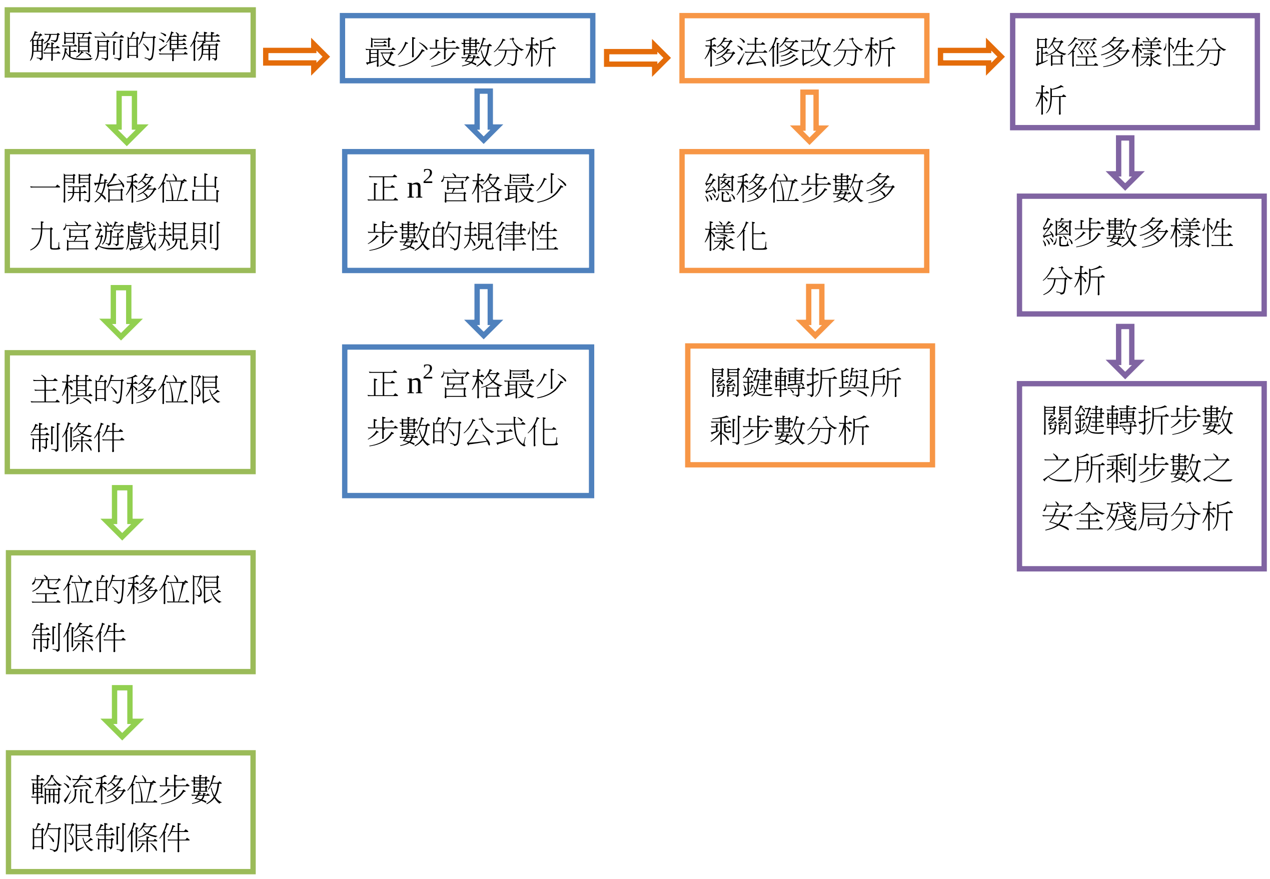


圖 2、實際上操作之移位出九宮棋盤與棋

三、文獻探討

題目	內容	出處
1.一步一腳印探討方格棋盤中各種路徑問題	不同方格路徑和步數的計算	中華民國第 53 屆中小學科學展覽會國小組數學科
2.青蛙棋棋盤和棋譜研究	找出棋盤和棋譜的規律並列出破關方式	中華民國第 55 屆中小學科學展覽會國小組數學科
3. 堆集遊戲解法之探討	探討 n 顆棋子移動到終點的最少步數以及行走方法之組合。	中華民國第 58 屆中小學科學展覽會國小組數學科

四、研究架構圖



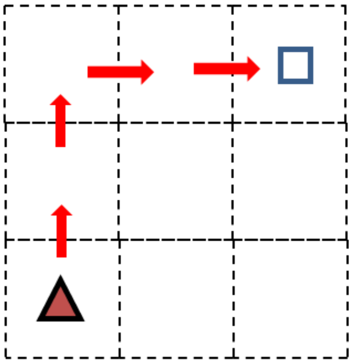
伍、研究結果

一、▲只能往右或往上之路徑探討

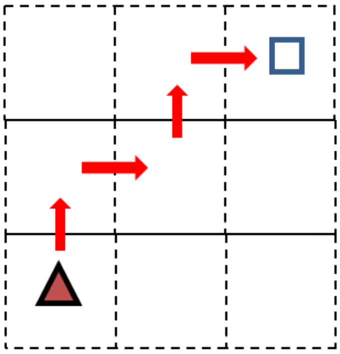
研究一：在▲只能往右或往上的條件下，▲在九宮格的移位路徑情形

(一)簡化問題

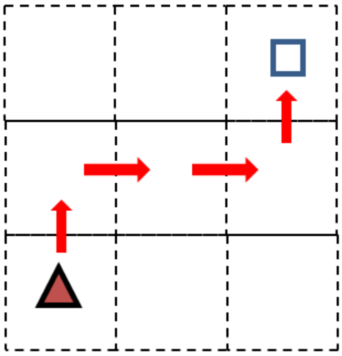
和同學討論後，先從簡化問題著手，先不把其他的棋放進入，只把主棋(▲)和終點(□) 放進來討論▲移位路徑(R)的分析，用▲標示為主棋一開始的起點位置，不可往回走，→標示為▲移位一格， 右上角□為▲移位路徑終點。▲移位路徑分析如下：



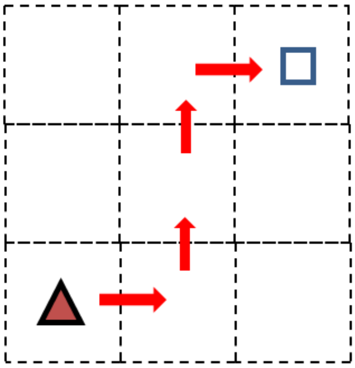
▲移位路徑 1(R1)



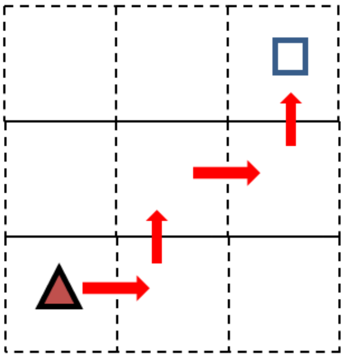
▲移位路徑 2(R2)



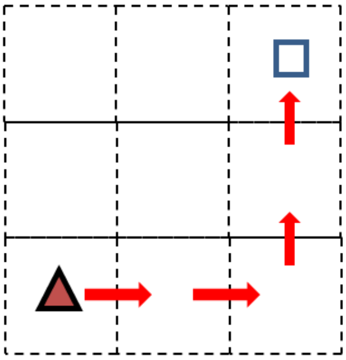
▲移位路徑 3(R3)



▲移位路徑 4(R4)



▲移位路徑 5(R5)



▲移位路徑 6(R6)

結論 1：

(1)▲在九宮格左下角移位 4 格可到右上角終點，共有 6 種▲移位路徑走法，並為▲的最短移位路徑方法。

(2)從左下角▲到右上角終點□做對角線，可分為對稱 R1 與 R6、R2 與 R5、R3 與 R4，因此往後探討▲移位路徑(R)與□移位最少總步數(Sn)分析時只要探討 R1、R2、R3 的情形即可，對稱之 R6、R5、R4 亦同理可證，故可省略。

(二) 在▲只能往右或往上的條件下，終點位置不同之▲移位路徑分析：

如下圖 3，將九宮格標上 a、b、c、d、e、f、g、h、i 不同的位置點，利用➡標示出到不同位置點的路徑方式，而數字為到達該位置點為終點時的不同路徑總數，相對分析如下表 1：

