

# 嘉義市第 38 屆中小學科學展覽會 作品說明書

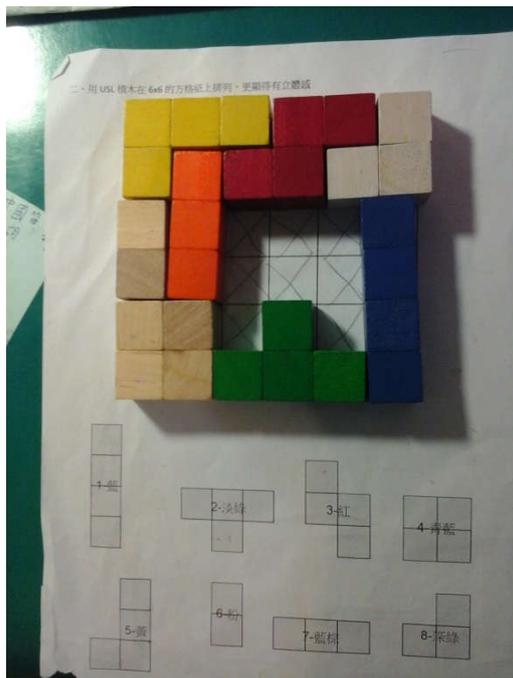
科 別：數學

組 別：國小組

作品名稱：三階索瑪立方塊的研究

關鍵詞：索瑪立方塊、多邊形拼貼、Soma Cubes

編號：



# 三階索瑪立方塊的研究

## 摘要

在這個研究中，我們先分析多方垛與  $3 \times 3 \times 3$  索瑪立方塊的基本拼貼模組架構；其次，以皮亞特·海恩(Piet Hein)發表的  $3 \times 3 \times 3$  索瑪立方塊為例子，成功探究出有 240 種排列組合個數(2x 系列有 108 種排列方式，建議初學者可從此系列著手)；最後，延伸三階索瑪立方塊的組合方法，進一步探討幻立方方的數字位置排列之可能性。

## 壹、研究動機

有次看到同學在玩七巧板遊戲，心中想除了多方垛拼貼之外，是否還有立體方塊拼貼遊戲？經過老師的介紹，有一種  $3 \times 3 \times 3$  索瑪立方塊的組合遊戲，就是用白膠將多塊  $1 \times 1$  的木頭方塊黏合後，形成了 1 個三立方體與 6 個四立方體，可以鑲嵌成  $3 \times 3 \times 3$  索瑪立方塊。但是三階索瑪立方塊有多少排列方式，引起了我們的興趣，於是開始進一步探究三階索瑪立方塊的問題。

## 貳、研究目的

- 一、分析多方垛與  $3 \times 3 \times 3$  索瑪立方塊的基本拼貼模組
- 二、探究  $3 \times 3 \times 3$  索瑪立方塊的排列組合個數
- 三、 $3 \times 3 \times 3$  索瑪立方塊的延伸~探討幻立方數字和之排列

## 參、研究設備與器材

空白紙、筆、 $3 \times 3 \times 3$  索瑪立方塊、SketchUpMake 軟體

## 肆、研究過程

### 一、分析多方垛與 3x3x3 索瑪立方塊的基本拼貼模組

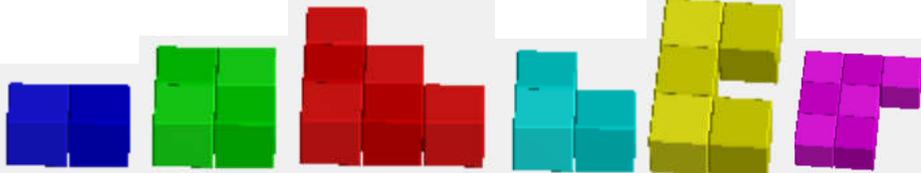
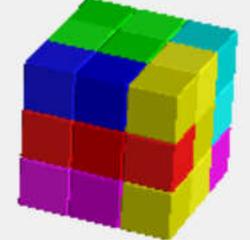
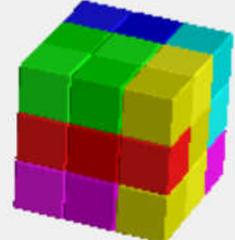
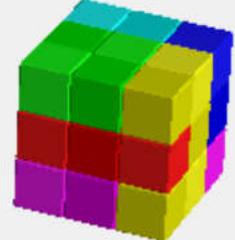
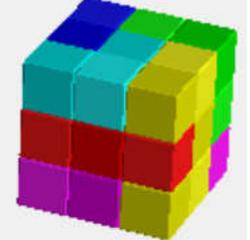
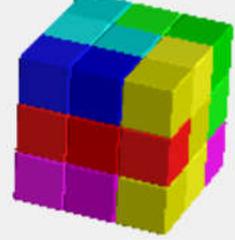
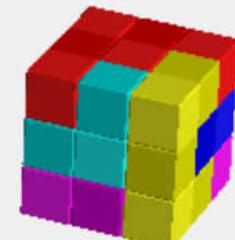
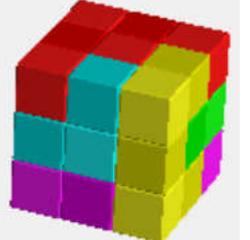
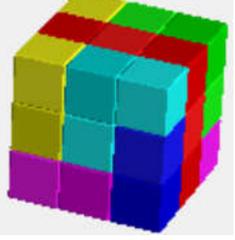
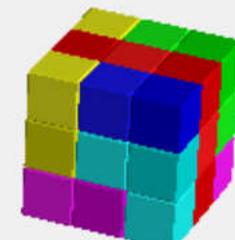
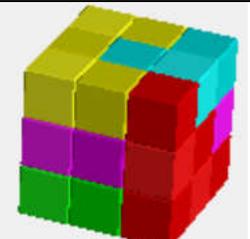
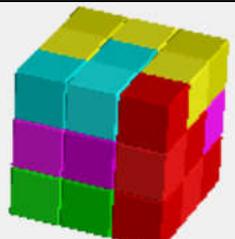
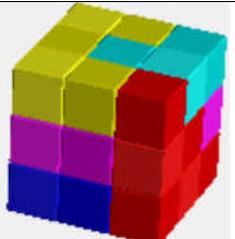
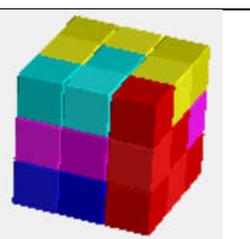
皮亞特·海恩(Piet Hein)發明的索瑪立方塊(Soma cubes)遊戲，是由 1 個三立方體及 6 個四立方體模組[ $3+(4 \times 6)=27$ ]所組合而成的 3x3x3 立方體。我們先從平面的多方垛拼貼的過程來了解方塊形狀與其之間的位置關係(附件一、6x6 多方垛拼貼遊戲)，然後接著分析還有哪些 3x3x3 索瑪立方塊的基本拼貼模組。

