嘉義市第 38 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：我們不一樣，如何變一樣

關 鍵 詞：等差數列、等差級數、質數

編　　號：

摘要

利用相同的球數去排列出不同的幾何平面圖形及立體圖形，其中先從最簡單的圖形開始：

(1)平面圖形找正三角形及正方形

(2)立體圖形找正四面體及正六面體

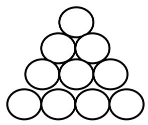
過程中，用到了等差數列及等比級數的運算，還有 $\sum$ 求和問題。

壹、研究動機

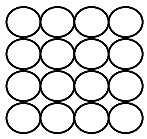
一開始是在補充講義中的一題練習題中寫到的題目，當時也沒多想就是一般的題目把它解出來就好，題目是說「有大小相同的球若干個，全部的球可以擺成一個正方形，也可以擺成一個正三角形，兩種擺法如下圖所示。若擺成正三角形，每邊球的個數比擺成正方形時每邊球的個數多 2 個，試求全部的球共有多少個？」

後來老師說要做科展時，想到這個題目，它跟我之前看過或學過的內容有類似的概念，如：國小學過同體積可轉換成另一個物體或者古希臘三大幾何難題之一『化圓為方』的問題，只是把這個題目改成用相同球數排列成不同的正 N 邊形或者正 N 面體，若能找出最簡單兩個圖形的規律是否能推廣到更多正 N 邊形中，所以開始試著去畫出幾個數量較少的球數看能否畫出一組來，如下：

平面圖形

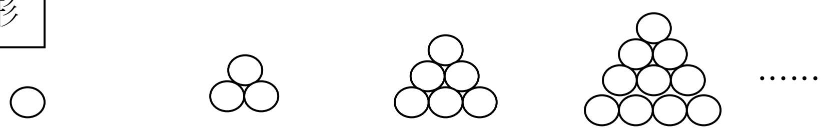


正三角形排法



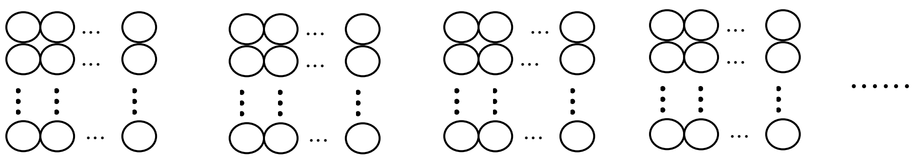
正方形排法

立體圖形



正四面體排法

第 1 層　第 2 層　第 3 層　第 4 層 ……　第 p 層



正六面體排法

因為立體圖形不好畫，只能用分層的方式去呈現立體圖形，抱持一個信念就是能在立體圖形中找到一組甚至兩組來發現其規律，若有機會發現那就可再往更高的正 N 面體邁進。

會開始認真看待這件事情是希望能學習到做科展的脈絡，能得到評審青睞最好，不行的話也可以知道哪些地方需要加強的，在下一次的科展作改進，不管結果如何，都會是一個不錯的經驗。

貳、研究目的

我覺得生活中總會遇到一些問題，比如蓋房子當你材料是固定的，突然要從 A 方案改成 B 方案時，在材料都要使用完的前提下，你就可以用這種方法來思考，或者如前面所提的『化圓為方』問題，都是要在固定條件下，完成另一種圖形，過程中可以促進思考外，更可以聯想出其他東西原先不在預期的想法。

或許生活中不見得會有那麼多需要這個方法的地方，但只要有一個人需要，就可以運用上了，這也是一般人口中所說「數學以後又用不到，學好又能如何？」殊不知生活中充滿著數學原理，只是沒有察覺到而已，正因如此，希望這次的研究能在未來起到一點作用足矣。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Excel 軟體

肆、研究過程及方法

首先對平面圖形與立體圖形中最簡單的兩種圖形研究，第一種是正三角形與正方形，第二種為正四面體與正六面體，主要是想探討如果利用相同大小的球來拼成這些圖形，是否能在特定球數下同時能排成正三角形及正方形或者正四面體與正六面體的情形，以下為兩種情形下的過程：