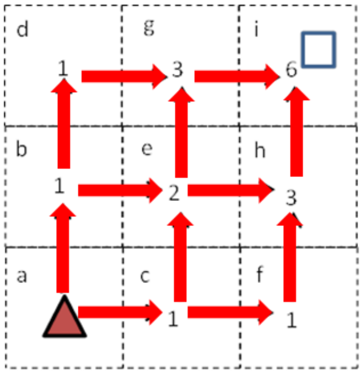


圖 3、終點位置不同之▲移位路徑分析

表 1 、▲從 a 移位到其他各點為終點的最短路徑分析

▲起點	終點	▲移位路徑	▲移位路徑數
a	b	(1)a➡b	1
a	c	(1)a➡c	1
a	d	(1)a➡b➡d	1
a	e	(1)a➡b➡e (2)a➡c➡e	2
a	f	(1)a➡c➡f	1
a	g	(1)a➡b➡d➡g (2)a➡b➡e➡g (3)a➡c➡e➡g	3
a	h	(1)a➡b➡e➡h (2)a➡c➡e➡h (3)a➡c➡f➡h	3
a	i	(1)a➡b➡d➡g➡i (2)a➡b➡e➡g➡i (3)a➡b➡e➡h➡i (4)a➡c➡e➡g➡i (5)a➡c➡e➡h➡i (6)a➡c➡f➡h➡i	6

結論 2：

(1) 在▲只能往右或往上的條件下，▲的移位路徑即為最短路徑走法。
(2) 從 a 走到 b、c、d、f 這 4 點各只有 1 種最短路徑走法。
(3) 從 a 走到 e 這個點有 2 種最短路徑走法。
(4) 從 a 走到 g、h 這兩點各有 3 種最短路徑走法。
(5) 從 a 走到終點 i 這個點只有 6 種最短路徑走法。

研究二：▲移位路徑(R)與□移位最少總步數(Sn)分析

(一)將其他的棋(⬬)放入如圖 4 中 b、c、d、e、f、g、h 的位置，進行▲移位路徑與□移位步數探討

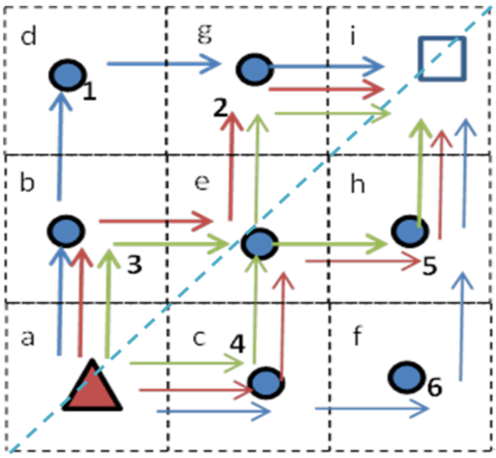


圖 4

左圖 4 說明：

→ 表是 R1 和 R6

→ 表是 R2 和 R5

→ 表是 R3 和 R4

- - - 表示對稱軸

1.▲第 1 次移位時□移位最少步數($M1_3$)分析

(1)根據遊戲規則，和□相鄰的棋才能移入□，因此，▲要能完成第 1 次移位，必須先將一開始的空格□先移到 b 或 c 點，▲才能移位到 b 或 c 點的位置上。

(2)而□移到 b 或 c 點需要最少移動 3 步棋，而到達 b 或 c 點則各有 3 條路徑，以 b 點說明：i→g→d→b 、i→g→e→b 、i→h→e→b ；以 c 點說明：i→h→f→c 、i→h→e→c 、i→g→e→c 。

(3)所以▲移位到 b 或 c 點要在□移第 4 步才可以做到，即 $M1_3$=4。

(4)以下▲要移位到 b 點之前 4 步只擇 3 條中的 1 條路徑 i→g→d→b 來說明，其他 5 條路徑同理，予以省略。

(二) ▲移位路徑(R)與□移位最少總步數(Sn)探討分析

1.以下▲移位路徑與□移位步數說明：

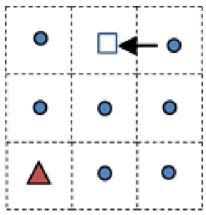
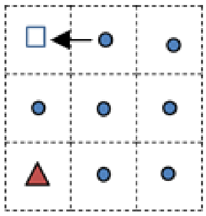
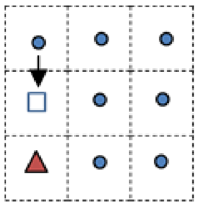
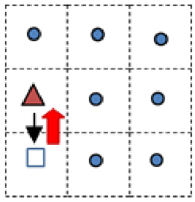
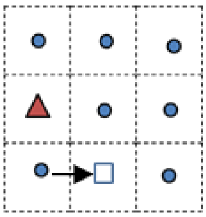
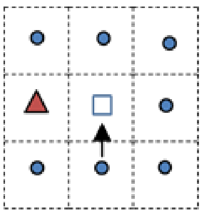
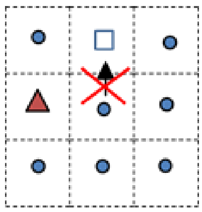
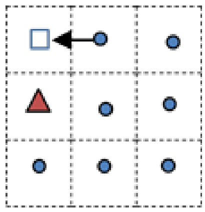
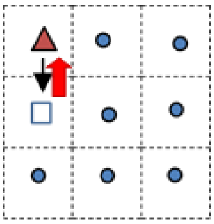
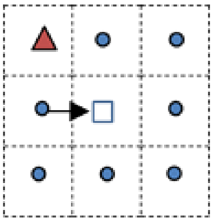
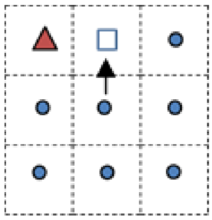
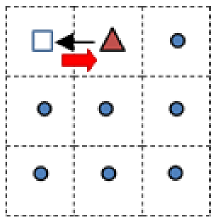
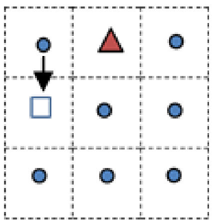
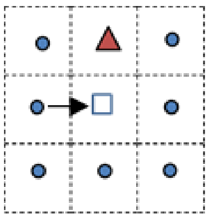
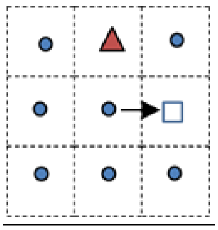
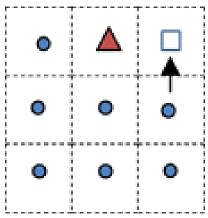
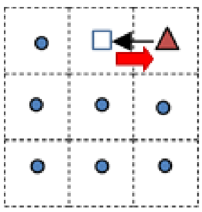
(1) →表□移位一步，為移位總步數的計算依據。

(2) →表▲移位一格。

(3) ✕表發生不符合一開始遊戲規則移動方式的位置。

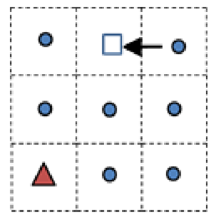
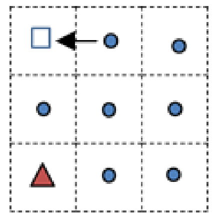
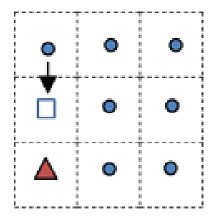
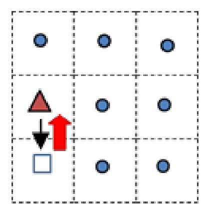
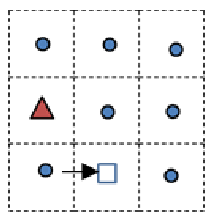
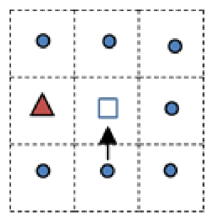
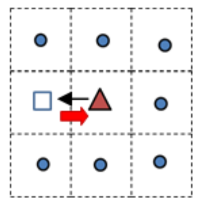
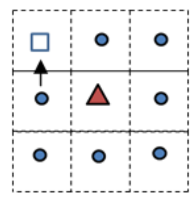
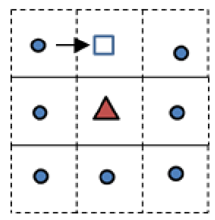
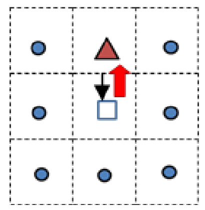
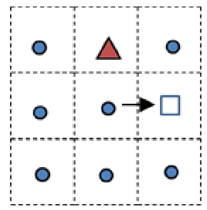
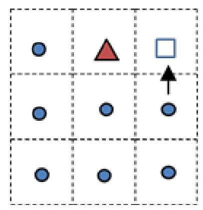
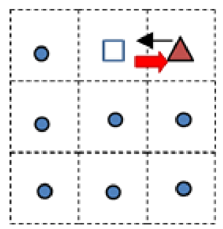
2. 在正 3^2 宮格中▲移位路徑(R)種類與□移位最少總步數(S_3)分析如下：

