嘉義市第 38 屆國民中小學科展

國中組　　數學科

科展名稱：凱“旋”歸來

關鍵詞：旋轉，軌跡

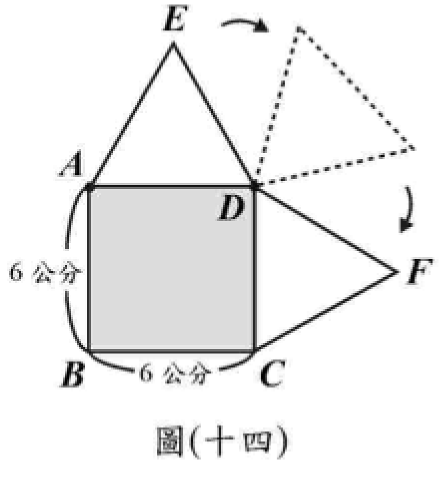
壹、摘要

我們研究三角形數其中一個小三角形，小正三角在大正三角形內部繞轉，首先，我們從研究關於邊長為 1：2 的圖形開始，因為剛開始沒有頭緒，於是我們土法煉鋼搬出圓規及其他畫圖工具，剪出實際圖形，慢慢轉，慢慢歸納，發現軌跡其實就是弧，半徑相同，只是圓心不同，接著再以圓規畫出實際圖像，我們開始有些概念，接著 1：3 的圖形、1：4 的圖形，愈轉愈順手，在 n 較大的時候，已經開始不需要實際繞轉了，我們已經可以直接畫出圖形，在 n=20 以內的圖，我們都把它畫出來，最後也利用 GGB 畫出圖形旋轉軌跡，發現 n 在特定的數時，圖形會有規律，有些呈現對稱、而且對稱軸的位置有規律，頂點 P 的移動路徑總長也有了公式、小正三角形透過頂點 P 的移動所覆蓋的面積等問題，並將結果歸納分類。

貳、研究動機

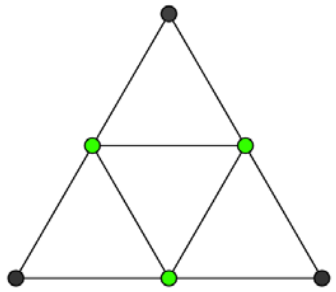
在老師給我們練習的題目中，有一道題目出現在「91 年基本學力測驗(一)」的試題中，題目為：

如下圖(十四)，有一個邊長為 6 公分的正方形 ABCD，在此正方形的兩邊上放置兩個邊長為 6 公分的正三角形(△ADE、△FDC)，試問當△ADE 以 D 為圓心順時鐘旋轉至與△FDC 完全重合時，E 點的路徑長為多少？

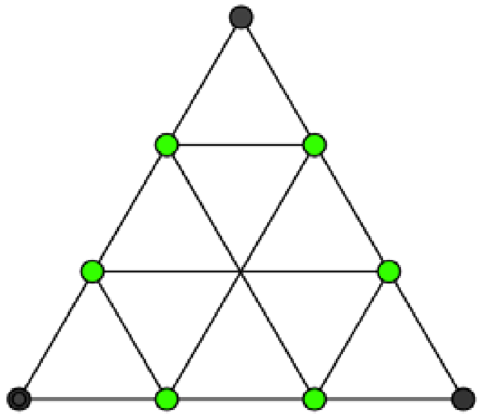


圖(十四)

在同學解出答案後，我們發現數學上的旋轉是由抽象道具體，充滿想像力的，非常有趣，也參考了歷屆科展相關作品，想嘗試以三角形數為我們的研究素材，



1：2　(每邊取出一個等分點)



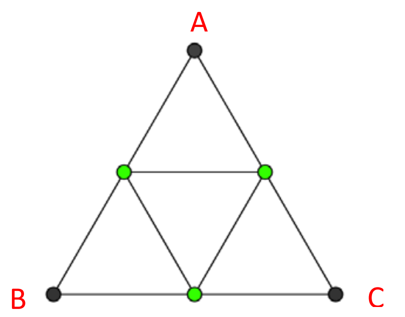
1：3　(每邊取出二個等分點)

參、研究目的

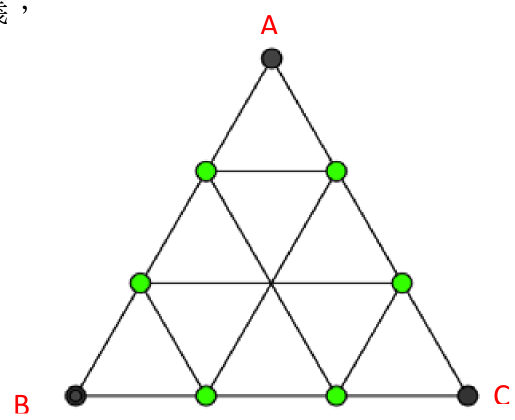
研究三角形數中，小正三角在大正三角形內部繞轉，回歸到最初位置時，定點 P 旋轉軌跡的規律及公式。

肆、研究過程或方法

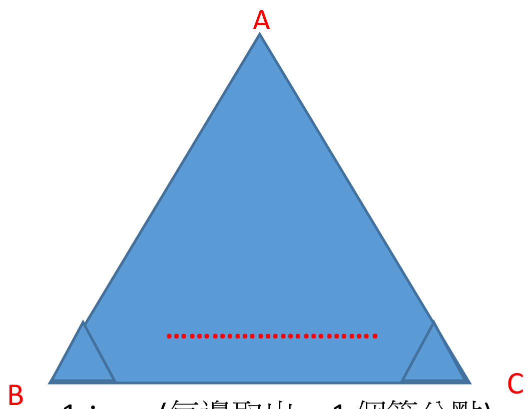
首先，我們先將圖形做出定義，



1：2　(每邊取出一個等分點)



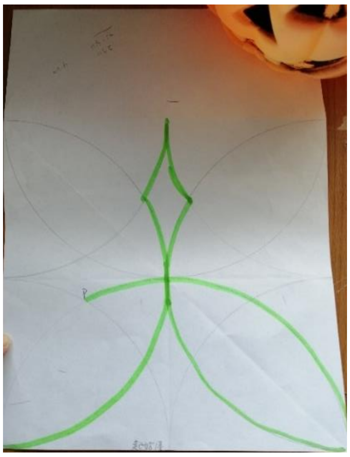
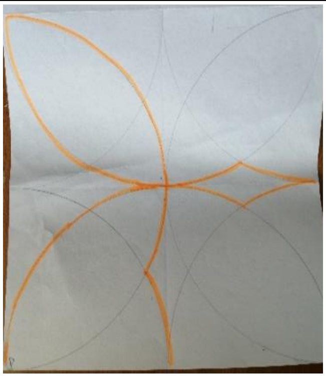
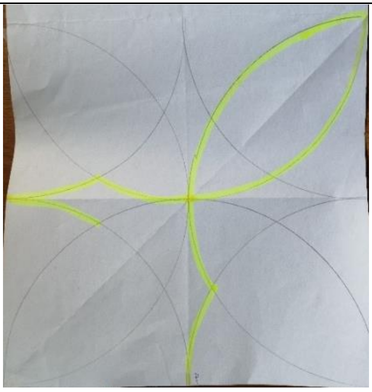
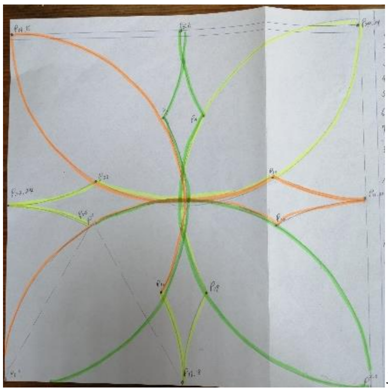
1：3　(每邊取出二個等分點)



1：n　(每邊取出 n-1 個等分點)

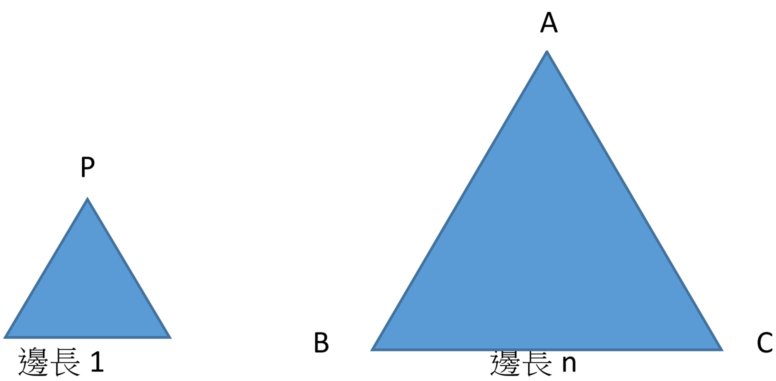
為了找到規律，我們從 1：2 開始，實際剪出三角形，及正方形，透過實際

旋轉，觀察 P 點旋轉軌跡，發現過程還挺有趣的，如附圖

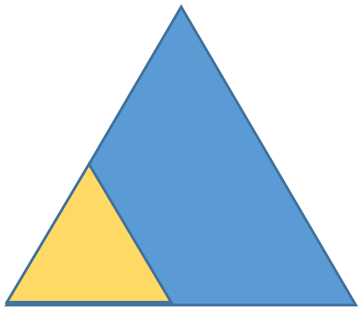
		
共轉三圈才繞回到原始圖形		

發現在 1：2 的圖形中，P 點要繞轉回原圖形，需要繞大正三角形轉 3 圈，才能回到原來的位置，上圖中的前三張，分別呈現第一圈到第三圈的軌跡，每次的軌跡不同，我們用不同顏色呈現，最後一張合併呈現。

