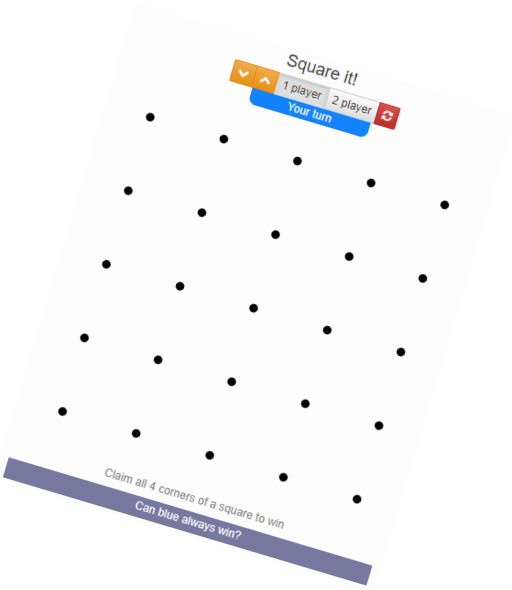
嘉義市第38屆中小學科學展覽會
作品說明書



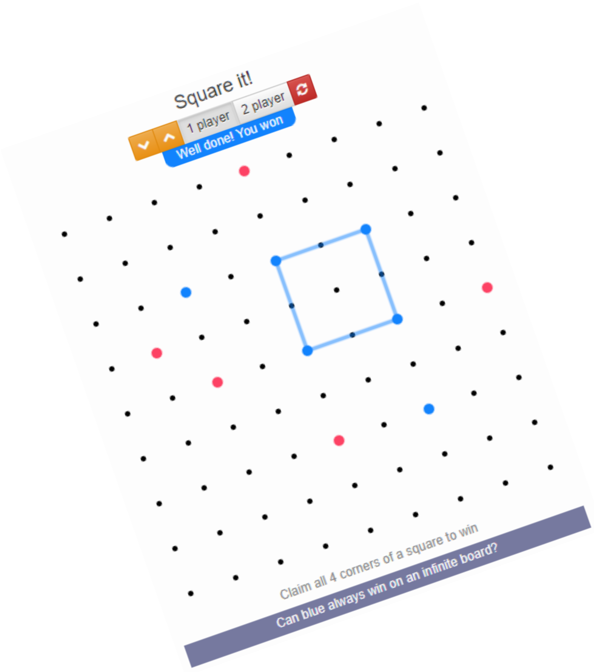
科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：點點三缺一之連方我最行

關 鍵 詞：正方形、方格棋盤、遊戲策略（最多三個）

編　　號：



點點三缺一之連方我最行

摘要

n × n 的平面方格點區域內可畫出不同面積大小的正方形個數為$\frac{n\times(n+1)^2(n+2)}{12}$。n × n 的平面方格點區域內左方各點，可供連成正置正方形的個數$=3(x-1)+(n+1-x)$，右方各點，可供連成正置正方形的個數$=3(n+1-x)+(x-1)$。 n × n 的平面方格點區域內優先連成正方形的策略是找樣式取勝，先手若能在棋盤中心開始以 T 字形的樣式來下子，則雙方在五步內即可分出勝負，先手必勝；若以 N 字形的樣式來發展棋局，則雙方可在六步內分勝負，先手可勝。

壹、 研究動機

某次在網路上搜尋時，瀏覽到「昌爸工作坊」裡的遊戲介紹，看到一個簡單好玩的線上小遊戲，它的規則是雙方在 n × n 的平面方格點區域內輪流下子，先連成正方形者獲勝。首先想到的問題是，這個遊戲有沒有必勝策略？遊戲規則是對於先手有利，或者是對後手有利？想藉此進一步了解遊戲策略以及它的數學規律性。

貳、 研究目的

一、　分析 n × n 的平面方格點區域內可畫出不同面積大小的正方形個數。
二、　分析 n × n 的平面方格點區域內各點可供連成正方形的個數。
三、　分析 n × n 的平面方格點區域內優先連成正方形的策略。