(一) 正三角形與正方形

假定正三角形每邊由$n(n>0, n\in Z)$個球組成，其球的個數為

$$1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}\text{ 個；}$$

假定正方形每邊由$m(m>0, m\in Z)$個球組成，其球的個數為m^2個，

試著找出其解(n,m)使得$\frac{n(n+1)}{2}=m^2$。

利用 Excel 執行運算$n=1\sim 400$時，得到四組解滿足方程式，這四組分別為(1,1)、(8,36)、(49,1225)、(288,41616)，從這四組解中觀察到一些規律為

A. $n=1$時 $\Rightarrow \frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1^2$　表示成 $(1\times 1)^2=1^2\times 1^2$ 。

B. $n=8$時 $\Rightarrow \frac{8(1+8)}{2}=\frac{8\times 9}{2}=6^2$　表示成 $(2\times 3)^2=2^2\times 3^2$ 。

C. $n=49$時 $\Rightarrow \frac{49(1+49)}{2}=\frac{49\times 50}{2}=35^2$　表示成 $(5\times 7)^2=5^2\times 7^2$ 。

D. $n=288$時 $\Rightarrow \frac{288(1+288)}{2}=\frac{288\times 289}{2}=214^2$ 表示成 $(12\times 17)^2=12^2\times 17^2$ 。

由 A、B、C、D 中，若$c^2=a^2\times b^2$可觀察到一些規則：

a	b	a	b
1	1	1	1
2	3	2	3
5	7	5	7
12	17	12	17

表示為+　表示黑色箭頭兩端的兩數之和

從上表中，先假定已知的解中，將$c^2=a^2\times b^2$表示成$m_k^2=a_k^2\times b_k^2(k>0, k\in Z)$，

在$a_1=1$及$b_1=1$必然成立下，發現

$$a_2=a_1+b_1=1+1=2\text{，}b_2=a_1+a_2=1+2=3\text{ 得到第 2 組解}$$
$$a_3=a_2+b_2=2+3=5\text{，}b_3=a_2+a_3=2+5=7\text{ 得到第 3 組解}$$
$$a_4=a_3+b_3=5+7=12\text{，}b_4=a_3+a_4=5+12=17\text{ 得到第 4 組解}$$

因此，將此規律推導為 $\begin{cases} a_{k+1} = a_k + b_k \\ b_{k+1} = a_k + a_{k+1} \quad (k > 0, k \in Z) \\ a_1 = 1，b_1 = 1 \end{cases}$

依此規律陸續找出後續的解如下：

k	a_k	b_k	b_k^2	$n = \begin{cases} b_k^2，k為奇數 \\ b_k^2 - 1，k為偶數 \end{cases}$	$m = a_k \times b_k$
1	1	1	1	1	1
2	2	3	9	8	6
3	5	7	49	49	35
4	12	17	289	288	204
5	29	41	1681	1681	1189
6	70	99	9801	9800	6930
7	169	239	57121	57121	40391
8	408	577	332929	332928	235416
9	985	1393	1940449	1940449	1372105
10	2378	3363	11309769	11309768	7997214

(二)正四面體與正六面體

假定正四面體每邊由 $p(p > 0, p \in Z)$ 個球組成，其球的個數為

$$\begin{aligned} &1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots\ldots + (1+2+3+\cdots+p) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{p(p+1)}{2} \\ &= \frac{p(p+1)(p+2)}{6} \text{個；} \end{aligned}$$

假定正六面體每邊由 $q(q > 0, q \in Z)$ 個球，其個數為 q^3 個球，

試著找出其解 (p,q) 使得 $\dfrac{p(p+1)(p+2)}{6} = q^3$

利用 Excel 執行運算 $p = 1 \sim 400$ 時，發現 $\dfrac{p(p+1)(p+2)}{6}$ 的三次方根無法得到正整數解 q，表示有可能不存在除了(1,1)以外的第 2 組解，因此換個方向來探討方程式本身是否有足夠理由說明此結果。