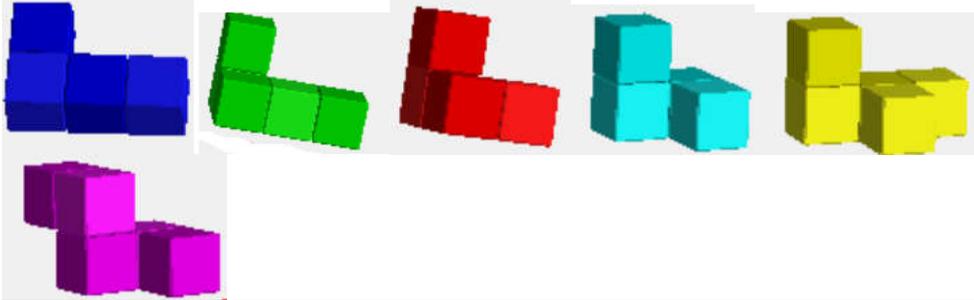
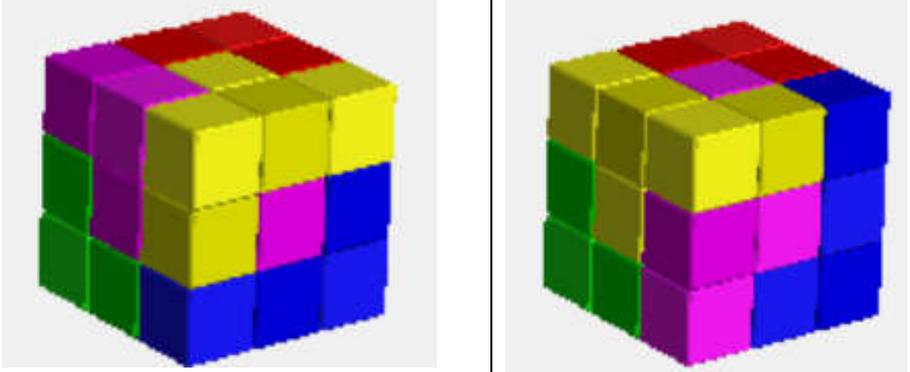
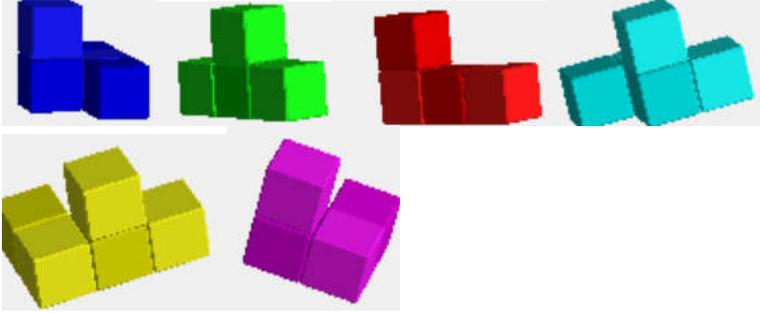
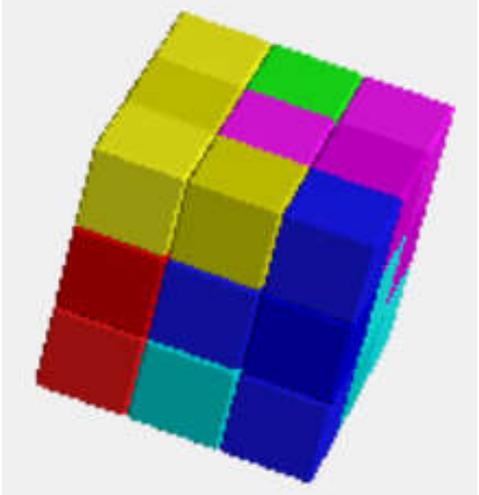
#### (一) 平面多方垛的拼貼模組

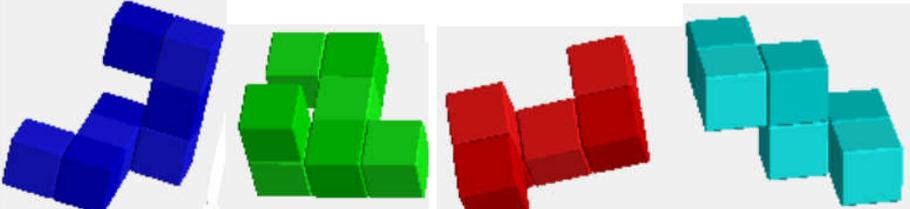
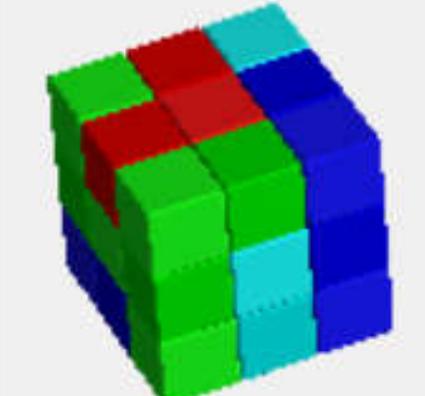
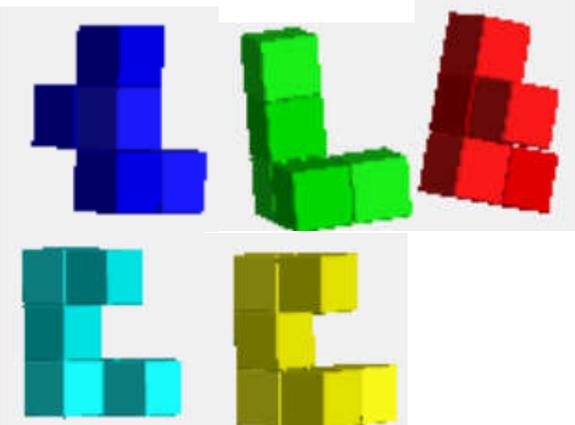
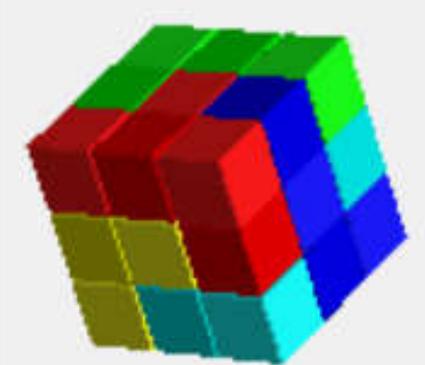
多方垛 x 個模組	拼貼面積	組合圖形
	 3x3	
	 4x7	
	 5x5	
	 6x6	

## (二) 3x3x3 索瑪立方塊的拼貼模組

國立彰化師範大學數學系梁崇惠老師提出以下 5 種 x 模組可以拼貼成 3x3x3 索瑪立方塊，我們逐一試著拚貼出可行的索瑪立方塊。

X1 模組			
y 種組合	13		
圖形			
			
			
			
			

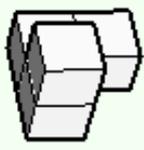
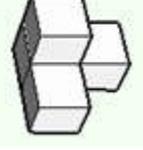
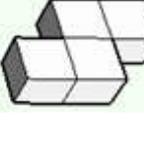
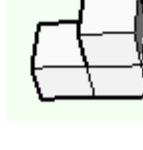
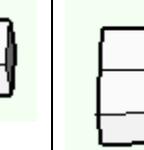
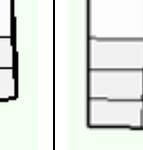
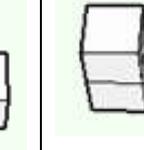
X2 模組			
y 種組合	2		
圖形			
X3 模組			
y 種組合	1		
圖形			

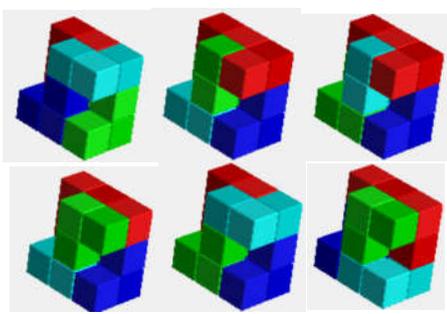
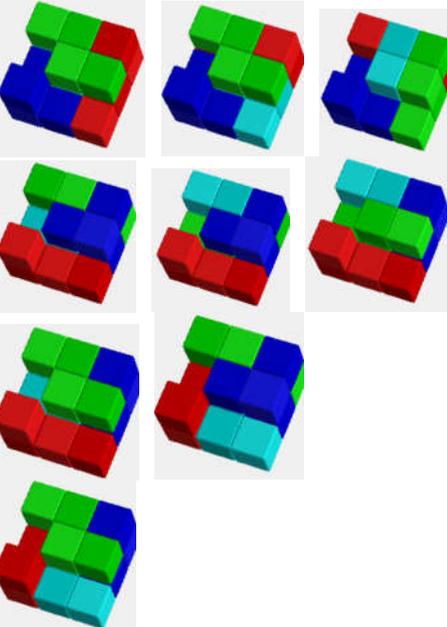
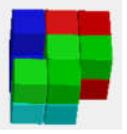
X4 模組	
y 種組合	1
圖形	
X5 模組	
y 種組合	1
圖形	