(1)▲移位路徑 1(R1)的□移位總步數情形：

			
第 1 步	第 2 步	第 3 步	第 4 步
			
第 5 步	第 6 步	第 7 步(✕)	第 8 步
			
第 9 步	第 10 步	第 11 步	第 12 步
			
第 13 步	第 14 步	第 15 步	第 16 步
			
第 17 步			

小結 1：在 R1 中發現在第 7 步時不符合一開始的遊戲規則，▲碰到□一定要移入□，但卻沒有，到了碰到□第 2 次才移入。

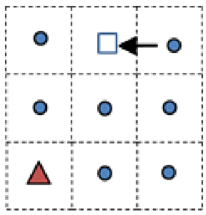
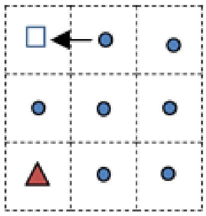
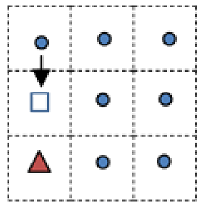
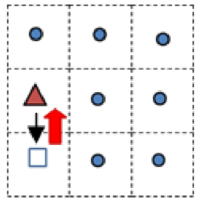
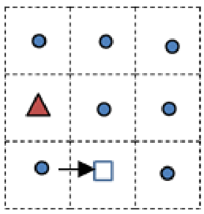
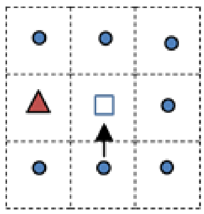
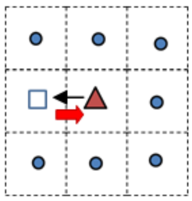
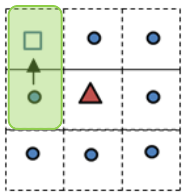
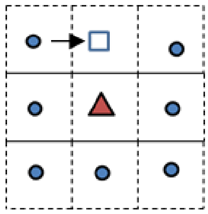
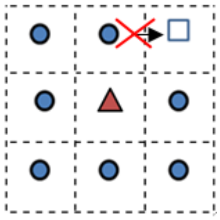
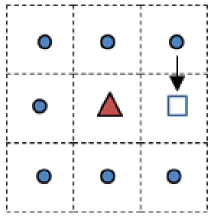
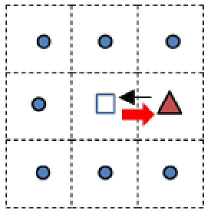
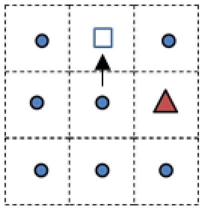
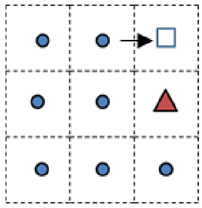
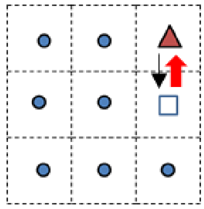
(2) 移位路徑 2(R2)的移位總步數情形：

			
第 1 步	第 2 步	第 3 步	第 4 步
			
第 5 步	第 6 步	第 7 步	第 8 步
			
第 9 步	第 10 步	第 11 步	第 12 步
			
第 13 步			

小結 2：在 R2 中發現是符合遊戲規則的，是移位最少總步數(S_3)的走法，即 S_3 為 13 步。

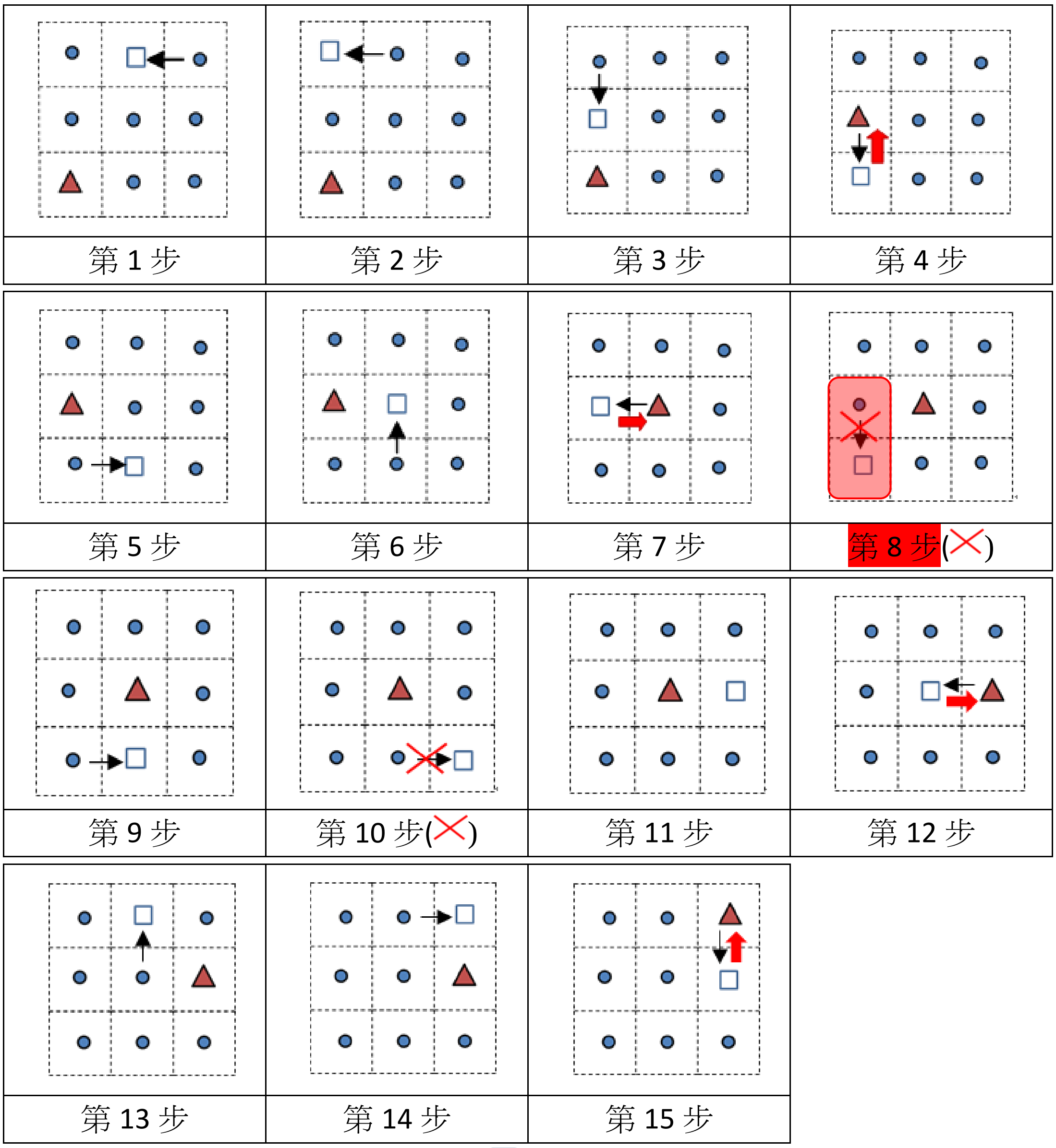
3、▲移位路徑 3(R3)的□移位總步數情形：

(1) ▲移位路徑 3 時第 8 步□往上移位情形

			
第 1 步	第 2 步	第 3 步	第 4 步
			
第 5 步	第 6 步	第 7 步	第 8 步
			
第 9 步	第 10 步(✕)	第 11 步	第 12 步
			
第 13 步	第 14 步	第 15 步	

小結 3：在 R3 中發現在第 10 步時不符合遊戲規則，因為▲碰到□一定要移入□，即□應該是要往下移位，▲要往上移位，但卻沒有，而是□往右移位。

(2) ▲移位路徑 3(R3)時第 8 步□往下移位情形



小結 4：在 R3 中發現，若第 8 步□往下移位，一樣會造成第 10 步的錯誤情形，就算移入也是往下移，還是不符合一開始的遊戲規則，▲只能往上或往右走，所以第 8 步□往下移位時，就埋下第 10 步不符合遊戲規則的情形。