首先，連續 3 個正整數的乘積必然存在 2 與 3 的因數？從數據中可以發現 $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ 皆為正整數，原因如下：

(1) 2 的因數：連續三個正整數必為奇數、偶數、奇數或者偶數、奇數、偶數這兩種情形其中一種，既然至少存在一偶數，所以必定有 2 的因數。

(2)3 的因數：若將所有正整數分成 3 類分別為 3n+1、3n+2 及 3n，則不管選擇哪一個正整數開頭其三個正整數的連乘積必為(3n+1)(3n+2)(3n)，而 3n 即為 3 的倍數，所以必定有 3 的因數。

故由(1)、(2)兩點可得到連續三個正整數相乘必為 6 的倍數的結果。

再者，$\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$ 是否能表示成 q^3？從數據中可發現似乎沒有(至少在 p=1~400 中)，所以改成去了解不行原因，並將方程式改寫成 $p(p+1)(p+2)=6q^3$ 來解讀，說明如下：

(1)任意兩連續正整數必互質：

設連續兩正整數為 n、n+1 $(n>0, n\in Z)$

若(n,n+1)=k，則令 n=ak、n+1=bk

(n+1)-n=bk-ak=(b-a)k=1 推得 b-a=k=1

所以(n,n+1)=1，故連續兩正整數必互質。

(2)當 $p\geq 3$時，連續三個正整數必定存在 2、3 以外質數的因數，由(1)得知 p、$p+1$ 及 $p+1$、$p+2$ 彼此互質且連續 n 個正整數相乘必有 n 的因數，若出現一個 2、3 以外的質數 s，則只會存在 p、p+1、p+2 三數的其中之一，而連續兩正整數也不可能皆為立方數。

故由(1)、(2)兩點可得到除了(p,q)=(1,1)外，找不到任何一組(p,q)使得 $p(p+1)(p+2)=6q^3$

伍、研究結果

在第一種情況下，可以從 n=1~400 中找到 4 組解進而從這些解中發現其規律為 $\begin{cases} a_{k+1}=a_k+b_k \\ b_{k+1}=a_k+a_{k+1} \quad (k>0, k\in Z) \\ a_1=1，b_1=1 \end{cases}$ ，利用此規律去找到另外 6 組解去測試皆能滿足一開始所定義 $\frac{n(n+1)}{2}=m^2$ 的方程式，所以可以確定按此規律可找出無限多組解。

而第二種情況就沒有像第一種情況那樣發現第二組解，一樣將 p 值從 1 代到 400(因為都沒找到其他解，所以附件只列出 p=1~136 的情形)，因此試著去解讀方程式本身是不是可說明無第二組正整數解，最後從因數倍數與質數的性質中，去

得到一些結論，除了(1,1)以外找不到另一組正整數解(p,q)使得

$$\frac{p(p+1)(p+2)}{6}=q^3$$成立。

陸、討論

此次研究先從平面圖形與立體圖形中最簡單的兩種圖形來研究，與設想中的結果出現不同情況，主要從兩個面向討論：

(1)從幾何圖形思考：平面圖形中用相同的球數去拼出第一個可同時滿足正三角形及正方形時覺得蠻不可思議，並思考若再增加球數是否有機會找到另一組解；立體圖形中便無法如平面圖形那麼順利找出第一組。缺點則是排列過程中無法使用足夠大量的球去排出更多種滿足的解，進而利用 excel 中的數學函數去計算。

(2)從代數運算思考：平面圖形中最多就是二元二次方程式，並用代值方式去滿足方程式，過程中運用到等差級數的概念列出相關方程式；立體圖形則是二元三次方程式，此運算方式的棘手之處是能列出式子 1+(1+2)+(1+2+3)+……(1+2+3+……+p)卻不知如何化簡成方程式的樣子，網路上查詢資料並詢問老師後才得以往後面繼續進行。