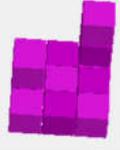
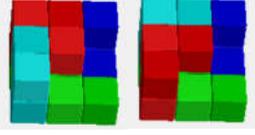
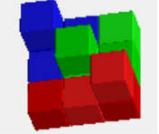
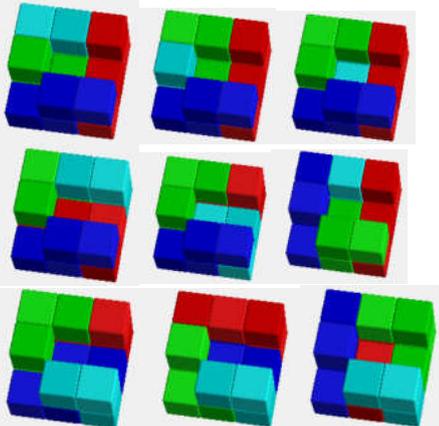
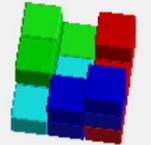
經過排列之後，我們發現可以組成 3x3x3 索瑪立方塊的數量較少，且難度較高。於是開始進一步思考皮亞特·海恩(Piet Hein)所提出的七個基本模組，是否能發現到較簡單的拼貼方法，同時有多樣的組合變化，可以讓初學者可以輕易上手。

## 二、探究 3x3x3 索瑪立方塊的排列組合個數

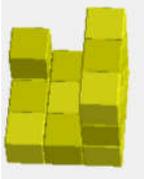
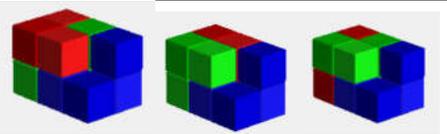
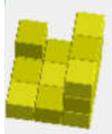
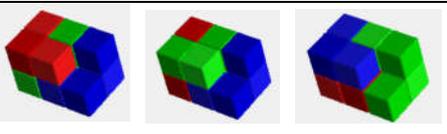
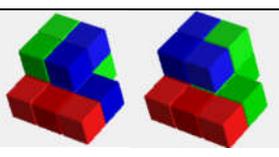
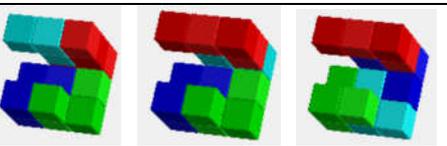
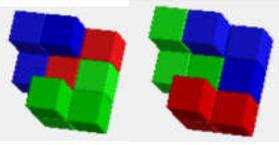
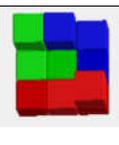
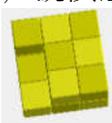
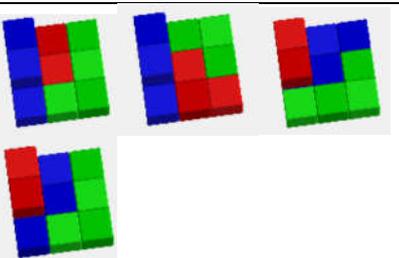
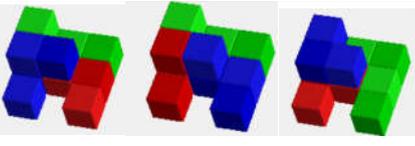
接著，我們試著挑戰用皮亞特·海恩(Piet Hein)提出的七個基本模組，拼湊出更多 3x3x3 索瑪立方塊有幾種排列組合。

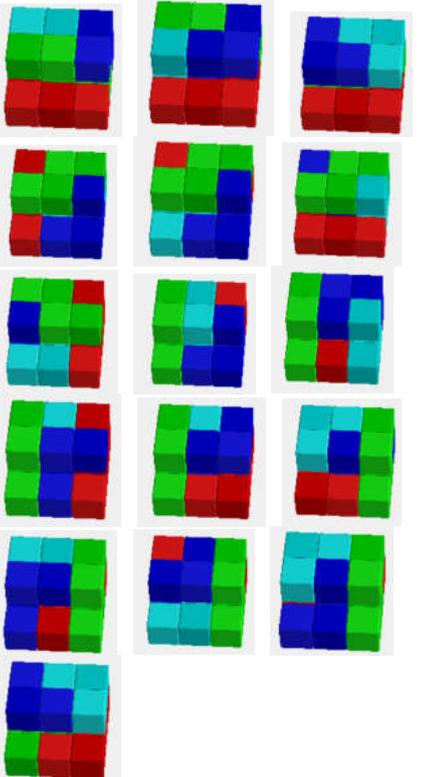
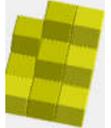
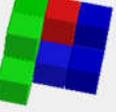
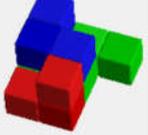
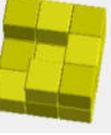
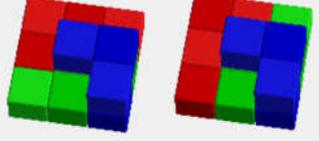
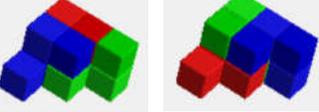
						
1 號	2 號	3 號	4 號	5 號	6 號	7 號

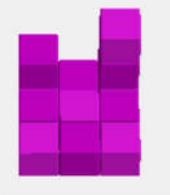
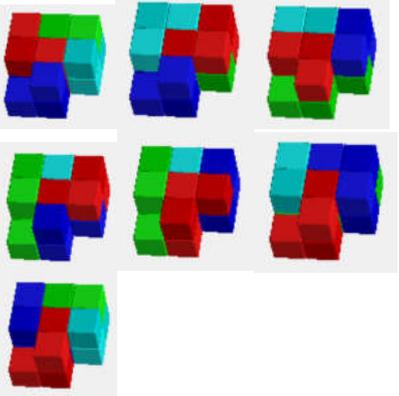
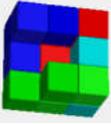
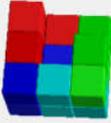
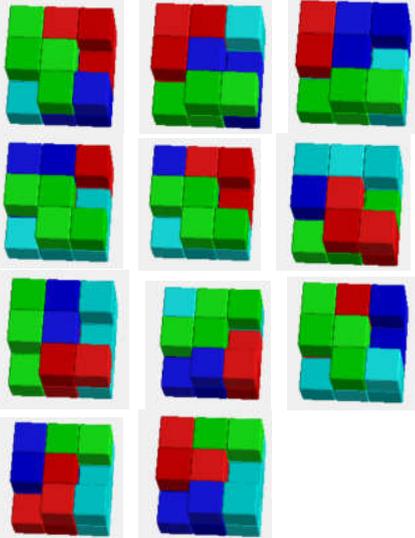
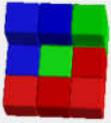
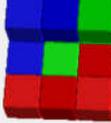
以 x 個模組為基座	上層	中層	底層	y 種組合	圖形
(一)底層 143:共 6 種 以 1,3,4 號模組 	625,655,677	225,123,673	113,143,444	6	
	766,235,225	776,133,255	116,143,444		
	666,235,225	677,133,255	117,143,444		
	773,275,225	613,113,255	666,143,444		
	226,256,556	276,153,113	773,143,444		
	226,256,553	276,153,113	776,143,444		
(二)底層 145:共 9 種 以 1,4,5 號模組 	223,273,666	255,173,673	115,145,444	9	
	226,276,776	255,133,336	115,145,444		
	227,277,666	255,133,336	115,145,444		
	666,233,227	116,335,277	155,145,444		
	666,233,337	116,225,277	155,145,444		
	666,277,227	116,335,233	155,145,444		
	666,277,337	116,225,233	155,145,444		
	776,276,226	116,335,233	155,145,444		
	776,276,336	116,225,233	155,145,444		
(三)底層 146:共 4 種 以 1,4,6 號模組 (1) 	776,275,225	336,133,255	116,146,444	1	