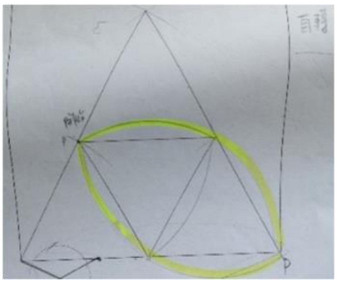
發現透過實際操作，可以使圖像從具體變成抽象，我們開始對於研究主題有了信心，也有了方向，所以我們將研究聚焦於小正三角在大正三角形內部繞轉，將旋轉軌跡畫出，初步發現小三角形與大三角形邊長 1：n 時，當 n 為特定數的時候，有些圖形是有對稱的，有些時沒有對稱的，以下是我們的討論



實際繞轉



舉例說明：



1：2　的圖形，黃色線現為 P 點軌跡

　　我們先將找到的規律整理成以下的表格，推導的過程再一一探討。

1：n	小三角形回到原圖形需要繞轉大圖形的圈數	小三角形回到原來位置時的自轉圈數	P 點軌跡路徑長	小三角形回到原來位置時的自轉角度	P 點軌跡有無對稱	對稱軸通過的頂點

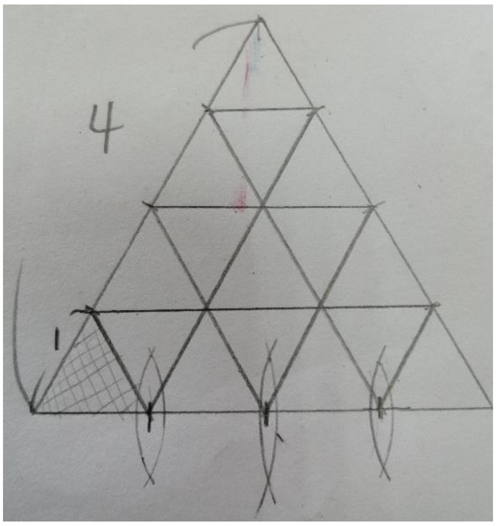
1：2	1	1	$2\pi \times \frac{2}{3}$	$120° \times 3 = 360°$ 共轉 3 次	有	C
1：3	1	2	$2\pi \times 1$	$120° \times 6 = 720°$ 共轉 6 次	有	三邊長 1:2 的位置
1：4	1	3	$2\pi \times 2$	$120° \times 9 = 1080°$ 共轉 9 次	有	A
1：5	1	4	$2\pi \times 2\frac{2}{3}$	$120° \times 12 = 1440°$ 共轉 12 次	有	C
1：6	1	5	$2\pi \times 3$	$120° \times 15 = 1800°$ 共轉 15 次	無	×
1：7	1	6	$2\pi \times 4$	$120° \times 18 = 2160°$ 共轉 18 次	有	A
1：8	1	7	$2\pi \times 4\frac{2}{3}$	$120° \times 21 = 2520°$ 共轉 21 次	有	C
1：9	1	8	$2\pi \times 5$	$120° \times 24 = 2880°$ 共轉 24 次	無	×
1：10	1	9	$2\pi \times 6$	$120° \times 27 = 3240°$ 共轉 27 次	有	A
1：11	1	10	$2\pi \times 6\frac{2}{3}$	$120° \times 30 = 3600°$ 共轉 30 次	有	C
1：12	1	11	$2\pi \times 7$	$120° \times 33 = 3960°$ 共轉 33 次	無	×
1：13	1	12	$2\pi \times 8$	$120° \times 36 = 4320°$ 共轉 36 次	有	A
1：14	1	13	$2\pi \times 8\frac{2}{3}$	$120° \times 39 = 4680°$ 共轉 39 次	有	C
1：15	1	14	$2\pi \times 9$	共轉 42 次		×
1：16	1	15	$2\pi \times 10$	共轉 45 次	有	A
1：17	1	16	$2\pi \times 10\frac{2}{3}$	共轉 48 次	有	C
1: 18			$2\pi \times 11$	共轉 51 次	無	×
1：n	1	n-1	方法一	$120° \times [(n-1) \times 3]$		

			$[n-\left[\frac{n}{3}\right]-\frac{4}{3}]\times 2\pi$ 或$(n-\left[\frac{n}{3}\right]-1)\times 2\pi$ 或$(\frac{2n-3}{3})\times 2\pi$ 方法二 $\frac{2n-2}{3}\times 2\pi$ 或 $2\pi\times〔1+(\frac{n}{3}-1)\times 2〕$				

(一) 當 1:n 時，三角形內轉圈數為何是 n-1？

方法一

Ex1:設小三角形邊長為 1，n=4



1:4 內轉圈數為$\frac{(4-1)\times 3}{3}=3$

其中

(4-1)　: 邊上三角形之間隔總數

分子 3　:大三角形之邊數

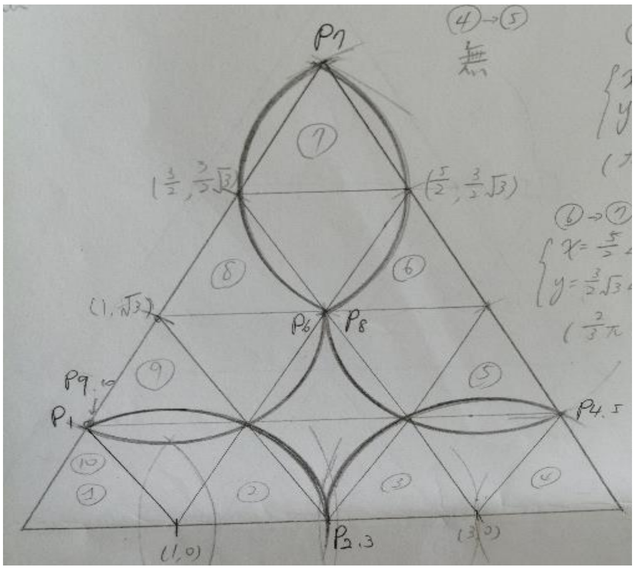
分母 3　:每轉三次回到原來圖形

因此 1:5 內轉圈數為$\frac{(5-1)\times 3}{3}=4$

1:6 內轉圈數為$\frac{(6-1)\times 3}{3}=5$..................推廣 1:n 內轉圈數為$\frac{(n-1)\times 3}{3}$=n-1

方法二

Ex2:



$\overline{BC}$上

圖形①→②　小三角形內轉 120°

圖形②→③　小三角形內轉 120°

圖形③→④　小三角形內轉 120°

$\overline{AC}$上

圖形④→⑤　小三角形內轉 120°

圖形⑤→⑥　小三角形內轉 120°

圖形⑥→⑦　小三角形內轉 120°

$\overline{AB}$上

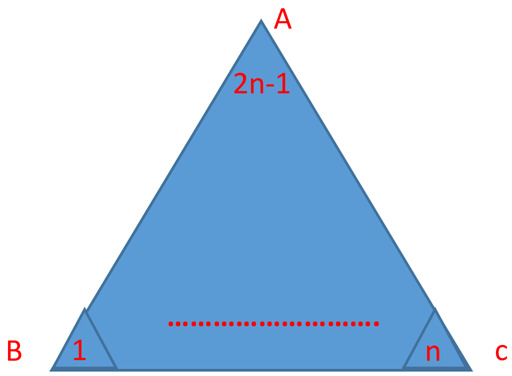
圖形⑦→⑧　小三角形內轉 120°

圖形⑧→⑨　小三角形內轉 120°

圖形⑨→⑩　小三角形內轉 120°

所以 P 點要回到原圖形，小三角形總共內轉$120° \times 9 = 1080° = 3$ 圈

我們類推 1:n 的圖形，如下圖



1：n　(每邊取出 n-1 個等分點)

$\overline{BC}$上

圖形①→②　小三角形內轉 120°
圖形②→③　小三角形內轉 120°
圖形③→④　小三角形內轉 120°
圖形④→⑤　小三角形內轉 120°
圖形⑤→⑥　小三角形內轉 120°

………………………………

圖形 n-1→n　小三角形內轉 120°，此時小三角形共內轉轉(n-1)個 120°

$\overline{AC}$上

圖形 n→n+1　小三角形內轉 120°
圖形 n+1→n+2　小三角形內轉 120°
圖形 n+2→n+3　小三角形內轉 120°
……………………………………

圖形 2n-2→2n-1　小三角形內轉 120°，此時小三角形共內轉轉(n-1)個 120°

$\overline{AB}$上

圖形 2n-1→ 2n　小三角形內轉 120°
圖形 2n→2n+1 小三角形內轉 120°
圖形 2n+1→2n+2 小三角形內轉 120°
……………………………………

圖形 3n-3→3n-2　小三角形內轉 120°，此時小三角共內轉轉(n-1)個 120°
所以 P 點要回到原圖形，小三角形總共內轉

$$120° \times (\mathrm{n}-1) \times 3 = 360° \times (\mathrm{n}-1) = \text{小正角形內轉 } \mathrm{n}-1 \text{ 圈}$$

(二) 當 1: n 時，P 點的路徑總長探討方法一

※當 n =2(mod3)

$$\text{P 點的路徑總長} = 3\mathrm{n}-2-1-\left(3\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)$$ ，

其中 $3\mathrm{n}-2-1$ 是間隔總數

$$\Rightarrow \left(3n-3\left[\frac{n}{3}\right]-4\right) \times \frac{120}{360}$$ ，每次以$\frac{1}{3}$ 圓來統計

$$= \mathrm{n}-\left[\frac{n}{3}\right]-\frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \left[\mathrm{n}-\left[\frac{n}{3}\right]-\frac{4}{3}\right] \times 2\pi$$