柒、結論

這次的研究結果最可惜的便是無法在第二種情形中找到另外一組解來推論後續解的情形，雖然如此，換個方式去說明沒有另外一組解的情形也並非易事，所以從這次的研究中了解到腦袋中想到的情形是可以去驗證對或錯，就算是錯的也能去知道錯在哪裡。

而第一種情形中能在最基本的正三角形及正方形得到所要的結果，或許可在往正 n 邊形去找尋找到一組球數可從正三角形一直到滿足正 n 邊形，求得最大 n 值。

捌、參考資料及其他

1. 康軒數學課本第一冊及第三冊
2. 維基百科—求和符號
https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%B1%82%E5%92%8C%E7%AC%A6%E5%8F%B7
3. 附件一至六為數據資料。

附表一：n=1~100

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$
1	1	1	35	630	25.0998	69	2415	49.14265
2	3	1.732051	36	666	25.80698	70	2485	49.84977
3	6	2.44949	37	703	26.51415	71	2556	50.5569
4	10	3.162278	38	741	27.22132	72	2628	51.26402
5	15	3.872983	39	780	27.92848	73	2701	51.97115
6	21	4.582576	40	820	28.63564	74	2775	52.67827
7	28	5.291503	41	861	29.3428	75	2850	53.38539
8	36	6	42	903	30.04996	76	2926	54.09251
9	45	6.708204	43	946	30.75711	77	3003	54.79964
10	55	7.416198	44	990	31.46427	78	3081	55.50676
11	66	8.124038	45	1035	32.17142	79	3160	56.21388
12	78	8.831761	46	1081	32.87856	80	3240	56.921
13	91	9.539392	47	1128	33.58571	81	3321	57.62812
14	105	10.24695	48	1176	34.29286	82	3403	58.33524
15	120	10.95445	49	1225	35	83	3486	59.04236
16	136	11.6619	50	1275	35.70714	84	3570	59.74948
17	153	12.36932	51	1326	36.41428	85	3655	60.4566
18	171	13.0767	52	1378	37.12142	86	3741	61.16371
19	190	13.78405	53	1431	37.82856	87	3828	61.87083
20	210	14.49138	54	1485	38.5357	88	3916	62.57795
21	231	15.19868	55	1540	39.24283	89	4005	63.28507
22	253	15.90597	56	1596	39.94997	90	4095	63.99219
23	276	16.61325	57	1653	40.6571	91	4186	64.6993
24	300	17.32051	58	1711	41.36424	92	4278	65.40642
25	325	18.02776	59	1770	42.07137	93	4371	66.11354
26	351	18.73499	60	1830	42.7785	94	4465	66.82066
27	378	19.44222	61	1891	43.48563	95	4560	67.52777
28	406	20.14944	62	1953	44.19276	96	4656	68.23489
29	435	20.85665	63	2016	44.89989	97	4753	68.942
30	465	21.56386	64	2080	45.60702	98	4851	69.64912
31	496	22.27106	65	2145	46.31414	99	4950	70.35624
32	528	22.97825	66	2211	47.02127	100	5050	71.06335
33	561	23.68544	67	2278	47.7284			
34	595	24.39262	68	2346	48.43552			