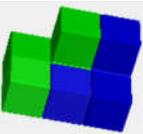
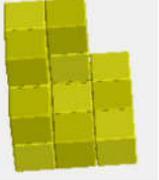
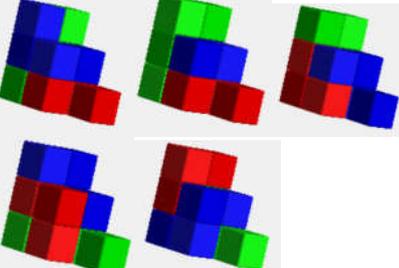
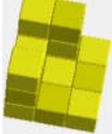
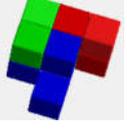
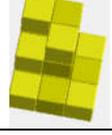
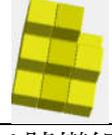
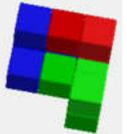
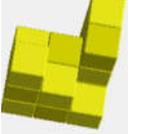
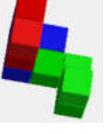
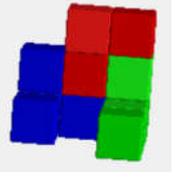
					
以 1,4,6 號模組 (2)	225,233,337	255,157,117	666,146,444	2	
	227,233,335	277,155,115	666,146,444		
以 1,4,6 號模組 (3)	226,233,335	276,155,115	776,146,444	1	
(四)底層 147:共 2 種 以 1,4,7 號模組	225,233,336	255,157,666	117,147,444	1	
以 1,3,4,7 號模組	226,256,556	233,157,116	337,147,444	1	
(五)底層 241:共 12 種 以 1,2,4 號模組(1)	336,556,756	233,511,776	221,241,444	9	
	336,576,776	233,511,556	221,241,444		
	336,666,557	233,511,577	221,241,444		
	336,756,756	233,711,556	221,241,444		
	337,533,666	277,511,556	221,241,444		
	337,577,666	233,511,556	221,241,444		
	356,356,776	255,311,376	221,241,444		
	367,365,665	277,311,355	221,241,444		
	557,533,336	277,511,666	221,241,444		
以 1,2,4 號模組(2)	736,776,556	233,511,516	223,241,444	1	

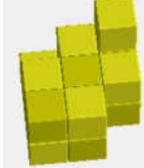
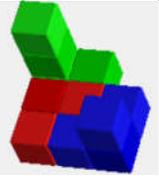
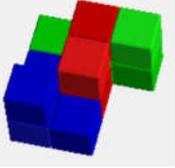
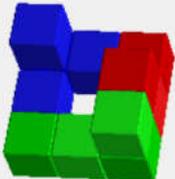
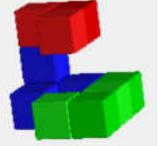
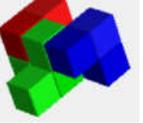
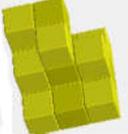
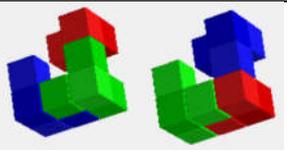
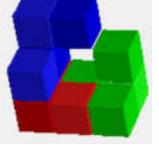


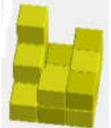
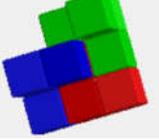
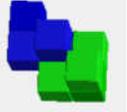
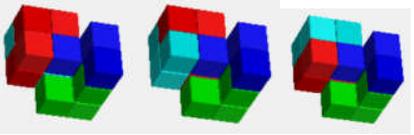
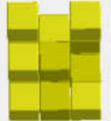
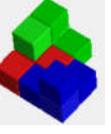
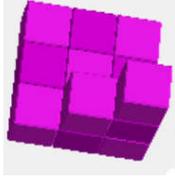
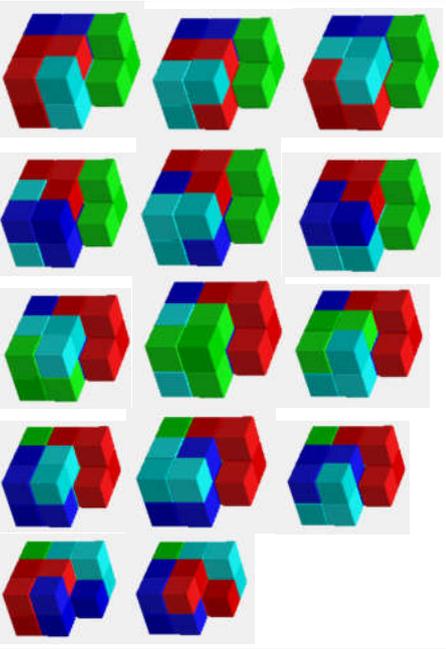
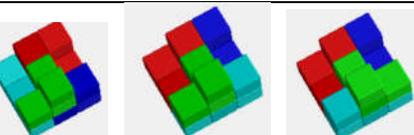
以 2,3,4,6 號模組(1) 	116,156,553	216,753,773	226,243,444	3	
	116,156,773	216,553,573	226,243,444		
	116,176,553	216,573,573	226,243,444		
以 2,3,4,6 號模組(2) 	556,116,713	256,753,713	226,243,444	3	
	556,116,773	256,153,173	226,243,444		
	556,776,713	256,153,113	226,243,444		
以 2,3,4,7 號模組 	666,611,553	277,513,513	227,243,444	2	
	666,655,153	277,113,153	227,243,444		
以 2,3,4(6)號模組 	113,175,775	613,223,255	666,243,444	3	
	115,155,773	615,223,273	666,243,444		
	155,115,773	156,223,273	666,243,444		
以 2,3,4,6 號模組 	771,571,553	611,223,253	666,243,444	2	
	773,511,551	673,223,251	666,243,444		
以 2,3,4,7 號模組(1) 	663,511,551	673,223,251	677,243,444	1	
以 2,3,4,7 號模組(2) 	666,551,511	276,223,513	773,243,444	1	
(七)底層 245:共 27 種 以 1,2,4,5 號模組 	366,336,736	211,715,755	221,245,444	4	
	366,376,776	211,315,355	221,245,444		
	377,376,666	211,315,355	221,245,444		
	666,336,733	211,715,755	221,245,444		
以 2,3,4,5 號模組 	137,177,666	233,115,655	223,245,444	3	
	731,711,666	233,715,655	223,245,444		
	736,776,166	233,115,155	223,245,444		

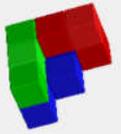
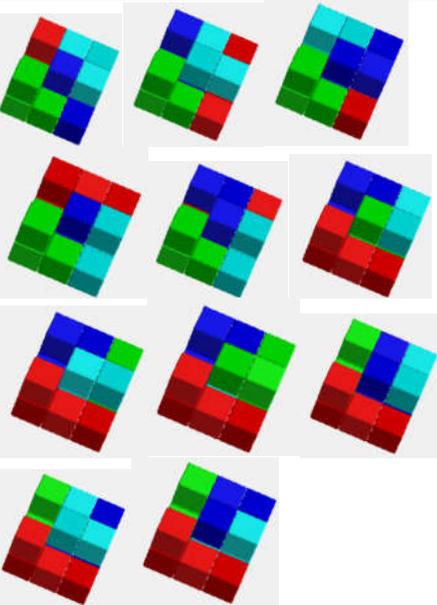
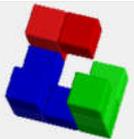
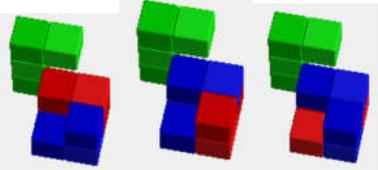
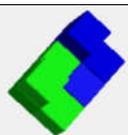
<p>以 2,4,5 號模組</p> 	<p>113,613,666 163,163,766 311,371,666 316,316,776 366,316,776 366,336,136 367,367,661 611,671,677 663,613,611 666,336,133 666,617,117 666,633,711 666,716,733 711,771,666 773,173,666 776,176,116</p>	<p>255,713,773 255,113,773 255,371,376 255,311,376 255,311,371 255,117,177 255,317,311 255,331,633 255,713,773 255,117,177 255,337,133 255,331,771 255,711,331 255,331,633 255,113,613 255,133,336</p>	<p>225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444 225,245,444</p>	<p>16</p>	
<p>以 2,4,5,6 號模組(1)</p> 	<p>366,311,771</p>	<p>256,355,371</p>	<p>226,245,444</p>	<p>1</p>	
<p>以 2,4,5,6 號模組(2)</p> 	<p>776,336,133</p>	<p>276,115,155</p>	<p>226,245,444</p>	<p>1</p>	
<p>以 2,4,5,7 號模組</p> 	<p>366,336,136 666,336,133</p>	<p>277,115,155 277,115,155</p>	<p>227,245,444 227,245,444</p>	<p>2</p>	
<p>(八)底層 246:共 11 種 以 2,3,4,6 號模組</p> 	<p>136,156,755 736,776,551</p>	<p>233,116,775 233,516,511</p>	<p>223,246,444 223,246,444</p>	<p>2</p>	