(二) ▲移位路徑(R)種類與□移位總步數分析

將上述▲移位路徑種類與□移位總步數分析整理如下表 2：

表 2、▲移位路徑種類與□移位總步數種類歸納

□移位總步數	13		15		17	
▲移位路徑(R)種類	**R2**	**R5**	R3	R4	R1	R6
是否符合□移位最少總步數(S_3)	**是**	**是**	否	否	否	否

結論 3：

(1)不管▲走哪種路徑總步數都是奇數。

(2)在這六種▲移位路徑中，□移位最少總步數(S_3)是 R2 和 R5 的走法，是符合遊戲規則的情形，S_3=13，其他四種▲移位路徑都不符合一開始遊戲規則。

(3)▲除了第 1 次移位到 b 或 c 時，□最少要移位 4 步才能完成，▲在 R2 和 R5 的其他 3 點位中每移 1 位時，□都是最少要移位 3 步才能完成。

(4)因此，可以算出最少步數等於 4+3(4-1)=13，其中 4 是▲移動第 1 次時□移位需要 4 步($M1_3$)，而(4-1)是▲共移動 4 次(T_3)才能到終點減掉第 1 次的移動，而 3 則是▲移到其他 3 點位時，▲每移位 1 位時，□都必須最少移位 3 步。

研究三：為什麼和阿爸玩移位出九宮棋時，阿爸總是贏

(一)從單堆拈的遊戲說起

1.遊戲說明：兩人輪流取走一堆石頭，每人每次最少取一顆，最多取 K 顆，最後取光石頭的人為贏。

2.可以將留下的情形分為安全和不安全殘局兩種，可以發現只要下完後留下 K+1 或 K+1 的整數倍[N(K+1)(N 為自然數]顆石頭則為安全殘局；而留下≦K 或 N(K+1)+i(N 為自然數；1≦i≦K)顆石頭時，則為不安全殘局。說明如下：

3.因為我下完後，我的對家可取 i 顆，而 i 一定要合於 1≦i≦K，而我下時總是可以控制對家和我兩次所取石頭合計共為 K+1 顆，分析如下表 3 情形：

表 3、單堆拈的安全殘局分析

當對家取走石頭顆數為	1	2	3	…	K
接著我取走石頭顆數為	K	K-1	-2	…	1
對家與我兩次(每輪)取走石頭顆數合計為	K+1	K+1	K+1	…	K+1

結論 4：

(1)因此，可以發現在我下完後，留下 K+1 顆石頭時是安全殘局，因為對家可取 i 顆，而 i 一定要合於 $1 \leqq i \leqq K$，而我下時總是可以取完所剩的石頭顆數，掌控為贏的局面。

(2)既然 K+1 是安全殘局，所以如法炮製 2 次亦然，因此 K+1 的 2 倍也是安全殘局，所以可以推論出 3 倍、4 倍…乃至 N 倍(N 為自然數)也都是安全殘局，即 N(K+1)皆為安全殘局。

4.破解為什麼阿爸總是贏棋

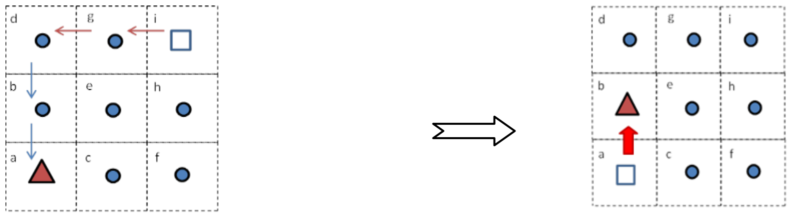
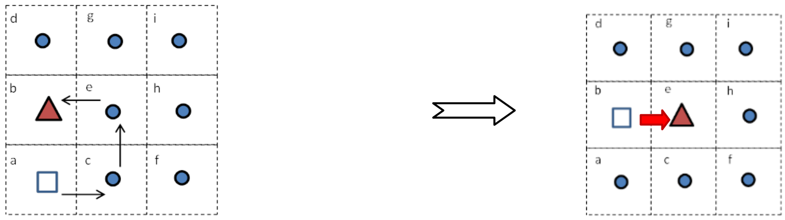
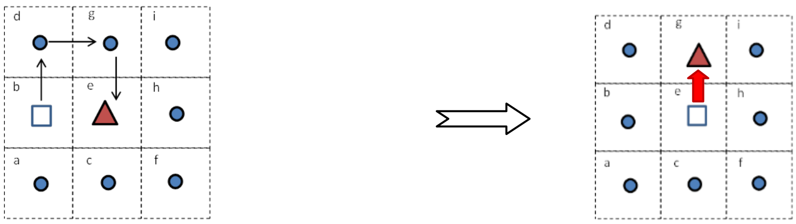
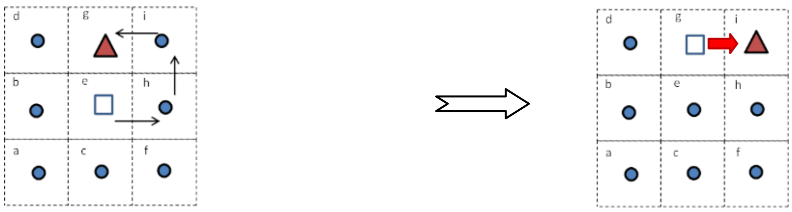
(1)因為在一開始移位出九宮的遊戲規則下，□移位最少總步數(S_3)是 13 步，老爸總是下完之後留下 1+2=3 的整數倍數，讓他自己一直處於安全殘局的狀態下，所以總是能贏。

(2)剛開始玩時，就算阿爸讓我先下，我也是苦嘗敗果，因為剛開始玩時我尚不明就裡，一味亂下，老爸總是在我下錯步數時，又讓他自己重新處於安全殘局的狀態。

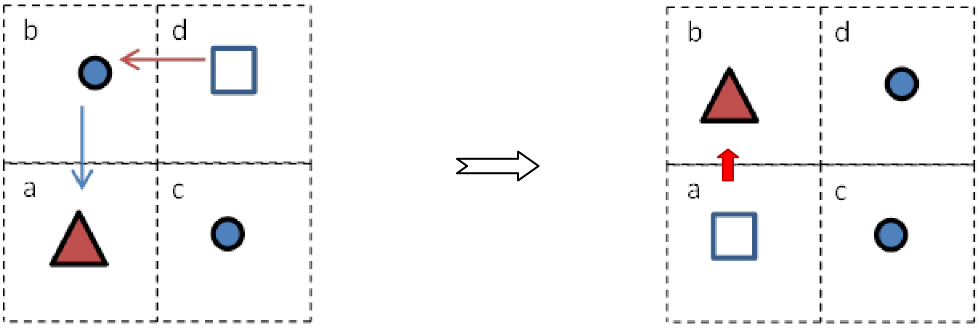
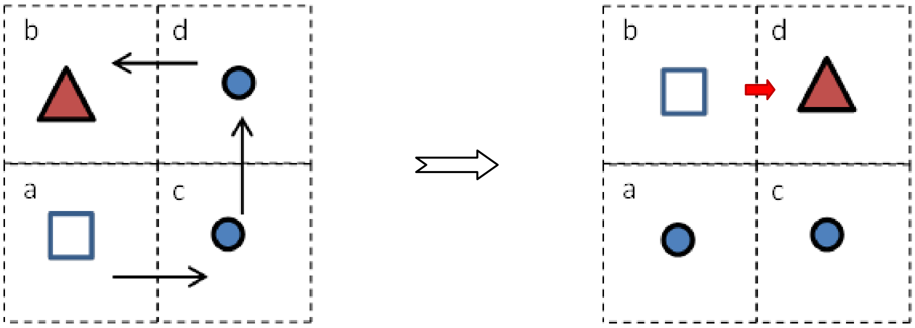
結論 5：在一開始移位出九宮的遊戲規則下，對先下者有利，只要先走 1 步，留下安全殘局為 12=4(1+2)步，就能掌握在下完 4 輪後一定是先下者能完成走最後 1 步，而獲得勝利。