附表二：n=101~200

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$
101	5151	71.77047	135	9180	95.81232	169	14365	119.8541
102	5253	72.47758	136	9316	96.51943	170	14535	120.5612
103	5356	73.1847	137	9453	97.22654	170	14535	120.5612
104	5460	73.89181	138	9591	97.93365	172	14878	121.9754
105	5565	74.59893	139	9730	98.64076	173	15051	122.6825
106	5671	75.30604	140	9870	99.34787	174	15225	123.3896
107	5778	76.01316	141	10011	100.055	175	15400	124.0967
108	5886	76.72027	142	10153	100.7621	176	15576	124.8038
109	5995	77.42739	143	10296	101.4692	177	15753	125.511
110	6105	78.1345	144	10440	102.1763	178	15931	126.2181
111	6216	78.84161	145	10585	102.8834	179	16110	126.9252
112	6328	79.54873	146	10731	103.5905	180	16290	127.6323
113	6441	80.25584	147	10878	104.2977	181	16471	128.3394
114	6555	80.96295	148	11026	105.0048	182	16653	129.0465
115	6670	81.67007	149	11175	105.7119	183	16836	129.7536
116	6786	82.37718	150	11325	106.419	184	17020	130.4607
117	6903	83.08429	151	11476	107.1261	185	17205	131.1678
118	7021	83.79141	152	11628	107.8332	186	17391	131.8749
119	7140	84.49852	153	11781	108.5403	187	17578	132.5821
120	7260	85.20563	154	11935	109.2474	188	17766	133.2892
121	7381	85.91275	155	12090	109.9545	189	17955	133.9963
122	7503	86.61986	156	12246	110.6616	190	18145	134.7034
123	7626	87.32697	157	12403	111.3688	191	18336	135.4105
124	7750	88.03408	158	12561	112.0759	192	18528	136.1176
125	7875	88.7412	159	12720	112.783	193	18721	136.8247
126	8001	89.44831	160	12880	113.4901	194	18915	137.5318
127	8128	90.15542	161	13041	114.1972	195	19110	138.2389
128	8256	90.86253	162	13203	114.9043	196	19306	138.946
129	8385	91.56965	163	13366	115.6114	197	19503	139.6531
130	8515	92.27676	164	13530	116.3185	198	19701	140.3603
131	8646	92.98387	165	13695	117.0256	199	19900	141.0674
132	8778	93.69098	166	13861	117.7327	200	20100	141.7745
133	8911	94.39809	167	14028	118.4399			
134	9045	95.1052	168	14196	119.147			

附表三：n=201~300

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$
201	20301	142.4816	235	27730	166.5233	269	36315	190.5649
202	20503	143.1887	236	27966	167.2304	270	36585	191.2721
203	20706	143.8958	237	28203	167.9375	271	36856	191.9792
204	20910	144.6029	238	28441	168.6446	272	37128	192.6863
205	21115	145.31	239	28680	169.3517	273	37401	193.3934
206	21321	146.0171	240	28920	170.0588	274	37675	194.1005
207	21528	146.7242	241	29161	170.7659	275	37950	194.8076
208	21736	147.4313	242	29403	171.473	276	38226	195.5147
209	21945	148.1384	243	29646	172.1801	277	38503	196.2218
210	22155	148.8456	244	29890	172.8872	278	38781	196.9289
211	22366	149.5527	245	30135	173.5944	279	39060	197.636
212	22578	150.2598	246	30381	174.3015	280	39340	198.3431
213	22791	150.9669	247	30628	175.0086	281	39621	199.0502
214	23005	151.674	248	30876	175.7157	282	39903	199.7574
215	23220	152.3811	249	31125	176.4228	283	40186	200.4645
216	23436	153.0882	250	31375	177.1299	284	40470	201.1716
217	23653	153.7953	251	31626	177.837	285	40755	201.8787
218	23871	154.5024	252	31878	178.5441	286	41041	202.5858
219	24090	155.2095	253	32131	179.2512	287	41328	203.2929
220	24310	155.9166	254	32385	179.9583	288	41616	204
221	24531	156.6238	255	32640	180.6654	289	41905	204.7071
222	24753	157.3309	256	32896	181.3725	290	42195	205.4142
223	24976	158.038	257	33153	182.0797	291	42486	206.1213
224	25200	158.7451	258	33411	182.7868	292	42778	206.8284
225	25425	159.4522	259	33670	183.4939	293	43071	207.5355
226	25651	160.1593	260	33930	184.201	294	43365	208.2426
227	25878	160.8664	261	34191	184.9081	295	43660	208.9498
228	26106	161.5735	262	34453	185.6152	296	43956	209.6569
229	26335	162.2806	263	34716	186.3223	297	44253	210.364
230	26565	162.9877	264	34980	187.0294	298	44551	211.0711
231	26796	163.6948	265	35245	187.7365	299	44850	211.7782
232	27028	164.4019	266	35511	188.4436	300	45150	212.4853
233	27261	165.1091	267	35778	189.1507			
234	27495	165.8162	268	36046	189.8578			