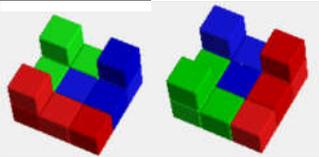
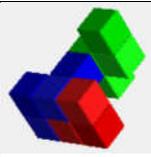
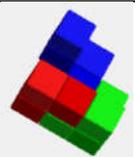
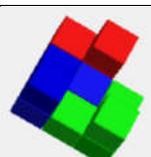
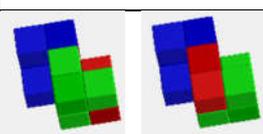
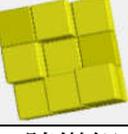
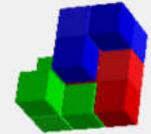
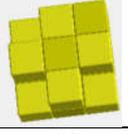
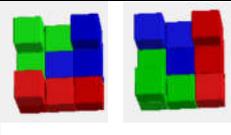
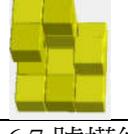
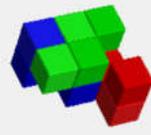
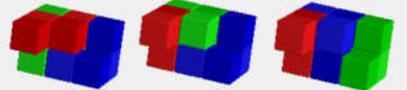
以 2,4,6 號模組(1) 	116,133,335	216,755,775	226,246,444	7	
	116,157,337	216,557,533	226,246,444		
	316,311,775	216,355,375	226,246,444		
	336,533,711	256,551,771	226,246,444		
	356,311,771	256,355,371	226,246,444		
	556,117,337	256,157,133	226,246,444		
	556,331,733	256,751,711	226,246,444		
以 2,4,6 號模組(2) 	337,157,155	233,227,115	666,246,444	1	
以 2,4,6 號模組(3) 	511,517,337	551,227,233	666,246,444	1	
(九)底層 247:共 15 種 以 2,4,7 號模組 	115,155,666	215,337,633	227,247,444	11	
116,156,336	216,557,533	227,247,444			
331,511,666	233,517,556	227,247,444			
335,133,116	255,157,666	227,247,444			
336,666,551	233,517,511	227,247,444			
356,356,116	255,317,316	227,247,444			
556,116,336	256,157,133	227,247,444			
611,615,665	231,337,355	227,247,444			
666,156,155	233,337,115	227,247,444			
666,511,551	236,337,351	227,247,444			
666,615,115	233,337,155	227,247,444			
以 2 3,4,7 號模組(1) 	666,156,155	233,227,115	337,247,444	1	
以 2 3,4,7 號模組(2) 	666,511,551	633,227,251	337,247,444	1	
以 2 3,4,7 號模組(3) 	666,615,115	233,227,155	337,247,444	1	

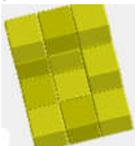
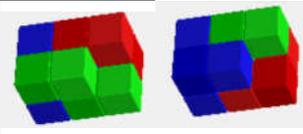
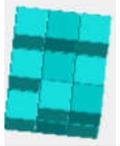
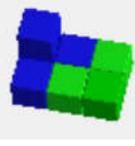
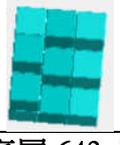
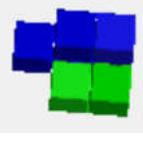
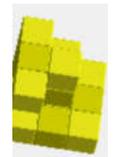
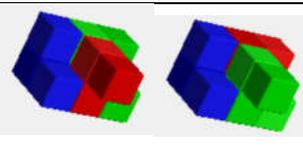
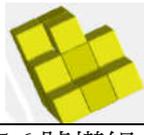
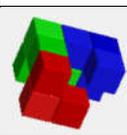
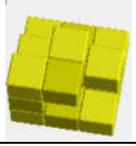
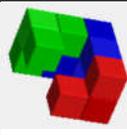
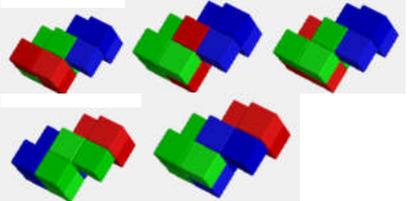
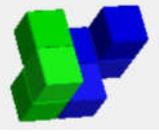
以 2,3,4,6,7 號模組 	663,511,551	633,227,251	637,247,444	1	
(十)底層 341:共 10 種 以 1,3,4 號模組 	225,255,666	215,377,376	311,341,444	1	
以 1,2,3,4 號模組 	226,255,775	216,356,376	311,341,444	5	
	226,256,556	216,357,377	311,341,444		
	226,256,776	215,355,376	311,341,444		
	227,256,666	217,357,355	311,341,444		
	225,255,666	275,311,316	377,341,444		
以 1,3,4,6 號模組(1) 	667,225,325	617,327,355	611,341,444	1	
以 1,3,4,6 號模組(2) 	667,235,225	617,337,255	611,341,444	1	
以 1,3,4,6 號模組(3) 	365,255,227	365,311,277	661,341,444	1	
以 1,3,4,6 號模組(4) 	226,256,355	276,311,315	776,341,444	1	
(十一)底層 345:共 12 種 以 1,3,4,5 號模組(1) 	226,276,377	216,315,355	116,345,444	1	

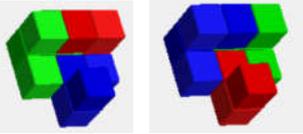
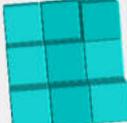
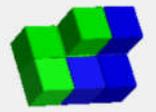
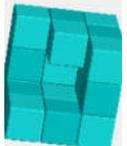
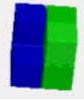
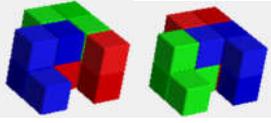
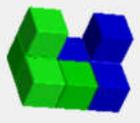
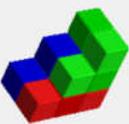
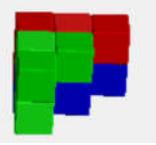
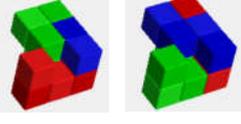
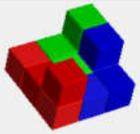
以 1,3,4,5 號模組 (2) 	366,277,227	316,315,255	116,345,444	1	
以 1,3,4,5 號模組 (3) 	221,271,666	211,375,376	355,345,444	1	
以 1,3,4,5 號模組 (4) 	226,216,776	211,315,376	355,345,444	1	
以 1,3,4,5 號模組 (5) 	227,211,666	277,315,316	355,345,444	1	
以 1,3,4,5 號模組 (6) 	226,211,771	256,355,371	366,345,444	1	
@以 3,4,5,6 號模組(1) 	661,221,327	611,325,377	655,345,444	1	
以 3,4,5,6 號模組(2) 	661,231,227	611,335,277	655,345,444	2	
	611,221,327	655,321,377	665,345,444		
以 3,4,5,6 號模組(3) 	611,231,227	655,331,277	665,345,444	1	