※當 n =1(mod3)

P 點路徑總長為$\left(\text{n-} \left[\frac{n}{3}\right]-1\right) \times 2\pi$

※當 n =0(mod3)

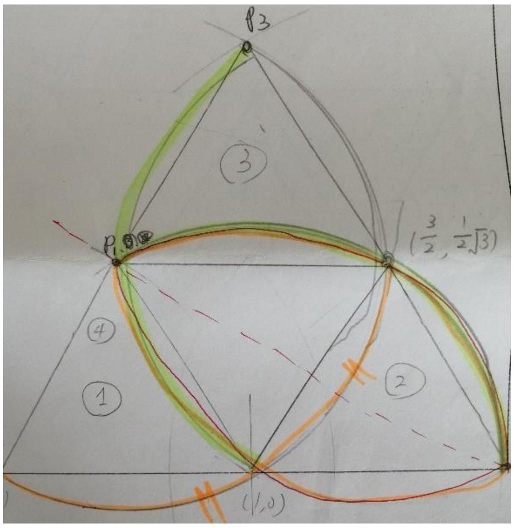
P 點路徑總長為$(\frac{2n-3}{3})$ $\times 2\pi$

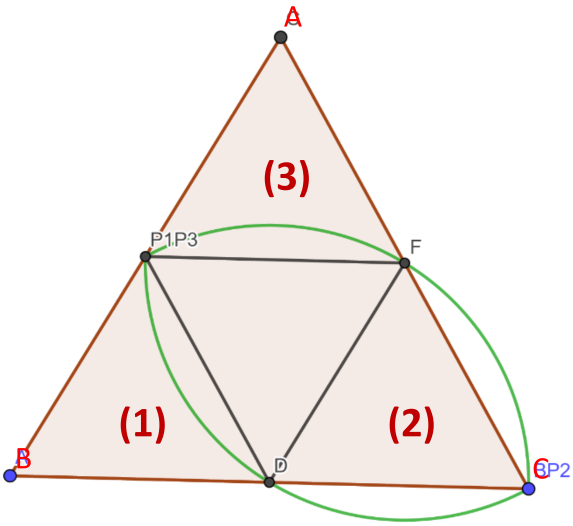
(三) 當 1: n 時，P 點的路徑總長探討方法二

P 點的路徑總長為何是$2\pi \times \frac{2n-2}{3}$或$2\pi \times〔1+(\frac{n}{3}-1)\times 2〕$(n 不同，公式不同)

※當 n =2(mod3) 圖形為對稱，對稱軸經過 C 點

EX： n=2





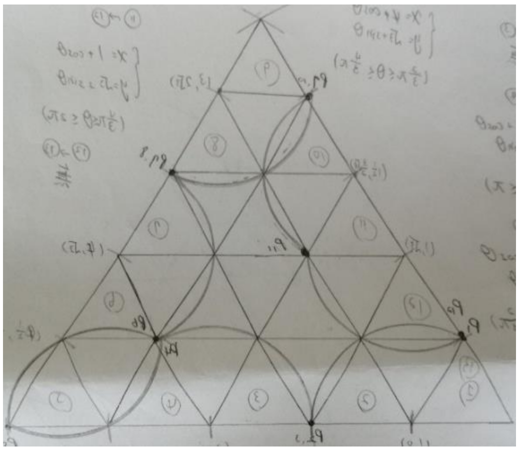
(1) 到 (2) P1 旋轉到 P2 路徑長$2\pi \times \frac{1}{3}$

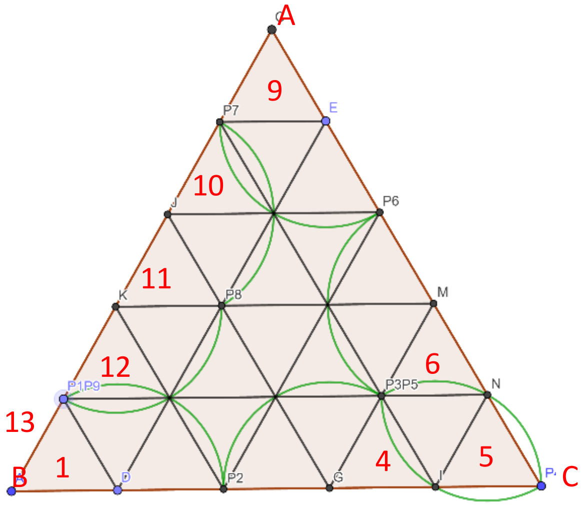
(2) 到 (3) P1 旋轉到 P2 路徑長$2\pi \times \frac{1}{3}$

(3) 到 (1) P3 旋轉到 P1 路徑長 0

P1 轉回原圖形重合，路徑長為$2\pi \times \frac{2}{3}$

EX： n=5





(1)到(4)→ P1 旋轉到 P2，P2 旋轉到 P3，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(4)到(5) → P3 旋轉到 P4，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(5)到(6) → P4 旋轉到 P5，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(6)到(9)→ P5 旋轉到 P6，P6 旋轉到 P7，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(9)到(9) → P7 旋轉到 P7，路徑長 0

(10)到(11) → P7 旋轉到 P8，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

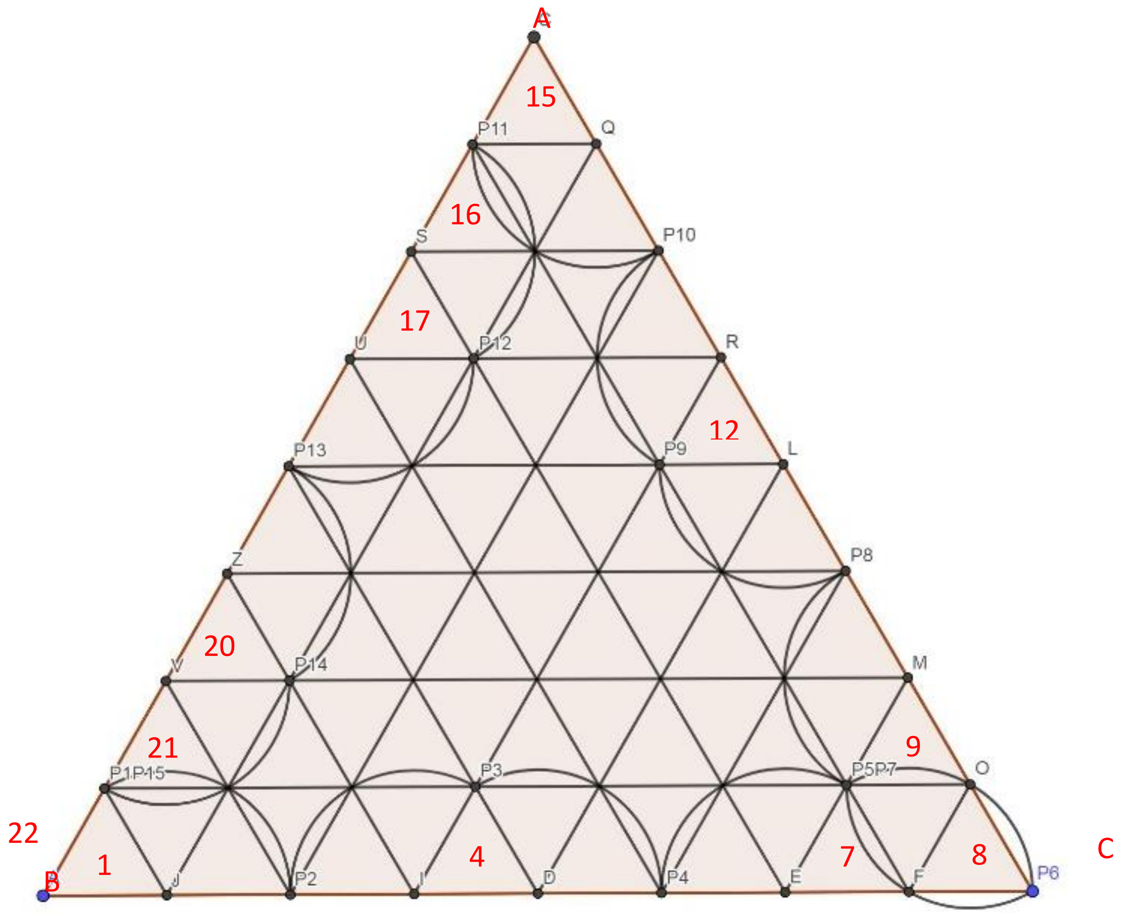
(11)到(12) → P8 旋轉到 P9，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(12)到(13)→ P9 旋轉到 P1，路徑長 0

P1 轉回原圖形重合，路徑長為$\frac{8}{3}\times 2\pi$

我們開始發現規律，因此繼續往下找：

EX： n=8



(1)到(4)→ P1 旋轉到 P2，P2 旋轉到 P3，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(4)到(7) → P3 旋轉到 P4，P4 旋轉到 P5，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(7)到(8) → P5 旋轉到 P6，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(8)到(9) → P6 旋轉到 P7，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(9)到(12)→ P7 旋轉到 P8，P8 旋轉到 P9，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(12)到(15) → P9 旋轉到 P10，P10 旋轉到 P11，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(15)到(16) → P11 旋轉到 P11，路徑長 0

(16)到(17) → P11 旋轉到 P12，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(17)到(20)→　P12 旋轉到 P13，P13 旋轉到 P14，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(20)到(21) → P14 旋轉到 P15，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(21)到(22) → P15 旋轉到 P1，路徑長 0