附表四：n=301~400

n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$
301	45451	213.1924	335	56280	237.2341	369	68265	261.2757
302	45753	213.8995	336	56616	237.9412	370	68635	261.9828
303	46056	214.6066	337	56953	238.6483	371	69006	262.6899
304	46360	215.3137	338	57291	239.3554	372	69378	263.397
305	46665	216.0208	339	57630	240.0625	373	69751	264.1041
306	46971	216.7279	340	57970	240.7696	374	70125	264.8113
307	47278	217.435	341	58311	241.4767	375	70500	265.5184
308	47586	218.1422	342	58653	242.1838	376	70876	266.2255
309	47895	218.8493	343	58996	242.8909	377	71253	266.9326
310	48205	219.5564	344	59340	243.598	378	71631	267.6397
311	48516	220.2635	345	59685	244.3051	379	72010	268.3468
312	48828	220.9706	346	60031	245.0122	380	72390	269.0539
313	49141	221.6777	347	60378	245.7194	381	72771	269.761
314	49455	222.3848	348	60726	246.4265	382	73153	270.4681
315	49770	223.0919	349	61075	247.1336	383	73536	271.1752
316	50086	223.799	350	61425	247.8407	384	73920	271.8823
317	50403	224.5061	351	61776	248.5478	385	74305	272.5894
318	50721	225.2132	352	62128	249.2549	386	74691	273.2965
319	51040	225.9203	353	62481	249.962	387	75078	274.0036
320	51360	226.6274	354	62835	250.6691	388	75466	274.7108
321	51681	227.3346	355	63190	251.3762	389	75855	275.4179
322	52003	228.0417	356	63546	252.0833	390	76245	276.125
323	52326	228.7488	357	63903	252.7904	391	76636	276.8321
324	52650	229.4559	358	64261	253.4975	392	77028	277.5392
325	52975	230.163	359	64620	254.2046	393	77421	278.2463
326	53301	230.8701	360	64980	254.9117	394	77815	278.9534
327	53628	231.5772	361	65341	255.6189	395	78210	279.6605
328	53956	232.2843	362	65703	256.326	396	78606	280.3676
329	54285	232.9914	363	66066	257.0331	397	79003	281.0747
330	54615	233.6985	364	66430	257.7402	398	79401	281.7818
331	54946	234.4056	365	66795	258.4473	399	79800	282.4889
332	55278	235.1127	366	67161	259.1544	400	80200	283.196
333	55611	235.8198	367	67528	259.8615			
334	55945	236.527	368	67896	260.5686			

附表五：p=1~68

p	p(p+1)(p+2)	p(p+1)(p+2)/6	p(p+1)(p+2)/6 的三次方根	p	p(p+1)(p+2)	p(p+1)(p+2)/6	p(p+1)(p+2)/6 的三次方根
1	6	1	1	35	46620	7770	19.80646662
2	24	4	1.587401052	36	50616	8436	20.35692565
3	60	10	2.15443469	37	54834	9139	20.90737742
4	120	20	2.714417617	38	59280	9880	21.45782249
5	210	35	3.27106631	39	63960	10660	22.00826136
6	336	56	3.825862366	40	68880	11480	22.55869449
7	504	84	4.37951914	41	74046	12341	23.10912229
8	720	120	4.932424149	42	79464	13244	23.65954513
9	990	165	5.484806552	43	85140	14190	24.20996334
10	1320	220	6.036810737	44	91080	15180	24.76037724
11	1716	286	6.588532275	45	97290	16215	25.31078711
12	2184	364	7.140036982	46	103776	17296	25.86119321
13	2730	455	7.691371681	47	110544	18424	26.41159576
14	3360	560	8.2425706	48	117600	19600	26.961995
15	4080	680	8.793659344	49	124950	20825	27.51239111
16	4896	816	9.344657457	50	132600	22100	28.06278428
17	5814	969	9.89558011	51	140556	23426	28.61317469
18	6840	1140	10.44643927	52	148824	24804	29.16356248
19	7980	1330	10.99724449	53	157410	26235	29.71394781
20	9240	1540	11.5480035	54	166320	27720	30.2643308
21	10626	1771	12.09872263	55	175560	29260	30.81471159
22	12144	2024	12.64940709	56	185136	30856	31.36509028
23	13800	2300	13.20006122	57	195054	32509	31.91546699
24	15600	2600	13.75068867	58	205320	34220	32.46584182
25	17550	2925	14.30129253	59	215940	35990	33.01621487
26	19656	3276	14.85187542	60	226920	37820	33.56658621
27	21924	3654	15.4024396	61	238266	39711	34.11695593
28	24360	4060	15.952987	62	249984	41664	34.66732412
29	26970	4495	16.5035193	63	262080	43680	35.21769083
30	29760	4960	17.05403797	64	274560	45760	35.76805615
31	32736	5456	17.60454428	65	287430	47905	36.31842013
32	35904	5984	18.15503937	66	300696	50116	36.86878283
33	39270	6545	18.70552421	67	314364	52394	37.41914431
34	42840	7140	19.2559997	68	328440	54740	37.96950462