研究四：正 n^2 宮格▲移位路徑(R)與□移位最少總步數(Sn)之規律性探討

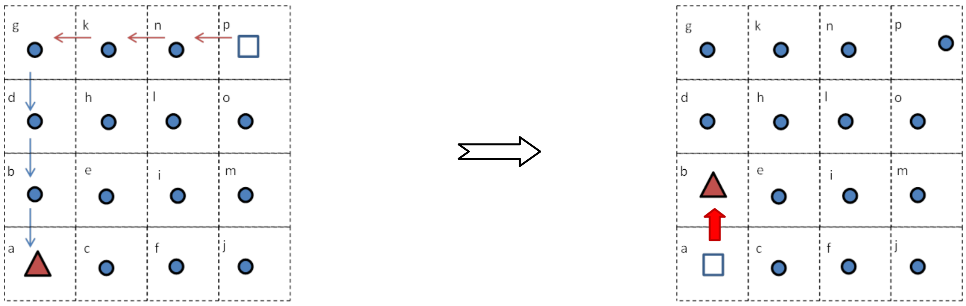
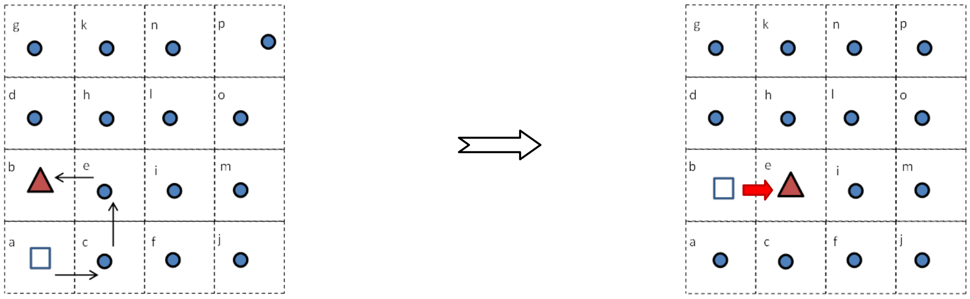
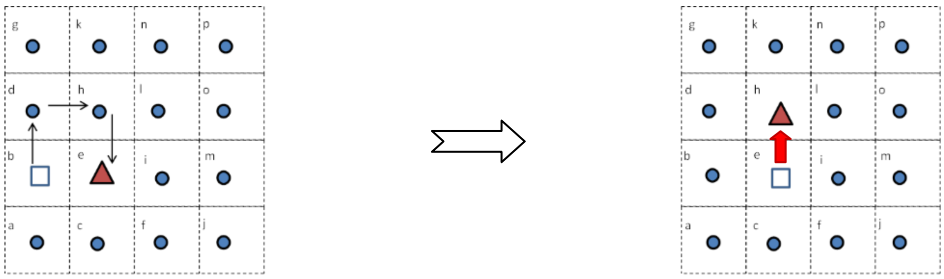
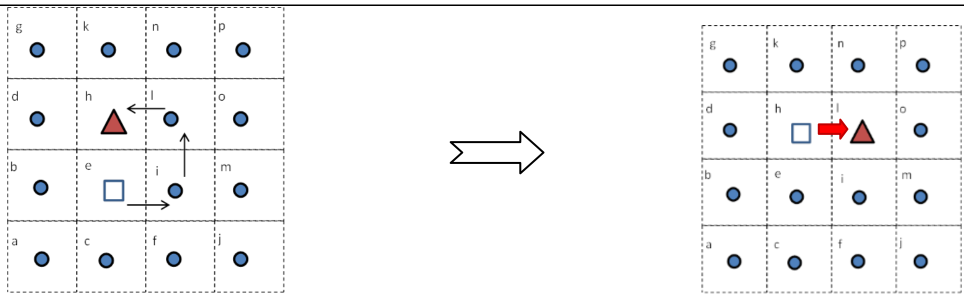
(一)以正九宮格是 3^2 方格，以其中一邊是 3 位為演算基礎推出□移位最少總步數：

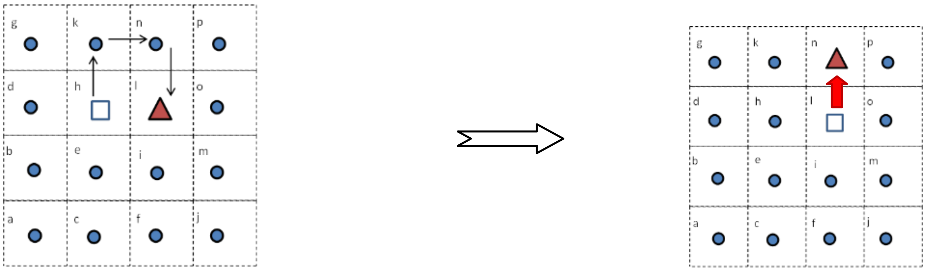
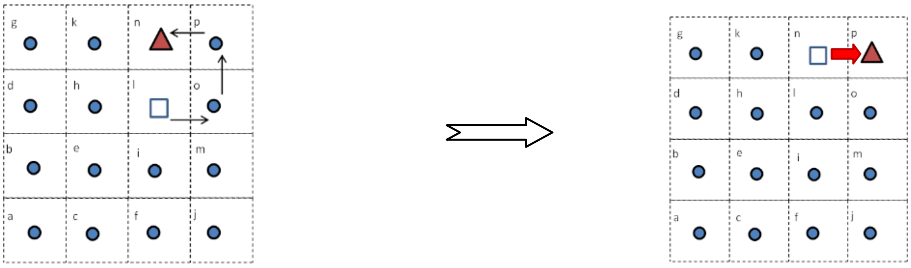
符合移位出九宮□移位最少總步數(S_3)之規律性 九宮格 3*3 圖示說明：→表□移位 1 步；➡表▲移位 1 格	□移位步數之算式
□移到 b 點有 i→g→d→b、i→g→e→b、i→h→e→b 3 種路徑，以下以 i→g→d→b 說明如下：  □從 i 移水平 2 步以← ←以(3-1)步表示，移垂直 2 步以↓ ↓以(3-1)步表示，共 4 步到 a 的位置，則▲第 1 次移位從 a 移到 b 點，□移位步數可以以 2(3-1)表示。	▲第 1 次移位(⬆)時□移動步數($M1_3$)為 2+2=4 =(3-1)+(3-1) =2(3-1)
 □從 a 移最少 3 步以→↑←表示，移到 b 點的▲位置，則▲移第 2 次移位從 b 移到 e 點。	▲第 2 次移位(➡)時□移動步數($M2_3$)為 1*3
 □從 b 移最少 3 步以↑→↓表示，移到 e 點的▲位置，則▲移第 3 次移位從 e 移到 g 點。	▲第 3 次移位(⬆)時□移動步數($M3_3$)為 1*3
 □從 e 移最少 3 步以→↑←表示，移到 g 點的▲位置，則▲移第 4 次移位從 g 移到 i 點。	▲第 4 次移位(➡)時□移動步數($M4_3$)為 1*3
▲第 1 次移位時□移動 2(3-1)步。▲第 2 到 4 次移位到→e、↑g、→i 三點位時，每次□要移 3 步，而→e、→i 兩點位是水平以(3-1)表示；↑g 一點位是垂直以(3-1)-1 表示，所以合計有(3-1)+(3-1)-1=2(3-1)-1 次，□移動步數為 3(3-1)+3[(3-1)-1]=3[2(3-1)-1]，所以□移動最少總步數(S_3)可以一邊是 3 格列式為合計為 S_3=2(3-1) +3[2(3-1)-1] =13	

(二)以正四宮格是 2^2 方格，以其中一邊是 2 位為演算基礎推出最少步數規律算式：

為求謹慎，所以也做了移位出四宮格的□移位最少總步數(S_2)規律性探討 四宮格 2*2 圖示說明：→表□移位 1 步；➡表▲移動 1 位	□移動步數之算式
 □從 d 移水平 1 步以← (2-1)步表示，移垂直 1 步以↓(2-1)步表示，共 2 步到 a 的位置，則▲移第 1 次從 a 移到 b 點，□移動步數可以以 2(2-1)表示。	▲第 1 次移位(⬆)時□移動步數($M1_2$)為 2=1+1 =(2-1)+ (2-1) =2(2-1)
 □從 a 移最少 3 步以→↑←表示，移到 b 的位置，則▲移第 2 次移位從 b 移到 d 點。	▲第 2 次移位(➡)時□移動步數($M1_2$)為 1*3= (2-1)*3 =3(2-1)
▲第 1 次移位時□移動 2(2-1)步。▲第 2 移位到→d 移位一點位時，□要移 3 步，而▲→d 點是水平 1 次，是以(2-1)表示；而垂直方向沒有半次是 0 以(2-1)-1 次表示，所以合計為(2-1)+ (2-1)-1=2(2-1)-1 次，□移動步數為 3(2-1)+3[(2-1)-1]=3[2(2-1)-1] =3[2(2-1)-1]。所以□移動最少總步數(S_2)可以以一邊是 2 格列式合計為 S_2=2(2-1)+3[2(2-1)-1]=5。	