規律如下：圖形(1)到(22)　，P 點共繞轉 21 次，

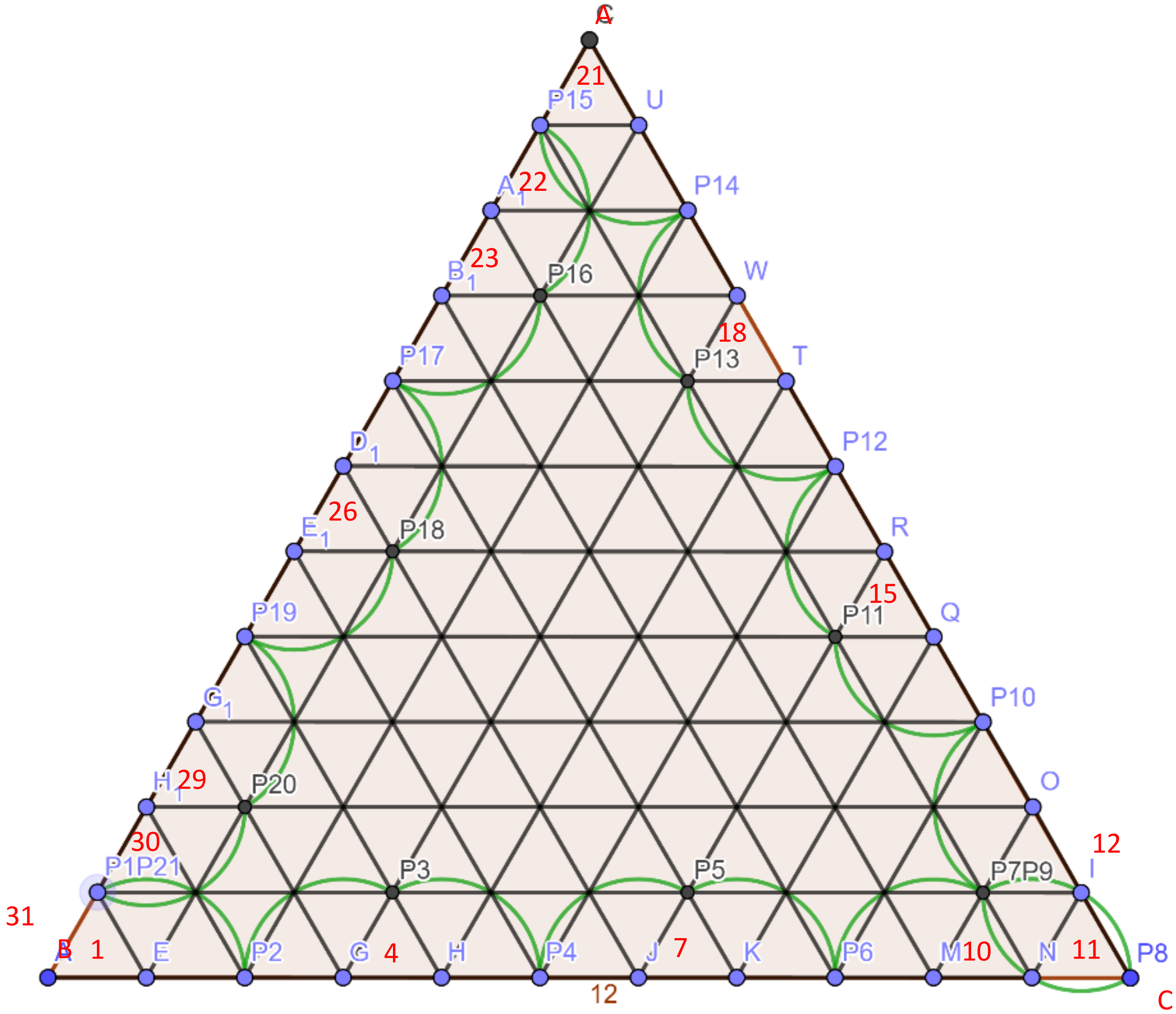
其中有 4 次路徑長是$2\pi\times\frac{1}{3}$，有 2 次路徑長是 0，

剩下的每 3 個一組的路徑長是$2\pi\times\frac{2}{3}$

21-6= 15　　15÷3=5

$5\times\frac{2}{3}\times2\pi+4\times\frac{1}{3}\times2\pi=\frac{14}{3}\times2\pi$

EX：　n=11



(1)到(4)→　P1 旋轉到 P2，P2 旋轉到　P3，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(4)到(7) →　P3 旋轉到 P4，P4 旋轉到　P5，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(7)到(1)0→　P5 旋轉到 P6，P6 旋轉到　P7，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(10)到(11) → P7 旋轉到　P8，路徑長$2\pi \times \frac{1}{3}$

(11)到(12) → P8 旋轉到　P9，路徑長$2\pi \times \frac{1}{3}$

(12)到(15)→　P9 旋轉到 P10，P10 旋轉到　P11，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(15)到(18) → P11 旋轉到　P12，P12 旋轉到　P13，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(18)到(21) → P13 旋轉到 P14，P14 旋轉到　P15，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(21)到(22) → P15 旋轉到　P15，路徑長 0

(22)到(23) → P15 旋轉到　P16，路徑長$2\pi \times \frac{1}{3}$

(23)到(26) → P16 旋轉到 P17，P17 旋轉到　P18，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

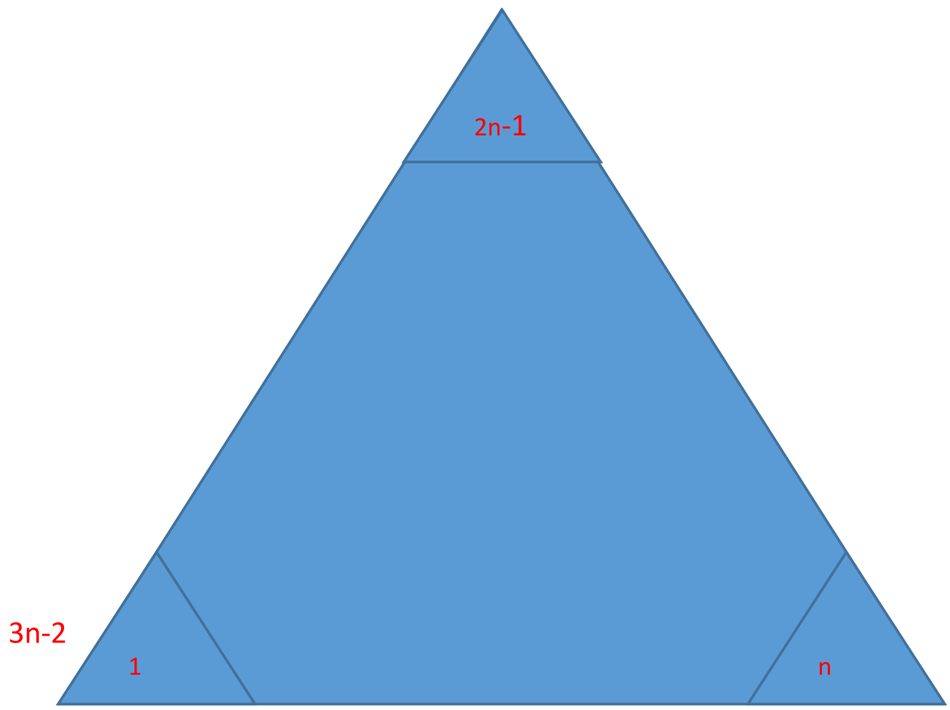
(26)到(29) → P18 旋轉到 P19，P19 旋轉到　P20，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(29)到(30) → P20 旋轉到　P21，路徑長$2\pi \times \frac{1}{3}$

(30)到(31) → P21 旋轉到　P1，路徑長 0

30-6= 24　　24÷3=8

$8\times 2\pi \times \frac{2}{3} + 4\times 2\pi \times \frac{1}{3} = \frac{20}{3} \times 2\pi$



當 n 為 3 的倍數餘 2 時，三角形 1 到三角形 n，三角形 n 回到三角形 2n-1，三角形 2n-1 再回到三角形 3n-2，故變化 3n-2-1→3n-3 次

其中有 4 次路徑長是$2\pi \times \frac{1}{3}$

，有 2 次路徑長是 0，

剩下的每 3 個一組的路徑長是$2\pi \times \frac{2}{3}$ ，3n-3-6=3n-9

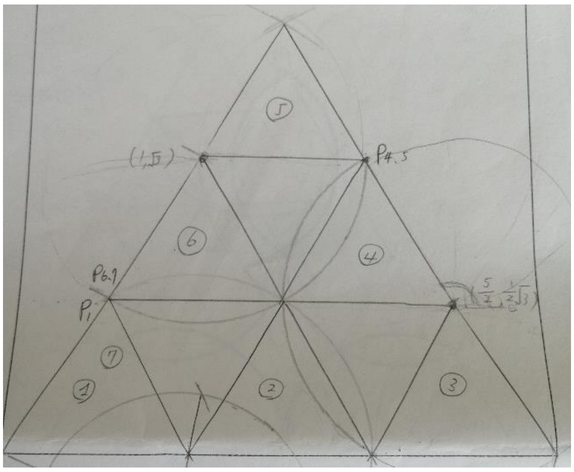
路徑總長為$\frac{3n-9}{3} \times 2\pi \times \frac{2}{3} + 4 \times 2\pi \times \frac{1}{3}$ = $\frac{2n-2}{3} \times 2\pi$