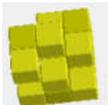
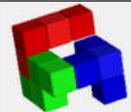
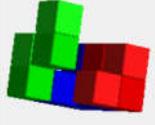
以 3,4,5,6 號模組(4) 	311,277,227	316,315,255	666,345,444	1	
以 3,4,5,6,7 號模組 	226,216,311	276,315,355	776,345,444	1	
(十二)底層 346:共 19 種 以 3,4,6(1)號模組 	226,255,357	216,317,357	116,346,444	3	
	226,255,377	216,315,375	116,346,444		
	226,277,357	216,315,355	116,346,444		
@以 1,3,4,6 號模組 	356,255,227	316,315,277	116,346,444	1	
以 1,3,4,6 號模組 	226,275,775	216,311,355	316,346,444	1	
以 3,4,6(6)號模組 	221,251,355	211,377,375	666,346,444	14	
	221,251,357	211,355,377	666,346,444		
	221,271,375	211,355,375	666,346,444		
	225,211,317	255,351,377	666,346,444		
	225,217,317	255,357,311	666,346,444		
	225,271,377	255,351,311	666,346,444		
	311,215,225	371,377,255	666,346,444		
	317,215,225	377,311,255	666,346,444		
	357,255,221	377,315,211	666,346,444		
	357,257,221	355,317,211	666,346,444		
	371,275,225	371,311,255	666,346,444		
	377,275,221	355,315,211	666,346,444		
	316,215,225	376,311,255	776,346,444		
	356,255,221	376,315,211	776,346,444		
(十三)底層 347:共 3 種 以 3,4,7 號模組 	611,615,665	221,327,355	327,347,444	3	
	666,511,551	226,327,351	327,347,444		
	365,255,221	365,317,211	667,347,444		

(十四)底層 541:共 2 種 以 1,4,5 號模組 	223,233,736	216,556,776	511,541,444	1	
@以 1,2,4,5 號模組 	227,233,336	217,557,666	511,541,444	1	
(十五)底層 543:共 19 種 以 3,4,5 號模組 	116,226,726	156,123,773	553,543,444	11	
	116,276,226	156,173,273	553,543,444		
	116,776,726	156,123,223	553,543,444		
	226,216,116	256,773,173	553,543,444		
	226,216,716	256,113,773	553,543,444		
	226,276,176	256,113,173	553,543,444		
	116,226,723	156,123,773	556,543,444		
	116,236,227	156,133,277	556,543,444		
	116,276,223	156,173,273	556,543,444		
	116,776,723	156,123,223	556,543,444		
	226,216,113	256,773,173	556,543,444		
以 1,3,4,5 號模組 	226,216,713	256,113,773	556,543,444	1	
以 2,3,4,5 號模組 	226,276,173	256,113,173	556,543,444	3	
	766,211,223	756,713,213	556,543,444		
	771,271,223	611,553,253	666,543,444		
以 3,4,5,6 號模組 	773,211,221	673,553,251	666,543,444	1	
以 3,4,5,6,7 號模組 	663,211,221	673,553,251	677,543,444	1	

以 3,4,5,7 號模組 	226,216,116	276,553,153	773,543,444	2	
	226,216,113	276,553,153	776,543,444		
(十六)底層 546:共 7 種 以 2,4,5,6 號模組 	223,216,117	233,556,177	536,546,444	1	
@以 3,4,5,6 號模組 	311,216,227	331,556,277	536,546,444	1	
以 3,4,5,6 號模組 	226,217,117	256,337,133	556,546,444	1	
以 4,5,6,7 號模組 	226,233,711	256,331,771	556,546,444	2	
	336,233,711	256,221,771	556,546,444		
以 4,5,6,7 號模組 	331,233,227	551,511,277	666,546,444	1	
以 4,5,6,7 號模組 	337,233,221	557,517,211	666,546,444	1	
(十七)底層 547:共 6 種 以 3,4,5,7 號模組 	226,216,116	233,557,156	337,547,444	2	
	666,211,221	633,557,251	337,547,444		
@以 2,4,5,7 號模組 	226,216,116	256,337,133	557,547,444	1	
@以 4,5,6,7 號模組 	666,211,221	356,337,231	557,547,444	3	
	666,311,321	356,327,221	557,547,444		
	663,211,221	633,557,251	637,547,444		

(十八)底層 641:共 4 種 以 1,4,5,6 號模組 	655,233,227	615,335,277	611,641,444	2	
	655,233,337	615,225,277	611,641,444		
以 1,3,4,5,6 號模組 	655,277,227	615,335,233	611,641,444	1	
以 1,2,4,5,6 號模組 	655,277,337	615,225,233	611,641,444	1	
(十九)底層 643:共 18 種 以 1,3,4,6 號模組 	113,215,225	773,713,255	666,643,444	1	
以 1,3,4,6 號模組 	113,255,227	153,153,277	666,643,444	2	
	113,275,225	173,173,255	666,643,444		
以 1,3,4,6 號模組 	117,235,225	177,133,255	666,643,444	1	
以 3,4,5,6 號模組 	221,231,557	211,533,577	666,643,444	1	
以 2,3,4,6 號模組 	221,251,553	211,753,773	666,643,444	5	
	221,251,773	211,553,573	666,643,444		
	221,271,553	211,573,573	666,643,444		
	223,215,115	273,773,155	666,643,444		
	227,211,553	277,513,513	666,643,444		
以 1,2,3,4,6 號模組 	227,255,153	277,113,153	666,643,444	1	

以 3,4,5,6(5)號模組 	513,211,227	513,553,277	666,643,444	2	
	551,251,223	511,773,273	666,643,444		
以 2,3,4,6,7 號模組 	551,251,773	511,223,273	666,643,444	1	
以 1,3,4,5,6 號模組 	551,751,723	511,723,223	666,643,444	1	
以 3,4,6,7 號模組 	723,715,115	223,723,155	666,643,444	2	
	773,215,115	273,223,155	666,643,444		
以 1,3,4,6,7 號模組 	773,215,225	173,113,255	666,643,444	1	
(二十)底層 741:共 4 種 以 1,2,4,7 號模組 	223,233,536	216,756,556	711,741,444	1	
@以 1,2,4,7 號模組(1) 	225,255,666	215,733,336	711,741,444	1	
以 1,2,4,7 號模組(2) 	556,256,226	513,733,236	711,741,444	2	
	666,253,223	613,753,255	711,741,444		
(二十一)底層 743:共 1 種 以 2,3,4,7 號模組 	666,551,511	226,723,513	723,743,444	1	

(二十二)底層 745:共 3 種 以 1,4,5,7 號模組(1)		116,216,226	336,715,255	733,745,444	1	
以 1,4,5,7 號模組(2)		336,233,221	666,715,211	755,745,444	1	
以 1,4,5,7 號模組(3)		136,233,223	116,715,255	766,745,444	1	
(二十三)底層 746:共 3 種 以 1,4,6,7 號模組(1)		316,215,225	336,711,255	736,746,444	1	
以 1,4,6,7 號模組(2)		356,255,221	336,715,211	736,746,444	1	
以 1,4,6,7 號模組(3)		553,256,221	533,716,211	736,746,444	1	

以索瑪立方體的底層第二列編號為排列組合分類依據之數量一覽表

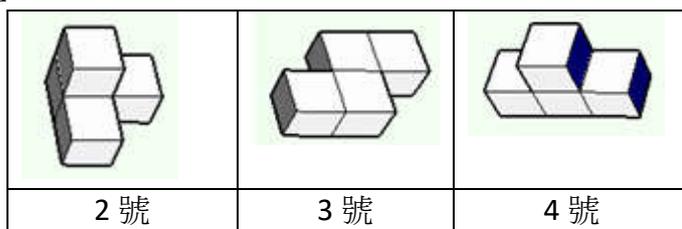
底層第二列(1x 系列)	數量	底層第二列(2x 系列)	數量	底層第二列(3x 系列)	數量
(一)底層 143	6	(五)底層 241	12	(十)底層 341	10
(二)底層 145	9	(六)底層 243	43	(十一)底層 345	12
(三)底層 146	4	(七)底層 245	27	(十二)底層 346	19
(四)底層 147	2	(八)底層 246	11	(十三)底層 347	3
		(九)底層 247	15		
小計	21		108		44