(三)以正十六宮格是 4^2 方格，以其中一邊是 4 為演算基礎推出最少步數規律算式：

符合移位出十六宮□移位最少總步數(S_4)之規律性 十六宮格 4*4 圖示說明：→表□移位 1 步；➡表▲移動 1 位	□移動步數之算式
 □從 p 移水平 3 步以← ←←(4-1)步表示，移垂直 3 步以↓ ↓ ↓ (4-1)步表示，共 6 步到 a 的位置，則▲移第 1 次移位從 a 移到 b 點，可以以 2(4-1)表示。	▲第 1 次移位(⬆)時□移動步數($M1_4$)為 3+3=6 =(4-1)+ (4-1) =2(4-1)
 □從 a 移最少 3 步以→ ↑ ←表示，移到 b 的位置，則▲移第 2 次移位從 b 移到 e 點。	▲第 2 次移位(➡)時□移動步數($M2_4$)為 1*3
 □從 b 移最少 3 步以 ↑ → ↓ 表示，移到 e 的位置，則▲移第 3 次移位從 e 移到 h 點。	▲第 3 次移位(⬆)時□移動步數($M3_4$)為 1*3
 □從 e 移最少 3 步以→ ↑ ←表示，移到 h 的位置，則▲移第 4 次移位從 h 移到 1 點。	▲第 4 次移位(➡)時□移動步數($M4_4$)為 1*3

<table>
<tr>
<td>
□從 h 最少 3 步以↑→↓表示，移到 l 的位置，則▲移第 5 次移位從 l 移到 n 點。</td>
<td>▲第 5 次移位(↑)時□移動步數($M5_4$)為 1*3</td>
</tr>
<tr>
<td>
□從 l 最少 3 步以→↑←表示，移到 n 的位置，則▲移第 6 次移位從 n 移到 p 點。</td>
<td>▲第 6 次移位(→)時□移動步數($M6_4$)為 1*3</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">▲第 1 次移位時□移動 2(4-1)步。▲第 2 到 5 次移到→e、↑h、→l、↑n、→p 這五點位時，每次□要移 3 步，而→e、→l、→p 三點是水平以(4-1)表示；↑h、↑n 兩點是垂直以(4-1)-1 表示，所以合計為(4-1)+ (4-1)-1=2(4-1)-1 次，所以□移位最少總步數(S_4)可以一邊是 4 格列式為合計為 S_4=2(4-1) +3[2(4-1)-1] =21</td>
</tr>
</table>

(四)利用上述規律性推導出正 n^2 宮格，以一邊 n 格為演算出□移動最少總步數(S_N)，

如下表 4：

表 4、 統整推導出正 n^2 宮格的▲移到終點時，□的移位最少總步數(Sn)

n	▲第一次移位，□的移動步數：(M1n)	▲除了第一次移位外，移到其他點位的次數：(Tn-1) 註：Tn 為▲總移位次數	▲除了第一次移位外，其他點為每次移位時，□的最少移位步數為 3	▲除了第一次移位外，其他點為每次移位時，□的移位最少步數：3(Tn-1)	推導出 n^2 宮格的▲移到終點時，□的移動最少總步數：Sn = M1n+3(Tn-1)
2	$M1_2$= 2(2−1)=2	T_2-1=2(2−1)−1 =1	3	3(T_2-1)=3[2(2-1)-1]	S2 =2(2-1) +3[2(2-1)-1] =5
3	$M1_3$=2(3-1)=4	T_3-1=2(3−1)−1 =3	3	3(T_3-1)=3[2(3-1)-1]	S3 =2(3-1) +3[2(3-1)-1] =13
4	$M1_4$=2(4− 1)=6	T_4-1=2(4−1)−1 =5	3	3(T_4-1)=3[2(4-1)-1]	S4=2(4-1) +3[2(4-1)-1] =21
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	M1n =2(n-1)	Tn-1 =2(n−1)−1	3	3(Tn-1) =3[2(n-1)-1]	Sn =2(n-1) +3[2(n-1)-1]

結論 6：照一開始的遊戲說明下，兩人輪流下，每人每次可移 1 步或 2 步，可以發現正 n^2 宮格中□移位最少總步數為 Sn =2(n-1) +3[2(n-1)-1]。

(五)在一開始的遊戲規則下，每人每次可移 1 步或 2 步，根據上述 Sn =2(n-1) +3[2(n-1)-1]，其中 3(Tn-1) =3[2(n-1)-1]為 3 的整數倍是安全殘局，所以只要討論 **M1n =2(n-1)的情形是否為安全殘局**，即可立刻知曉輸贏，說明如下表 5：

表 5、正 n^2 宮格中關鍵的▲第一次移位(M1n)時，□的移位步數決定結局輸贏分析

n	□移位總步數：Sn = M1n+3(Tn-1) =2(n-1) +3[2(n-1)-1]	□總步數(Sn)中的 3(Tn-1) =3[2(n-1)-1]為 3 的整數倍為安全殘局	**(M1n)/3=2(n-1)/3 之餘數影響最終結局輸贏**	先下者移位第 1 次步數	先下者移位第 1 次步數之輸贏關係
2	2(2-1) +3[2(2-1)-1] =5	3[2(2-1)-1] =3	2(2−1)/3=0⋯2	2	贏
3	2(3-1) +3[2(3-1)-1] =13	3[2(3-1)-1] =3(3)	2(3-1)/3=4/3=1⋯1	1	贏
4	2(4-1) +3[2(4-1)-1] =21	3[2(4-1)-1] =3(5)	2(4−1)/3=6/3=2⋯0	1 或 2	輸
5	2(5-1) +3[2(5-1)-1] =29	3[2(5-1)-1] =3(7)	2(5−1)/3=8/3=2⋯2	2	贏
6	2(6-1) +3[2(6-1)-1] =37	3[2(6-1)-1] =3(9)	2(6−1)/3=10/3=3⋯1	1	贏
7	2(7-1) +3[2(7-1)-1] =37	3[2(7-1)-1] =3(11)	2(7−1)/3=12/3=4⋯0	1 或 2	輸
8	2(8-1) +3[2(8-1)-1] =45	3[2(8-1)-1] =3(13)	2(8−1)/3=14/3=4⋯2	2	贏
9	2(9-1) +3[2(9-1)-1] =53	3[2(9-1)-1] =3(15)	2(9−1)/3=16/3=5⋯1	1	贏
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	2(n-1) +3[2(n-1)-1]	3[2(n-1)-1]	2(n-1)/3	餘數而定	餘數而定

結論 7：

(1) n 為 2、3；5、6；8、9；⋯；N(3)-1、N(3)即為 3-1、3；2(3)-1、2(3)；3(3)-1、3(3)；⋯；N(3)-1、N(3)時先下者為贏(N 為自然數)；也就說 n 為 3 的整數倍或 3 的整數倍減 1 時，第 1 次移位步數移對，造成安全殘局就為贏。

(2) n 為 4、7、10、⋯、N (3)+1 即為 3+1、2(3)+1、3(3)+1⋯N(3)+1 則先下者為輸，也就說 n 為 3 的整數倍加 1 時，第 1 次移位步數不管移 1 或 2 步，會留下不安全殘局 N(3)+1 或 N(3)+2，只要後下者移完留下安全殘局，不移錯步數，則先下者必輸。

研究五：在移位出九宮的遊戲中，兩人輪流下，每人每次可移動 1 步或 2 步棋情況下，**如何修改規則讓遊戲的情況產生不確定而變得有趣？**

(一)根據▲走路徑 1(R1)，□移位在第 7 步時不符合遊戲規則，▲碰到□一定要移入□，但卻沒有，□移位總步數共 17 步。

(二)根據▲走路徑 2(R2)，□移位符合遊戲規則，□移位總步數共 13 步。

(三)▲走路徑 3(R3)，在第 10 步時不符合遊戲規則，▲碰到□一定要移入□，但卻沒有的移動步數情形，□移位總步數共 15 步。

(四)可見要出現 R1 和 R3，要修改▲**得碰到□第一次時可以選擇要或不要移入，但第二次碰到□時則一定要移入**，其他規定則不變下，就會出現 17、13 和 15 的不同步數。

(五)這樣的修改能增加遊戲的不確定性、趣味性與挑戰性。說明如下：

1.綜合歸納▲移位路徑與□移位總步數如下圖 5：

▲路徑 \ □步數		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
R1	i	→g	→d	→b	→a	→c	→e	→g	→d	→b	→e	→g	→d	→b	→e	→h	→i	→g
R2								b	→d	→g	→e	→h	→i	→g				
R3											i	→h	→e	→g	→i	→h		
R4											i	→g	→e	→h	→i	→g		
R5								c	→f	→h	→e	→g	→i	→h				
R6	i	→h	→f	→c	→a	→b	→e	→h	→f	→c	→e	→h	→f	→c	→e	→g	→i	→h