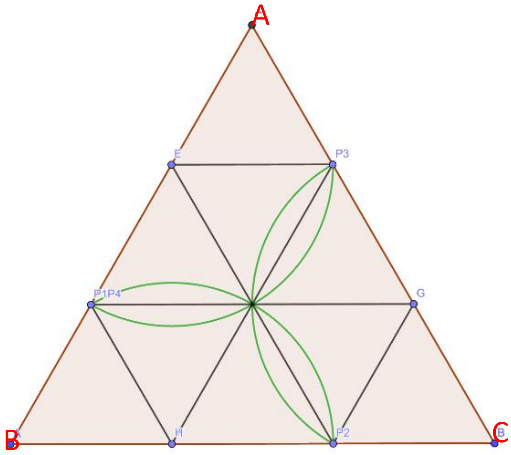
另外，我們將路徑長統計成表格，發現是呈現等差數列，所得結果與上述推論相同

n	$\frac{1}{3}$圓弧總數	P 點軌跡路徑總長
5	8	$8\times \frac{2\pi}{3}$
8	14	$14\times \frac{2\pi}{3}$
11	20	$20\times \frac{2\pi}{3}$
類推 n	$8+\frac{n-5}{3} \times 6$ =2n-2	$(2n-2)\times \frac{2\pi}{3}$

※當 n =0(mod3)

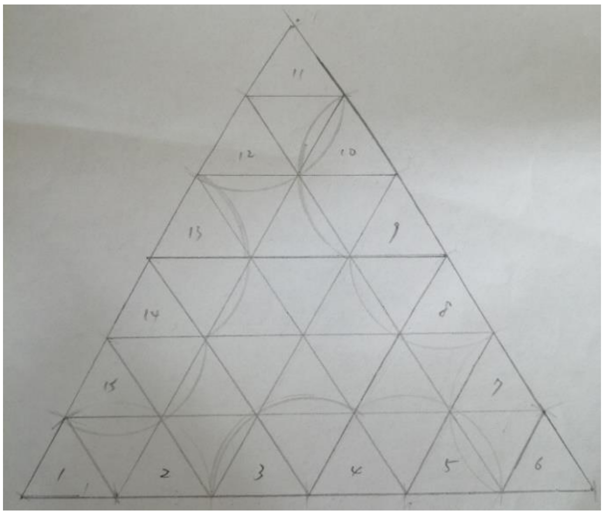
EX： n=3

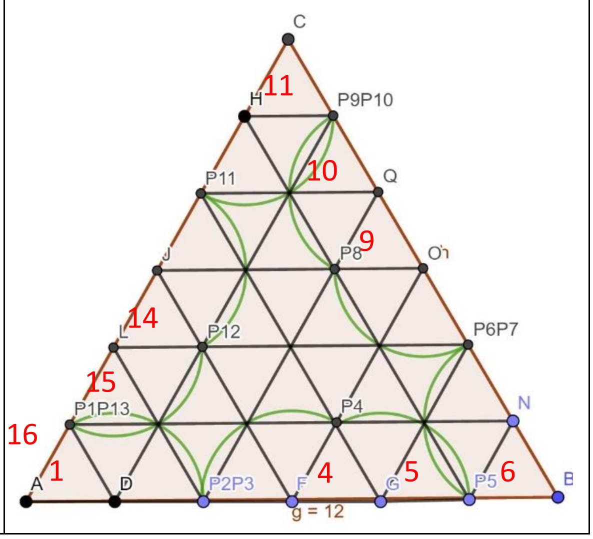




共有 3 次 120 度的弧，所以路徑長為 $2\pi \times \frac{1}{3} \times 3 = 2\pi \times 1$

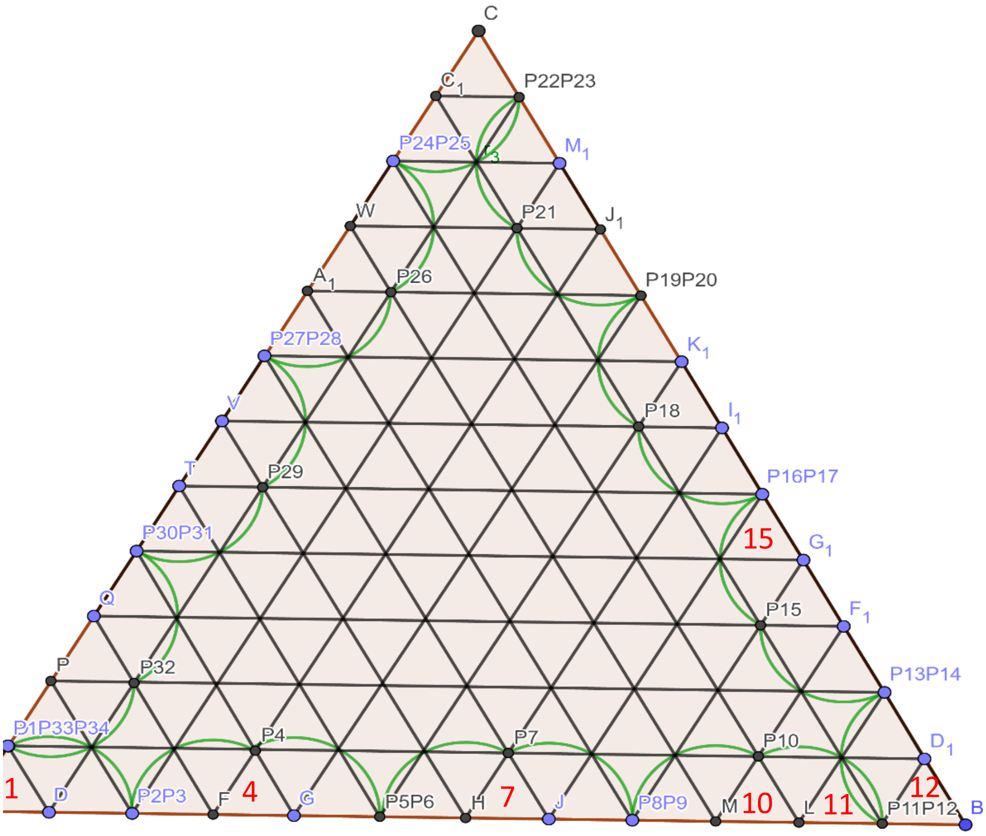
EX： n=6





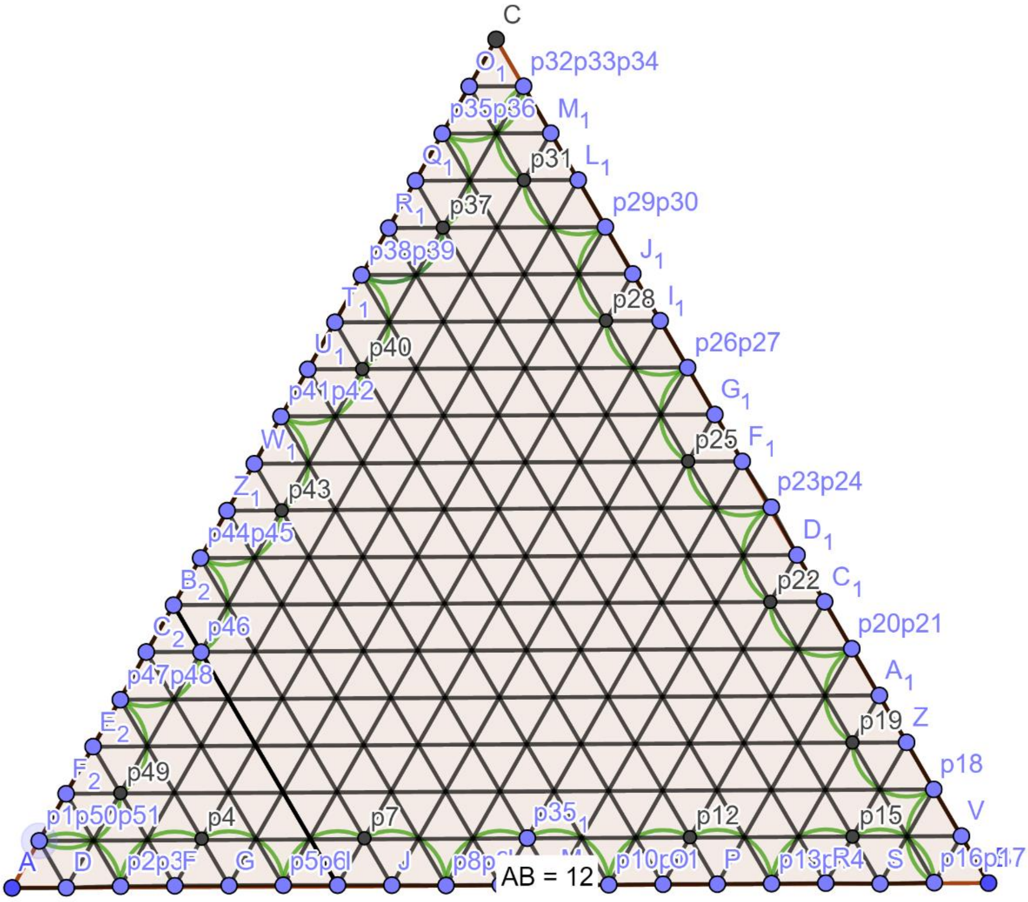
共有 9 次 120 度的弧，所以路徑長為 $2\pi \times \frac{1}{3} \times 9 = 2\pi \times 3$