底層第二列(5x 系列)	數量	底層第二列(6x 系列)	數量	底層第二列(7x 系列)	數量
(十四)底層 541	2	(十八)底層 641	4	(二十)底層 741	4
(十五)底層 543	19	(十九)底層 643	18	(二十一)底層 743	1
(十六)底層 546	7			(二十二)底層 745	3
(十七)底層 547	6			(二十三)底層 746	3
小計	34		22		11

皮亞特·海恩(Piet Hein)提出 3x3x3 索瑪立方塊由七個基本模組組成，我們成功拼湊出有 240 種排列組合。

- (1)底層 1x 系列有 21 種排列方式；
- (2)底層 2x 系列有 108 種排列方式；
- (3)底層 3x 系列有 44 種排列方式；
- (4)底層 4x 系列有 34 種排列方式；
- (5)底層 5x 系列有 22 種排列方式；
- (6)底層 6x 系列有 11 種排列方式；
- (7)底層 7x 系列有 11 種排列方式。

7x 系列難度較高，只有 11 種排列方式；2x 系列有 108 種排列方式，建議初學者可以先從此系列著手。例如：底層 243(是 2x 系列之中最多的，有 43 種排列組合方法)，就是先將 2、4、3 方塊模組平舖在底層，然後依序將其他的方塊鑲嵌在中層與上層的位置上。



其他還有底層 245(27 種)、247(15 種)、346(19 種)、543(19 種)、643(18 種)等排列方式，也可提高組合 3x3x3 索瑪立方塊的成功機率。

### 三、3x3x3 索瑪立方塊的延伸~探討幻立方數字和之排列

#### (一) 三階幻方和說明:

三階幻立方的行、列、高、大對角線的數字和皆為 42。

$$\text{公式為 } \frac{n(n^m + 1)}{2} = 3 * \frac{3 * 3 * 3 + 1}{2} = 3 * 14 = 42$$

將  $n * n * n$  個數字填入  $n$  階堆疊的方陣中，

假使  $n$  方陣內上下、左右、對角線的數字和為幻方和，

那麼，此立方陣為  $n$  階幻立方。

上層	中層	底層
27	5	10
11	25	6
4	12	26
13	21	8
9	14	19
20	7	15
2	16	24
22	3	17
18	23	1

#### (1) 上層

每一行的數字和:  $27+13+2=11+9+22=4+20+18=42$

每一列的數字和:  $27+11+4=13+9+20=2+22+18=42$

#### (2) 中層的每一列的數字和為 42

每一行的數字和:  $5+21+16=25+14+3=12+7+23=42$

每一列的數字和:  $5+25+12=21+14+7=16+3+23=42$

#### (3) 底層的每一列的數字和為 42

每一行的數字和:  $10+8+24=6+19+17=26+15+1=42$

每一列的數字和:  $10+6+26=8+19+15=24+17+1=42$

#### (4) 每一層"高"的數字和為 42

第一行的數字和:  $27+5+10=13+21+8=2+11+24=42$

第二行的數字和:  $11+25+6=9+14+19=22+3+17=42$

第三行的數字和:  $4+12+26=20+7+15=18+23+1=42$

#### (5) 大對角線的數字和為 42

$27+14+1=4+14+24=2+14+26=18+14+10=42$

#### (6) 三階換列線段有(條):

$6(\text{每一層的行、列}) * 3 + 3(\text{每一層的高}) * 3 + 4(\text{大對角線})$

$$= 9 * 3 + 4$$

$$= 3 * 3 * 3 + 4 = 31$$

$$= m * m * m + 4$$

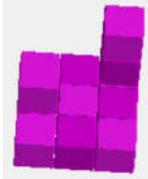
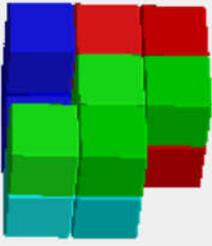
## (二) 3x3x3 索瑪立方塊的數字排列

幻立方數字的排列原則是先計算上層、中層與底層的第二列數字和，然後逐漸推出第一列和第三列的數字和，依序排列其他行與列的數字和，就是幻方和。

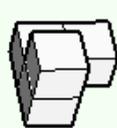
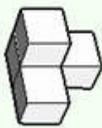
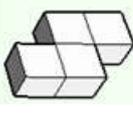
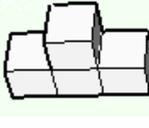
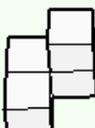
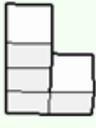
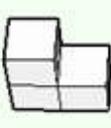
因此，我們採用了幻方和的計算概念，用來拼湊出 3x3x3 索瑪立方塊的排列組合，也就是說，先取 3x3x3 索瑪立方塊的底層的第二列數字，作為推演分類依據。

我們歸納出 1x~7x 系列的索瑪立方塊的分類方式，並計算出 3x3x3 索瑪立方塊有 240 種排列組合。

以「底層 146~1,4,6 號模組 (1)」為例子，來說明「索瑪立方塊」與「幻立方」數字之間的對應關係。索瑪立方塊上層為 776,275,225；中層為 336,133,255；底層為 116,146,444，找出對應的幻立方數字。

<p>底層 146: 以 1,4,6 號模組 (1)</p> 	776,275,225	336,133,255	116,146,444	
---	-------------	-------------	-------------	--

3x3x3 索瑪立方編號與幻立方數字之對應數字

							
索瑪編號 (1~7)	1 號	2 號	3 號	4 號	5 號	6 號	7 號
幻立方數字 (1~27)	6,8,10,21	2,13,16,22	5,7,14,25	1,17,19,24	3,18,20,23	4,12,15,26	9,11,27

說明: 以索瑪立方”編號 4” 為例子，就包含了 1,17,19,24 四個幻立方數字



上層			中層			底層		
27	11	4	5	25	12	10	6	26
13	9	20	21	14	7	8	19	15
2	22	18	16	3	23	24	17	1

### (三) 三階幻立方的數字和驗算:

計算三階幻立方每一層的數字平均值

$$\begin{aligned} & (1+27) * 27 / 2 \text{ (三層數字總和)} * 1/9 \text{ (三層共有 9 列)} * 1/3 \text{ (每一列有三個數值)} \\ & = 28 * 27 * 1/2 * 1/9 * 1/3 \\ & = 28 * 1/2 = 14 \end{aligned}$$

數值 14 放在中層第二數列的中心位置，對應索瑪立方塊上的” 編號 3”。

幻立方的數字			索瑪立方塊上的編號		
42			42		
27	11	4	7	7	6
13	9	20	2	7	5
2	22	18	2	2	5
42	42	42			
					上層
5	25	12	3	3	6
21	14	7	1	3	3
16	3	23	2	5	5
42	42	42			
					中層
10	6	26	1	1	6
8	19	15	1	4	6
24	17	1	4	4	4
42	42	42			
					底層

每一層幻方內其中一個數字相加，成為幻立方"高"的數字和，例如:

27+5+10=42	11+25+6=42	4+12+26=42
13+21+8=42	9+14+19=42	20+7+15=42
2+16+24=42	22+3+17=42	18+23+1=42

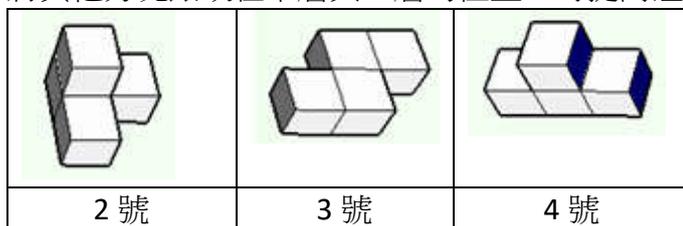
## 伍、研究結論

### 一、分析多方垛與 3x3x3 索瑪立方塊的基本拼貼模組

我們先探討平面多方垛的拼貼模組，可以作為研究 3x3x3 索瑪立方塊的基礎；隨後，試著以梁崇惠老師提出 5 種 x 模組來拚貼出 3x3x3 索瑪立方塊。然而組合數量較少，且難度較高。於是開始進一步思考皮亞特·海恩(Piet Hein)所提出的七個基本模組，希望能發現較簡單且有趣的拼貼組合變化。