圖 5

結論 8：

(1) 因為 R1、R2、R3 中，□移位的前 6 步是沒影響的，所以只畫 1 條□移位途徑表示，避免畫面複雜；- - - 為對稱線，所以 R4、R5、R6 亦然。

(2) 圖 5 中黃色位置為□移位的第 7 步的關鍵步數位置，若□第 7 步移位至 g 則決定了▲只能走 R1；若□第 7 步移位至 b 則決定了▲能走 R2 或 R3。

(3) 若□第 7 步移位至 b 後，圖 5 中藍色位置為□移位的第 10 步的關鍵步數位置，若□第 10 步移位至 e 則決定了▲只能 R2；若□第 10 步移位至 i 則決定了▲只能 R3。

(4) 當先下者□先走 1 步，到關鍵的第 7 步剩 6 步為 2(1+2)為安全殘局，可以控制先下者在第 7 步有選擇權，即□在 e 的位置是第 6 步，下第 7 步的人可以決定□要往 g 走或往 b 走，若□往 g 走為確定為 R1，則□所剩下步數為 10=3(3)+1 步為不安全殘局，先下者為輸；反過來說若規則改為走到終點者為輸，則先下者可選擇 R1 會贏，因為□所剩下步數為 10=3(3)+1 步為安全殘局，同理▲走對稱 R6 亦為相同情形。

(5) 承上，當先下者在第 7 步□若選擇從 e 往 b 走時，則▲選擇了走 R2 或 R3，先下者在關鍵的第 10 步為剩 10-7=3 步為安全殘局，可以控制先下者在第 10 步有選擇權，即□在第 10 步時從 g 可往 e 走，往 e 走則▲選擇了 R2 剩 3 步為安全殘局到終點，先下者為勝；反之，若走到終點者為輸。同理▲走對稱 R5 亦為相同情形。

(6) 承上，若先下者在第 10 步□從 g 往 i 走時，則▲選擇了走 R3，因為剩 5=3+2 步到終點為不安全殘局，先下者為輸。若改為走到終點者為輸，則可選擇 R3，先下者為勝。同理▲走對稱 R4 亦為相同情形。

研究六：在一開始移位出九宮的遊戲規則中，兩人輪流下，但每人每次改為可移動 1、2 或 3 步棋情況下，輸贏會變得如何？

(一)照一開始的遊戲說明下，可以發現正 n^2 宮格中□最少移動總步數為 Sn =2(n-1) +3[2(n-1)-1]

(二)將 Sn 依分配律演算：

Sn=2n-2 +3(2n-3)

=2n-2 +6n-9

=(2+6)n-(2 +9)

=8n-11。

(三)每人每次改為可移動 1、2 或 3 步棋情況下，安全殘局是 1+3=4 或 4 的整數倍，所以將 **Sn 除以 4 得之餘數為先下者第 1 次移位的勝負關鍵**

1. Sn/4=(8n-11)/4

=(8n-16+16-11)/4

=[(8n-16)+(16-11)] /4

=[8(n-2)+(5)] /4

= 8(n-2)/4+(5/4) =2(n-2)+1…1

結論 9：

(1) 當不管正 n^2 宮格中 n 是 2 或 3 或 4…或 n，Sn 除以 4 最後餘數都會是 1。

(2) 所以先下者第 1 次移位要移 1 位，便可留下 2(n-2)+1 個安全殘局(1+3=4)，而立於不敗之地。

研究七：承研究六，但每人每次改為可移動 1、2、3 或 4 步棋情況下，輸贏會變得如何？

(一) 每人每次改為可移動 1、2、3 或 4 步棋，Sn 除以 5 得餘數為何？如下表 6

表 6、每人每次改為可移動 1、2、3 或 4 步棋，Sn/5= (8n-11)/5 的餘數分析

n	□移動總步數：Sn = 8n-11	Sn /5	先下者移動第 1 次步數	先下者移動第 1 次步數之輸贏關係
2	S_2 = 8*2-11=16-11=5	5/5=1…0	1、2、3 或 4	輸
3	S_3 = 8*3-11=24-11=13	13/5=2…3	3	贏
4	S_4 = 8*4-11=32-11 =21	21/5=4…1	1	贏
5	S_5 = 8*5-11=40-11 =29	29/5=5…4	4	贏
6	S_6 = 8*6-11=48-11 =37	37/5=7…2	2	贏
7	S_7 = 8*7-11=56-11 =45	45/5=9…0	1、2、3 或 4	輸
8	S_8 = 8*8-11=64-11=53	53/5=10…3	3	贏
9	S_9 = 8*9-11=72-11=61	61/5=12…1	1	贏
10	S_{10} = 8*10-11=80-11 =69	69/5=13…4	4	贏
11	S_{11} = 8*11-11=88-11 =77	77/5=15…2	2	贏
12	S_{12} = 8*12-11=96-11 =85	85/5=17…0	1、2、3 或 4	輸
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	Sn = 8n-11	(8n-11)/5	餘數而定	餘數而定

(二) 每人每次改為可移動 1、2、3 或 4 步棋情況下，安全殘局是 1+4=5 或 5 的整數倍，所以將 Sn 除以 5 得餘數為第 1 次移位的勝負關鍵

結論 10：

1. 從 Sn/5=(8n-11)/5=(5n+3n-11)/5=5n/5+(3n-11)/5=n+(3n-11)/5 從 Sn/5=(8n-11)/5 中找不明顯規律。

2.從表 6 中發現要是餘數而定，餘數為 1、2、3 或 4 為贏，餘數為 0 時整除不管怎麼下第一次移位步數都是輸。

2.但從表 6 分析中可以找規律性，發現 n 為 2、7、12 時 Sn/5 剛好整除餘數為零，所以不管先下者如何下第 1 次移位，皆會留下不安全殘局，所以必輸。即 n 為 2 或 2+5N(N 為自然數)時會輸。

3. 從表 6 可發現 n 為 3、4、5、6 與 8、9、10、11 時，Sn/5 剛好餘數依序皆為 3、1、4、2，所以先下者只要下第 1 次移位移對步數，可留下安全殘局，所以必贏。