附表六：p=69~136

p	p(p+1)(p+2)	p(p+1)(p+2)/6	p(p+1)(p+2)/6 的三次方根	p	p(p+1)(p+2)	p(p+1)(p+2)/6	p(p+1)(p+2)/6 的三次方根
69	342930	57155	38.51986381	103	1124760	187460	57.23164174
70	357840	59640	39.07022194	104	1157520	192920	57.78197975
71	373176	62196	39.62057904	105	1190910	198485	58.33231744
72	388944	64824	40.17093516	106	1224936	204156	58.88265483
73	405150	67525	40.72129033	107	1259604	209934	59.43299191
74	421800	70300	41.27164459	108	1294920	215820	59.9833287
75	438900	73150	41.82199799	109	1330890	221815	60.53366521
76	456456	76076	42.37235055	110	1367520	227920	61.08400144
77	474474	79079	42.92270231	111	1404816	234136	61.63433741
78	492960	82160	43.47305329	112	1442784	240464	62.18467311
79	511920	85320	44.02340353	113	1481430	246905	62.73500856
80	531360	88560	44.57375305	114	1520760	253460	63.28534376
81	551286	91881	45.12410188	115	1560780	260130	63.83567872
82	571704	95284	45.67445004	116	1601496	266916	64.38601345
83	592620	98770	46.22479757	117	1642914	273819	64.93634794
84	614040	102340	46.77514447	118	1685040	280840	65.48668222
85	635970	105995	47.32549078	119	1727880	287980	66.03701627
86	658416	109736	47.87583651	120	1771440	295240	66.58735012
87	681384	113564	48.42618168	121	1815726	302621	67.13768375
88	704880	117480	48.97652631	122	1860744	310124	67.68801718
89	728910	121485	49.52687042	123	1906500	317750	68.23835042
90	753480	125580	50.07721403	124	1953000	325500	68.78868346
91	778596	129766	50.62755715	125	2000250	333375	69.33901632
92	804264	134044	51.1778998	126	2048256	341376	69.88934899
93	830490	138415	51.728242	127	2097024	349504	70.43968149
94	857280	142880	52.27858375	128	2146560	357760	70.9900138
95	884640	147440	52.82892508	129	2196870	366145	71.54034595
96	912576	152096	53.37926599	130	2247960	374660	72.09067793
97	941094	156849	53.92960649	131	2299836	383306	72.64100975
98	970200	161700	54.47994661	132	2352504	392084	73.19134141
99	999900	166650	55.03028635	133	2405970	400995	73.74167291
100	1030200	171700	55.58062572	134	2460240	410040	74.29200426
101	1061106	176851	56.13096474	135	2515320	419220	74.84233546
102	1092624	182104	56.68130341	136	2571216	428536	75.39266651