### 二、探究 3x3x3 索瑪立方塊的排列組合個數

皮亞特·海恩(Piet Hein)提出 3x3x3 索瑪立方塊由七個基本模組來組成，我們拼出有 240 種排列組合。建議初學者可以先從 2x 系列(有 108 種排列方式)著手，例如：底層 243(是 2x 系列之中最多的，有 43 種排列組合方法)，先將 2、3、4 方塊模組平鋪在底層，然後依序將其他方塊鑲嵌在中層與上層的位置，可提高組合 3x3x3 索瑪立方塊的成功機率。



其他還有底層 245(27 種)、247(15 種)、346(19 種)、543(19 種)、643(18 種)等排列方式，也可提高組合 3x3x3 索瑪立方塊的成功機會。

### 三、3x3x3 索瑪立方塊的延伸~探討幻立方數字和之排列

我們以 3x3x3 索瑪立方塊底層的第二列數字為組合基座，採用了幻方和的計算概念，也就是說，作為推演幻立方數字的分類依據，成功拼湊出幻立方的對應數字。

索瑪編號與幻立方數字之對應數字

索瑪編號	1	2	3	4	5	6	7
幻立方數字	6,8,10,21	2,13,16,22	5,7,14,25	1,17,19,24	3,18,20,23	4,12,15,26	9,11,27

幻立方的數字

27	11	4
13	9	20
2	22	18

索瑪立方塊上的編號

7	7	6
2	7	5
2	2	5

上層

5	25	12
21	14	7
16	3	23

3	3	6
1	3	3
2	5	5

中層

10	6	26
8	19	15
24	17	1

1	1	6
1	4	6
4	4	4

底層

#### 四、索瑪方塊模組的生活應用

模組化程式設計理念盛行於科技產品，舉凡：智慧型手機允許使用者依照需求來下載 Apps 應用程式來擴增生活應用的電腦元件或軟體(如：火車時刻表查詢)，增加了生活便利。

本研究歸納了以底層 2、3、4 為模組基座，搭配其他方塊模組可以提高組合成 3x3x3 立方體的機會，呈現了未來居家收納箱、禮盒設計或倉儲管理的新概念與產品設計雛形，將來可以進軍創新發明展。

##### (一)居家/倉儲空間管理:

凌亂的索瑪方塊占了很多空間，但經由組合後可以變成三階立方體，不僅節省空間且能方便收納取用。不規則料件或商品外型堆疊，增加了管理困擾與人力搬運時間；且因應房價高漲，必須以高智慧來規劃居家或倉庫收納模組，將空間最佳化運用。建議可先以索瑪方塊為基模，試著透過電腦模擬，計算倉儲空間面積，來拼貼組合不同模組，方便工程鋼筋備料、汽車料件等倉儲架上物品管理，或居家活動櫥櫃裝潢訂做，節省空間與降低營運成本，提高了營運績效能與造型空間美感。

##### (二)多用途工具箱設計:

現今工具箱多為單層堆疊，索瑪方塊則提供了 L 形模組可以跨越第一、二、三層，成為真正 3D 空間的收納工具箱，可以放置鍊條、L 形鋸刀或螺絲小物件，即使 90 度角的工具，也能輕易放置於工具箱。因此，索瑪方塊提供未來多用途收納箱的設計點子。

##### (三)彌月/結婚禮盒設計:

將寶寶或佳偶的紀念照片多面化，在模組外黏貼片，經由翻轉組合，可以拼組成為完整照片；且 L 或 T 形模組可以收放抓周玩具、結婚紀念鑽戒、等不規則形狀的禮品，藉由卡榫設計來連接模組，成為獨特的三階層禮盒，打造了個性化商品，兼具了索瑪方塊數學遊戲與人生紀念的雙重價值。

#### 陸、參考資料

「索瑪」頻道—索瑪立方塊的研究與探討，第 55 屆全國中小學科展作品。

凡異出版社（2002）。數學遊戲。新竹：作者。

中華生活數學推廣學會(大柱子的生活數學) <http://www.math.org.tw/>

沈康身（2011）。歷史數學名題。新北市：稻田出版社。

神奇的索馬立方塊

<http://www.jkes.tyc.edu.tw/dyna/data/user/ta060275/201006171644070.doc>

索馬立方-維基百科 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/索馬立方>

索瑪立方塊-九章數學出版社

<http://www.chiuchang.com.tw/toy/somacube.html>

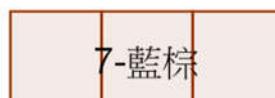
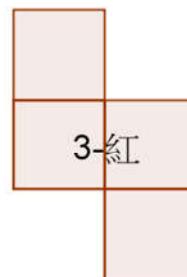
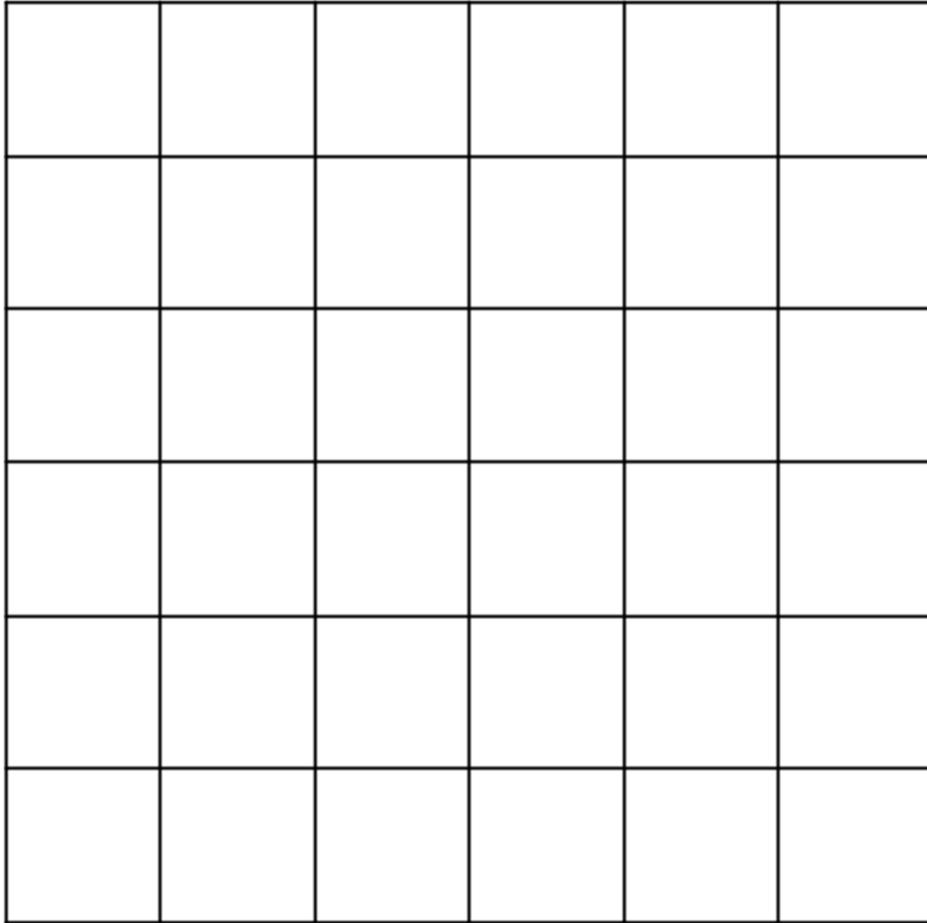
索瑪立方體 <http://web.thu.edu.tw/linch/www/soma.pdf>

趙文敏（2003）。寓數學於遊戲（第一輯）。臺北：九章出版社。

趙文敏（2004）。寓數學於遊戲（第二輯）。臺北：九章出版社。

### 附件一、6x6 多方塊拼貼遊戲

一、將方塊模組放在 6x6 的方格紙上排列，更顯得有立體感(斜線區域不可放置方塊)



二、多方垛題目