EX： n=12



共有 21 次 120 度的弧，所以路徑長為 $2\pi \times \frac{1}{3} \times 21 = 2\pi \times 7$

EX： n=18

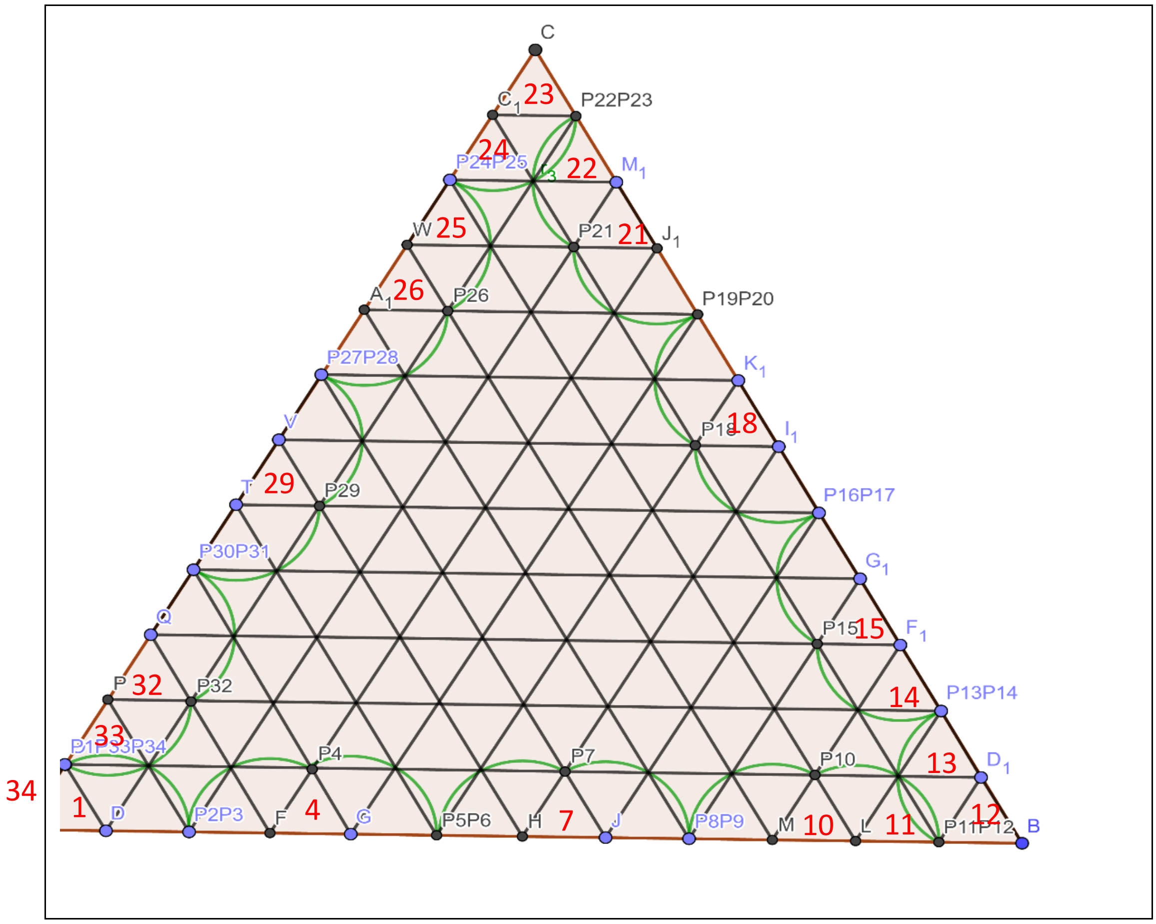


共有 33 次 120 度的弧，所以路徑長為 $2\pi \times \frac{1}{3} \times 33=2\pi\times 11$

我們發現當 n =0(mod3)時，P 點軌跡路徑總長呈現等差數列，首項為2π，公差為4π

所以我們類推 P 點軌跡路徑總長公式為$2\pi \times$〔$1+(\frac{n}{3}-1)\times 2$〕化簡後為$2\pi \times \frac{2n-3}{3}$

另外，也可以以另一種記數方法，得到$2\pi\times\frac{2n-3}{3}$



(1)到(4)→　P1 旋轉到 P2，P2 旋轉到 P3，P3 旋轉到 P4，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(4)到(7) →　P4 旋轉到 P5，P5 旋轉到 P6，P6 旋轉到 P7，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(7)到(10)→　P7 旋轉到 P8，P8 旋轉到 P9，P9 旋轉到 P10，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(10)到(11) → P10 旋轉到 P11，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(11)到(12) → P11 旋轉到 P12，路徑長0

(12)到(13) → P12 旋轉到 P13，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(13)到(14) → P13 旋轉到 P14，路徑長 0

(14)到(15) → P14 旋轉到 P15，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(15)到(18)→ P15 旋轉到 P16，P16 旋轉到 P17，P17 旋轉到 P18，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(18)到(21)→ P18 旋轉到 P19，P19 旋轉到 P20，P20 旋轉到 P21，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(21)到(22) → P21 旋轉到 P22，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(22)到(23) → P22 旋轉到 P23，路徑長0

(23)到(24) → P23 旋轉到 P24，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(24)到(25) → P24 旋轉到 P25，路徑長 0

(25)到(26) → P25 旋轉到 P26，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(26)到(29)→ P26 旋轉到 P27，P27 旋轉到 P28，P28 旋轉到 P29，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(29)到(32)→ P29 旋轉到 P30，P30 旋轉到 P31，P31 旋轉到 P32，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(32)到(33) → P32 旋轉到 P33，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(33)到(34) → P33 旋轉到 P34，路徑長 0

33-12=21　21÷3=7

$7\times2\pi\times\frac{2}{3}+7\times2\pi\times\frac{1}{3}$

$=\frac{21}{3}\times2\pi$

我們類推 1：n

當 n 為 3 的倍數時，三角形 1 到三角形 n，三角形 n 回到三角形 2n-1，三角形 2n-1 再回到三角形 3n-2，故變化 3n-2-1→3n-3 次

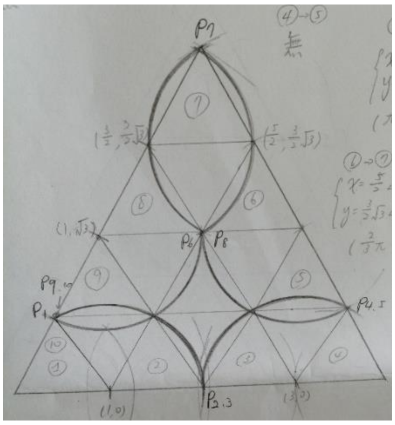
其中有 7 次路徑長是$2\pi\times\frac{1}{3}$，有 5 次路徑長是 0，

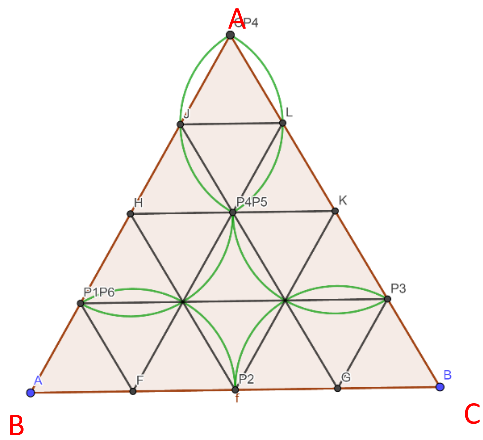
剩下的每 3 個一組的路徑長是$2\pi\times\frac{2}{3}$

3n-3-12=3n-15

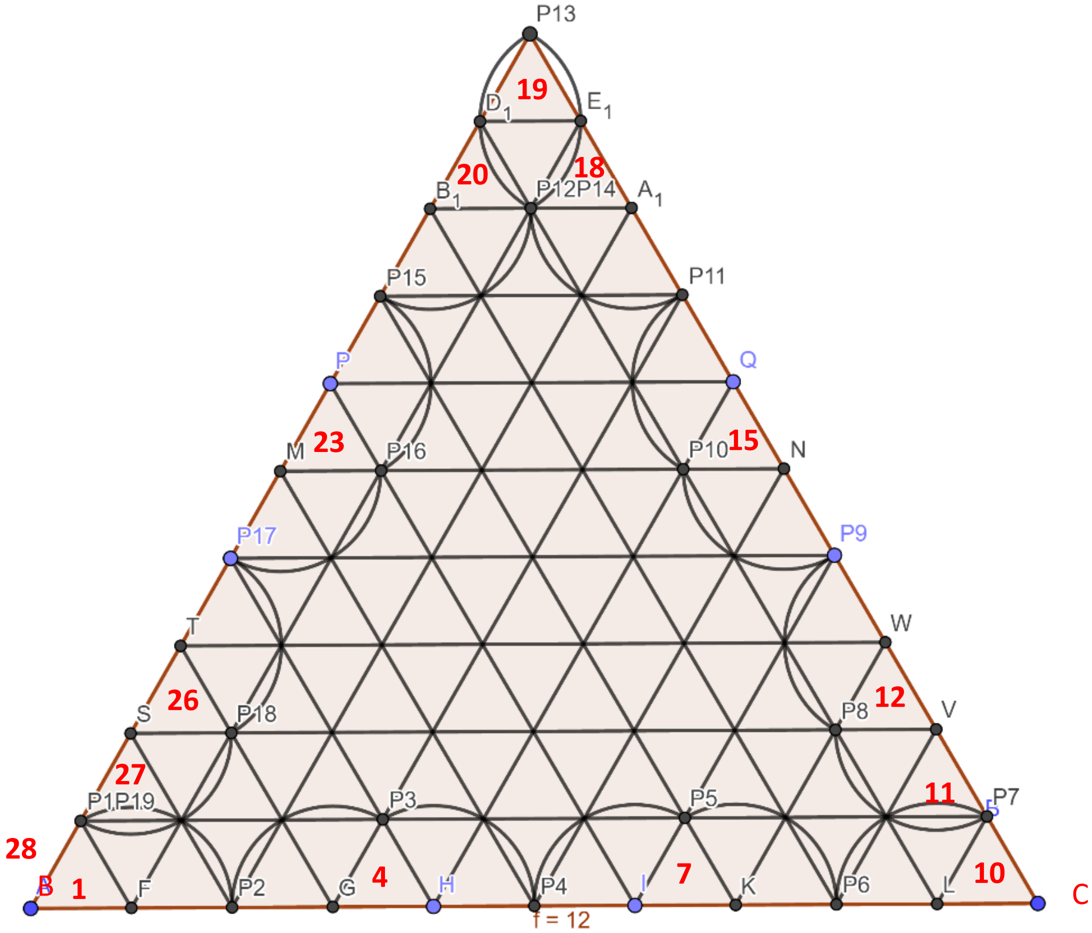
路徑總長為$\frac{3n-15}{3}\times2\pi\times\frac{2}{3}+7\times2\pi\times\frac{1}{3}=\frac{2n-3}{3}\times2\pi$