4.從 Sn /5 的餘數可發現先下者為勝還是有跡可循

(1)餘數為 3 時，第 1 次移位要移 3 步數，可留下安全殘局，此時 n 為 3 或 3+5N(N 為自然數)。

(2)餘數為 1 時，第 1 次移位要移 1 步數，可留下安全殘局，此時 n 為 4 或 4+5N。

(3)餘數為 4 時，第 1 次移位要移 4 步數，可留下安全殘局，此時 n 為 5 或 5+5N。

(4)餘數為 2 時，第 1 次移位要移 2 步數，可留下安全殘局，此時 n 為 6 或 6+5N。

(5)此時要記住可能就沒那麼容易了，還需要對照表 6 才行，不然就要發些時間計算了。

研究八：承研究七，但每人每次改為可移動 1、2、…K(1≦K≦7)步棋情況下，輸贏會變得如何？

(一) 先要找出安全殘局 1+K 為多少，利用 Sn 除以(1+K)之餘數來判斷先下者第 1 次移位步數來決定輸贏，如下表 7

表 7、Sn/(1+K)= (8n-11)/ (1+K)的餘數即可分析

每人每次可移步數		1		1、2		1、2、3		1、2…4		1、2…5		1、2…6		1、2…7	
移到終點為贏之安全殘局		1+1=2		1+2=3		1+3=4		1+4=5		1+5=6		1+6=7		1+7=8	
n	Sn=8n-11	Sn/2	餘數	Sn/3	餘數	Sn/4	餘數	Sn/5	餘數	Sn/6	餘數	Sn/7	餘數	Sn/8	餘數
2	5	2…1	1	1…2	2	1…1	1	1…0	0						
3	13	6…1	1	4…1	1	3…1	1	2…3	3	2…1	1	1…6	6	1…5	5
4	21	10…1	1	7…0	0	5…1	1	4…1	1	3…3	3	3	0	2…5	5
5	29	14…1	1	9…2	2	7…1	1	5…4	4	4…5	5	4…1	1	3…5	5
6	37	18…1	1	12…1	1	9…1	1	7…2	2	6…1	1	5…2	2	4…5	5
7	45	22…1	1	15…0	0	11…1	1	9…0	0	7…3	3	6…3	3	5…5	5
8	53	26…1	1	17…2	2	13…1	1	10…3	3	8…5	5	7…4	4	6…5	5
9	61	30…1	1	20…1	1	15…1	1	12…1	1	10…1	1	8…5	5	7…5	5
10	69	24…1	1	23…0	0	17…1	1	13…4	4	11…3	3	9…6	6	8…5	5
11	77	38…1	1	25…2	2	19…1	1	15…2	2	12…5	5	11	0	9…5	5
12	85	42…1	1	28…1	1	21…1	1	17…0	0	14…1	1	12…1	1	10…5	5
13	93	46…1	1	31…0	0	23…1	1	18…3	3	15…3	3	13…2	2	11…5	5
14	101	50…1	1	22…2	2	25…1	1	20…1	1	16…3	5	14…3	3	12…5	5
15	109	54…1	1	36…1	1	27…1	1	21…4	4	18…1	1	15…4	4	13…5	5
16	117	58…1	1	39…0	0	29…1	1	23…2	2	19…3	3	16…5	5	14…5	5
17	125	62…1	1	41…2	2	31…1	1	25…0	0	20…5	5	17…6	6	15…5	5
18	133	66…1	1	44…1	1	33…1	1	26…3	3	22…1	1	19	0	16…5	5
19	141	70…1	1	47…0	0	35…1	1	28…1	1	23…3	3	20…1	1	17…5	5
20	149	74…1	1	49…2	2	37…1	1	29…4	4	24…5	5	21…2	2	18…5	5
21	157	78…1	1	52…1	1	39…1	1	31…2	2	26…1	1	22…3	3	19…5	5
22	165	82…1	1	55…0	0	41…1	1	33…0	0	27…3	3	23…4	4	20…5	5
23	173	86…1	1	57…2	2	43…1	1	34…3	3	28…5	5	24…5	5	21…5	5
24	181	90…1	1	60…1	1	45…1	1	36…1	1	30…1	1	25…6	6	22…5	5
25	189	94…1	1	63…0	0	47…1	1	27…4	4	31…3	3	27	0	23…5	5
26	197	98…1	1	65…2	2	49…1	1	39…2	2	32…5	5	28…1	1	24…5	5
27	205	102…1	1	68…1	1	51…1	1	41…0	0	34…1	1	29…2	2	25…5	5
28	213	106…1	1	71…0	0	53…1	1	42…3	3	35…3	3	30…3	3	26…5	5
29	221	110…1	1	73…2	2	55…1	1	44…1	1	36…5	5	31…4	4	27…5	5
30	229	114…1	1	76…1	1	57…1	1	45…4	4	38…1	1	32…5	5	28…5	5

註：紅字 S2/5=1…0 不符合遊戲規則，總移位步數要大於每次可移位最大步數(K)。

結論 11：

1. 每人每次改為只可移動 1 步時，先下者第 1 次移位步數要移位 1 步數為致勝步數。
2. 每人每次改為可移動 1、2 或 3 步時，先下者第 1 次移位步數要移位 1 步數為致勝步數。

3. 每人每次改為可移動 1、2…或 7 步時，先下者第 1 次移位步數要移位 5 步數為致勝步數。

4. 從表 7 中除了上述先下者有一定第 1 次移位步數有致勝步數外，其他每人每次可移動 1、2…或 K 步時，K 為 2、4、5 或 6，則要對照表 7 來決定正 n2 宮格 Sn/(1+K)之餘數來作為判斷依據。

伍、討論與結論

一、破解為什麼阿爸總是贏，因為在玩移位出九宮的一開始遊戲規則下，每人每次可以移 1 或 2 步棋，□移動最少總步數(S_3)是 13 步，老爸總是移完之後留下 1+2=3 的倍數步數，讓他自己一直處於安全殘局的狀態下，所以一直處於勝方。所以在一開始的移位出九宮的遊戲規則下，對先下者有利，只要先下者第 1 次移位步數為 1 步，留下 12=4(1+2)步，就能掌握在下完 4 輪後，一定是先下者可以走完最後 1 步，而立於不敗之地。

二、在一開始遊戲規則下，從表 5、可以發現正 n^2 宮格移位最少總步數(S_3)為 2(n-1)+3[2(n-1)-1]，其中 3[2(n-1)-1]是 3 的整數倍為安全殘局，所以只要討論 2(n-1)/3 的餘數情形就行了，可以歸納發現 n 為 3-1、3；2(3)-1、2(3)；3(3)-1、3(3)；…；N(3)-1、N(3)時，先下者第 1 次移位步數等於 2(n-1)/3 的餘數時為贏(N 為自然數)，餘數依序為 2、1；2、1；2、1；…；2、1。當 n 為 3+1、2(3)+1、3(3)+1…N(3)+1 時，先下者不管第 1 次移位步數為 1 或 2 步皆留下不安全殘局為輸。若改變規則為最後移位到終點者為輸，則豬羊變色，反而當 n 為 3+1、2(3)+1、3(3)+1…N(3)+1 時先下者第 1 次移位步數為 2 步會留下安全殘局(3 的整數倍加 1)為贏。

三、若改變一開始遊戲規則如研究五，使▲得碰到□第一次時可以選擇要或不要移入，但第二次碰到□時則一定要移入，其他規定則不變下，當先下者□先走 1 步，到關鍵的第 7 步剩 6 步為 3 的 2 倍為安全殘局，先下者可以掌控在第 7 步有路徑選擇權，即□在 e 的位置是第 6 步，移第 7 步的人可以決定□要往 g 走或往 b 走，若□往 g 走為確定為 R1，則□所剩下步數為 10=3(3)+1 步為不安全殘局，先下者為輸；反過來說若規則改為走到終點者為輸，則先下者可選擇 R1 會贏，因為□所剩下步數為 10=3(3)+1 步反而為安全殘局，同理稱路徑 R6 亦為相同情形。

四、承上，當先下者在第 7 步□若選擇從 e 往 b 走時，則▲選擇了走 R2 或 R 徑 3，先下者在關鍵的第 10 步為剩 10-7=3 步為安全殘局，可以控制先下者在第 10 步有選擇權，即□在第 10 步時從 g 可往 e 走，往 e 走則▲選擇了 R2 剩 3 步為安全殘局到終點，先下者為勝；反之，若走到終點者為輸。同理▲走對稱 R5 亦為相同情形。

五、承上，若先下者在第 10 步□從 g 往 i 走時，則▲選擇了走 R3，因為剩 5=3+2 步到終點為不安全殘局，先下者為輸。若改為走到終點者為輸，則可選擇 R3，先下者為勝。同理▲走對稱 R4 亦為相同情形。

六、從研究五中發現能掌控關鍵轉折點和並計算所剩步數為安全殘局的人，有掌控致勝的優勢，所以在上述條件成立下，對先下者還是有利的。

七、在正 n^2 宮格中以一開始遊戲規則下，從表 7、利用 Sn 除以(1+K)之餘數來判斷先下者第 1 次移位步數來決定輸贏，可以發現每人每次改為只可移動 1 步時或每人每次可移動 1、2 或 3 步時，不管正 n^2 宮格為多少，只要先下者第 1 次移位為 1 步數為致勝步數；若改為每人每次可移動 1、2…或 7 步時，先下者第 1 次移位步數要為 5 步數為致勝步數；除了上述 K 為 1、3 或 7 時先下者有一定第 1 次移位步數有對映致勝步數 1、1、5 外，其他每人每次可移動 1、2…或 K 步，K 為 2、4、5 或 6 時，則要對照表 7 來決定正 n^2 宮格 Sn/(1+K)之餘數來作為判斷依據。

陸、未來展望

一、可探究當規則修改成▲可以斜走時，其他不變的情形下，兩人輪流下，每人每次可下 1、2…或 K 步之移位出九宮之安全殘局分析。

二、可探究若三人輪流下，每人每次可下 1 步或 2 步之易位九宮之安全殘局分析。

柒、參考資料及其他

一、中文部份

1.康軒文教事業（2018）。國小數學課本第 11 冊第 3 數量關係。新北市，康軒。
2.康軒文教事業（2019）。國小數學課本第 12 冊第 5 單元怎樣解題。新北市，康軒。
3.中華民國第 58 屆中小學科學展覽會國小組數學科--堆集遊戲解法之探討
4.中華民國第 55 屆中小學科學展覽會國小組數學科--青蛙棋棋盤和棋譜研究
5.中華民國第 53 屆中小學科學展覽會國小組數學科--一步一腳印探討方格棋盤中各

種路徑問題
6.奧斯朋出版編輯群（2008）。圖解數學辭典（10-11、75-79、96-99、112-115 頁）。台北市：小天下。