※當 n =1(mod3)　EX：　n=4　　圖形為對稱，對稱軸經過 A 點





EX： n=10



(1)到(4)→ P1 旋轉到 P2，P2 旋轉到 P3，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(4)到(7) → P3 旋轉到 P4，P4 旋轉到 P5，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(7)到(10)→ P5 旋轉到 P6，P6 旋轉到 P7，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(10)到(11) → P7 旋轉到 P7，路徑長 0

(11)到(12) → P7 旋轉到 P8，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(12)到(15)→ P8 旋轉到 P9，P9 旋轉到 P10，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(15)到(18)→ P10 旋轉到 P11，P11 旋轉到 P12，路徑長$2\pi\times\frac{2}{3}$

(18)到(19) → P12 旋轉到 P13，路徑長$2\pi\times\frac{1}{3}$

(19)到(20) → P13 旋轉到 P14，路徑長$2\pi \times \frac{1}{3}$

(20)到(23)→ P14 旋轉到 P15，P15 旋轉到 P16，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(23)到(26)→ P16 旋轉到 P17，P17 旋轉到 P18，路徑長$2\pi \times \frac{2}{3}$

(26)到(27) → P18 旋轉到 P19，路徑長$2\pi \times \frac{1}{3}$

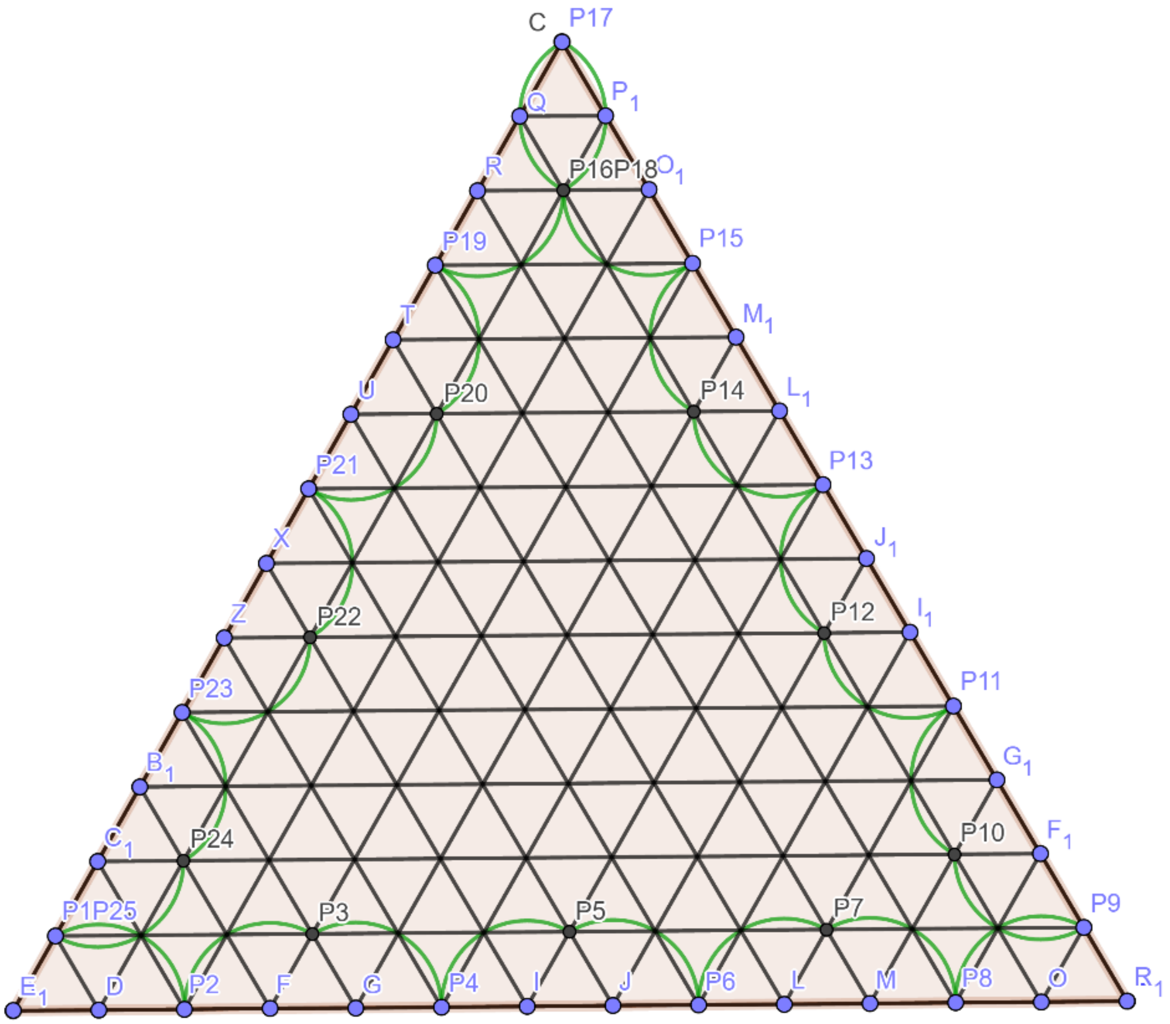
(27)到(28) → P19 旋轉到 P1，路徑長 0

27-6=21　21÷3=7

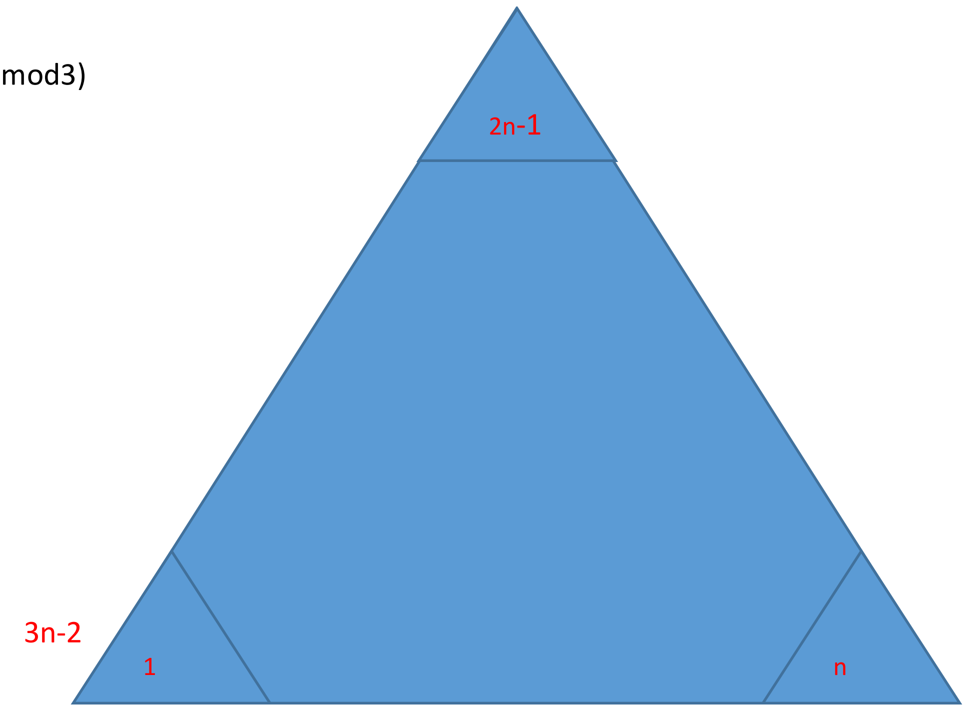
$7 \times 2\pi \times \frac{2}{3} + 4 \times 2\pi \times \frac{1}{3}$

$= 6 \times 2\pi$

EX： n=13



當 n =1(mod3)



當 n 為 3 的倍數餘 1 時，三角形 1 到三角形 n，三角形 n 回到三角形 2n-1，三角形 2n-1 再回到三角形 3n-2，故變化 3n-2-1→3n-3 次

其中有 4 次路徑長是$2\pi\times\frac{1}{3}$，有 2 次路徑長是 0，

剩下的每 3 個一組的路徑長是$2\pi\times\frac{2}{3}$

3n-3-6=3n-9

路徑總長為$\frac{3n-9}{3}\times 2\pi\times\frac{2}{3}+4\times 2\pi\times\frac{1}{3}=\frac{2n-2}{3}\times 2\pi$

另外，我們將路徑長統計成表格，發現是呈現等差數列，所得結果與上述推論相同

n	$\frac{1}{3}$圓弧總數	P 點軌跡路徑總長
4	6	$6\times\frac{2\pi}{3}$
7	12	$12\times\frac{2\pi}{3}$
10	18	$18\times\frac{2\pi}{3}$
類推 n	$6+\frac{n-4}{3}\times 6$ =2n-2	$(2n-2)\times\frac{2\pi}{3}$

(四) P 點路徑總長公式方法一與方法二整合

n =0(mod3) P 點軌跡路徑長為$(\frac{2n-3}{3})\times 2\pi$

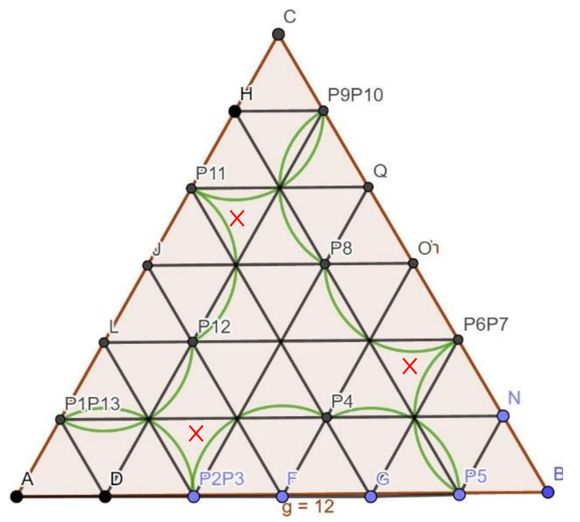
n =1(mod3) P 點軌跡路徑長為 $(n-\left[\frac{n}{3}\right]-1)\times 2\pi=(n-\frac{n-1}{3}-1)\times 2\pi=\frac{2n-2}{3}\times 2\pi$

n =2(mod3) P 點軌跡路徑長為$[n-\left[\frac{n}{3}\right]-\frac{4}{3}]\times 2\pi=(n-\frac{n-2}{3}-\frac{4}{3})\times 2\pi=\frac{2n-2}{3}\times 2\pi$

(五) 小三角形透過 P 點旋轉回到原來位置的過程中，小三角形所覆蓋的面積

當 n =0(mod3)

EX1：n=6



小三角形面積

$=(27-3)\times\frac{\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$

弓形面積

$=(\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4})\times12$

$=2\pi-3\sqrt{3}$

小三角形所覆蓋的面積

$=6\sqrt{3}+(2\pi-3\sqrt{3})$

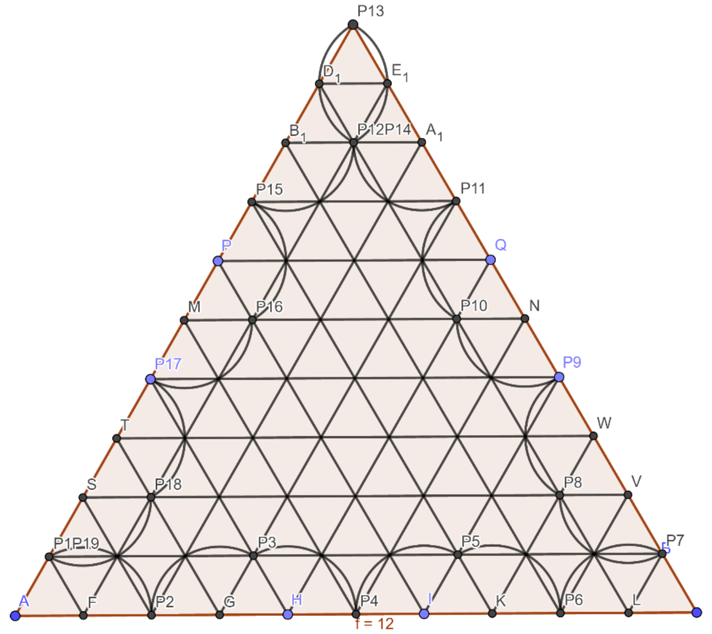
$=2\pi+3\sqrt{3}$

n	$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 所有的三角形總數	應扣掉的三角形數(以×標記)	應加上的弓形數	小三角形所覆蓋的面積
6	27	3	12	$2\pi+3\sqrt{3}$
9	45	6	24	$4\pi+\frac{15}{4}\sqrt{3}$
12	63	9	36	$6\pi+\frac{18}{4}\sqrt{3}$
n	$27+\frac{n-6}{3}\times18$ =6n-9	$=3+\frac{n-6}{3}\times3$ =n-3	$12+\frac{n-6}{3}\times12$ =4n-12	$\frac{2n-6}{3}\pi+\frac{n+6}{4}\sqrt{3}$

列出表格，發現覆蓋面積呈現等差數列，推得一般式如上

當 n =1(mod3)

EX1：n=10



小三角形面積

=(51-7)×$\frac{\sqrt{3}}{4}$=$11\sqrt{3}$

弓形面積

=$(\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4})$×30

=$5\pi-\frac{15}{2}\sqrt{3}$

小三角形所覆蓋的面積

=$11\sqrt{3}+(5\pi-\frac{15}{2}\sqrt{3})$

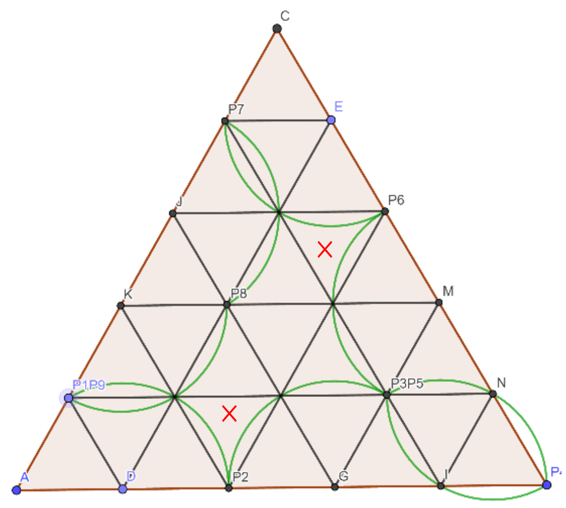
=$5\pi+\frac{7}{2}\sqrt{3}$

n	$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 所有的三角形總數	應扣掉的三角形數(以×標記) $\frac{3n-9}{3}$	應加上的弓形數	小三角形所覆蓋的面積
4	15	1	6	$\pi+2\sqrt{3}$
7	33	4	18	$3\pi+\frac{11}{4}\sqrt{3}$
10	51	7	30	$5\pi+\frac{7}{2}\sqrt{3}$
n	15+$\frac{n-4}{3}\times 18$ =6n-9	=1+$\frac{n-4}{3}\times 3$ =n-3	6+$\frac{n-4}{3}\times 12$ =4n-10	$\frac{2n-5}{3}\pi+\frac{n+4}{4}\sqrt{3}$

列出表格，發現覆蓋面積呈現等差數列，推得一般式如上

當 n =2(mod3)

EX1：n=5



小三角形面積

$=(21-2)\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{19}{4}\sqrt{3}$

弓形面積

$=(\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4})\times 10$

$=\frac{5}{3}\pi-\frac{5}{2}\sqrt{3}$

小三角形所覆蓋的面積

$=\frac{19}{4}\sqrt{3}+(\frac{5}{3}\pi-\frac{5\sqrt{3}}{2})$

$=\frac{5}{3}\pi+\frac{9}{4}\sqrt{3}$

n	$\overline{BC}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 所有的三角形總數	應扣掉的三角形數(以×標記) $\frac{3n-9}{3}$	應加上的弓形數	小三角形所覆蓋的面積
5	21	2	10	$\frac{5}{3}\pi+\frac{9}{4}\sqrt{3}$
8	39	5	22	$\frac{11}{3}\pi+3\sqrt{3}$
11	57	8	34	$\frac{17}{3}\pi+\frac{15}{4}\sqrt{3}$
n	$21+\frac{n-5}{3}\times 18$ =6n-9	$=2+\frac{n-5}{3}\times 3$ =n-3	$10+\frac{n-5}{3}\times 12$ =4n-10	$\frac{2n-5}{3}\pi+\frac{n+4}{4}\sqrt{3}$

列出表格，發現覆蓋面積呈現等差數列，推得一般式如上

伍、結論

(1) 小三角形回到原圖形需要繞轉大圖形的圈數為 1 圈

(2) 小三角形回到原圖形時的需要自轉圈數為 n-1 圈

(3) P 點軌跡路徑長，方法一推得一般式如下：

n =0(mod3) P 點軌跡路徑長為$(\frac{2n-3}{3})$ ×2π

n =1(mod3) P 點軌跡路徑長為 (n- $\left[\frac{n}{3}\right]-1$) ×2π

n =2(mod3) P 點軌跡路徑長為$[n-\left[\frac{n}{3}\right]-\frac{4}{3}]$ ×2π

P 點軌跡路徑長，方法二推得一般式如下如下：

n =0(mod3) P 點軌跡路徑長為2π ×〔1+$(\frac{n}{3}-1)$×2〕=2π × $\frac{2n-3}{3}$

n =1(mod3) P 點軌跡路徑長為$\frac{2n-2}{3}\times 2\pi$

n =2(mod3) P 點軌跡路徑長為$\frac{2n-2}{3}\times 2\pi$

化簡後，方法一與方法二的公式是相同的

(4) P 點軌跡有無對稱性

n =0(mod3) P 點軌跡路徑沒有對稱，P 未經過 ABC 任一點，所以 P 點軌跡沒有對稱

n =1(mod3) P 點軌跡路徑長有對稱，P 經過 A，所以對稱軸經過 A 點

n =2(mod3) P 點軌跡路徑長有對稱，P 經過 C，所以對稱軸經過 C 點

(5) 當 n =0(mod3)　小三角形所覆蓋的面積一般式為

$$\frac{2n-6}{3}\pi+\frac{n+6}{4}\sqrt{3}$$

當 n =1(mod3)　小三角形所覆蓋的面積一般式為

$$\frac{2n-5}{3}\pi+\frac{n+4}{4}\sqrt{3}$$

當 n =2(mod3)　小三角形所覆蓋的面積一般式為

$$\frac{2n-5}{3}\pi+\frac{n+4}{4}\sqrt{3}$$