參、 研究設備及器材

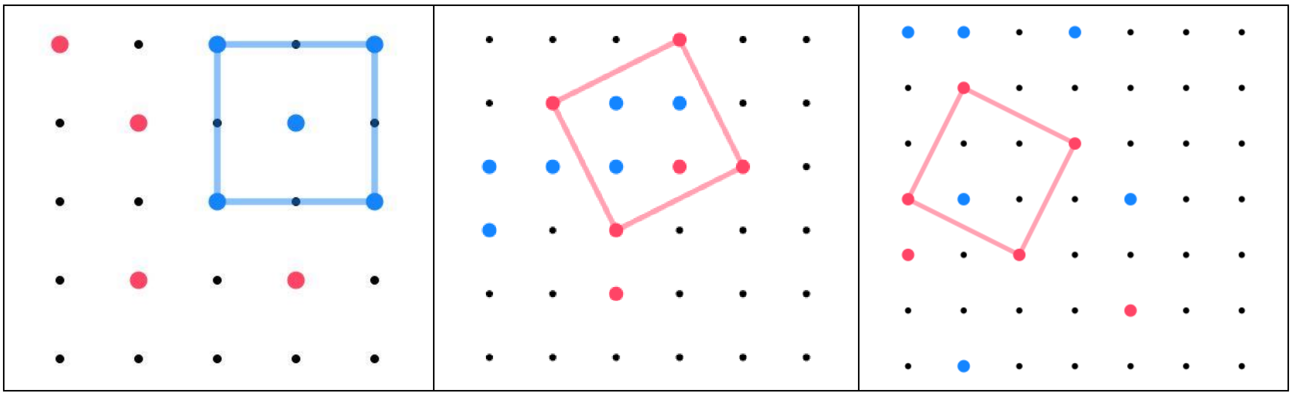
紙、筆、電腦、Geogebra、Scratch

肆、 研究過程或方法

一、　遊戲規則：

在 n × n 的平面方格點區域內有（n+1）^{2} 個點，每一行跟每一列的點都是等距的，遊戲雙方利用這些點的位置輪流下子，先連線成正方形者獲勝，如下圖所示。

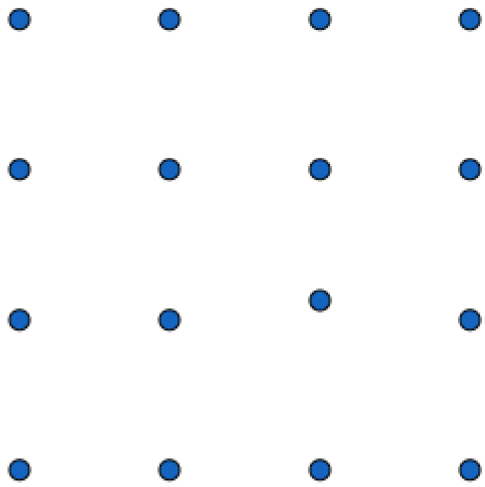
4 × 4	5 × 5	6 × 6



二、　　名詞釋義：

(一) n × n 平面方格點區域

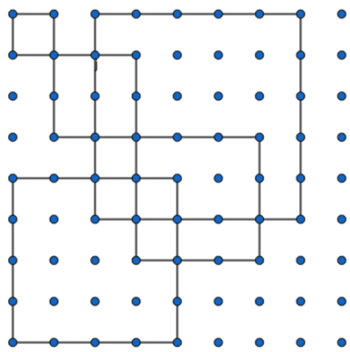
指邊長為 n 單位（n 為正整數）的正方形，在每條邊上會有（n + 1）個點，正方形區域內共有（n + 1）^{2} 個點。例如：下圖為 3 × 3 平面方格點區域，每條邊上有 4 個點，正方形區域內共有 16 個點。



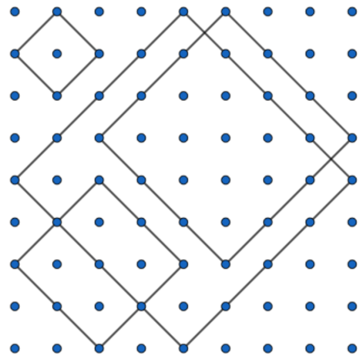
(二) 正方形面積分類：(以 8 × 8 方格為例)

根據擺放角度的不同，可將正方形分為三類

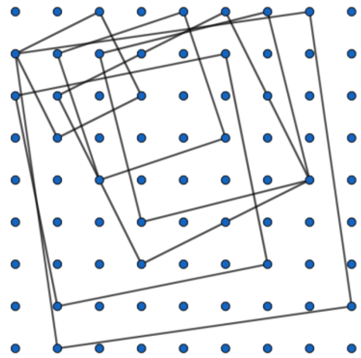
1. 正置正方形：邊長分別為鉛直與水平的方向，其面積為 n^2（n 為正整數）。例：1、4、9、16、25、36、49、64 等。



2. 半斜正方形：對角線分別為鉛直與水平的方向，其面積為「對角線相乘的一半」。例：2、8、18、32、50 等。



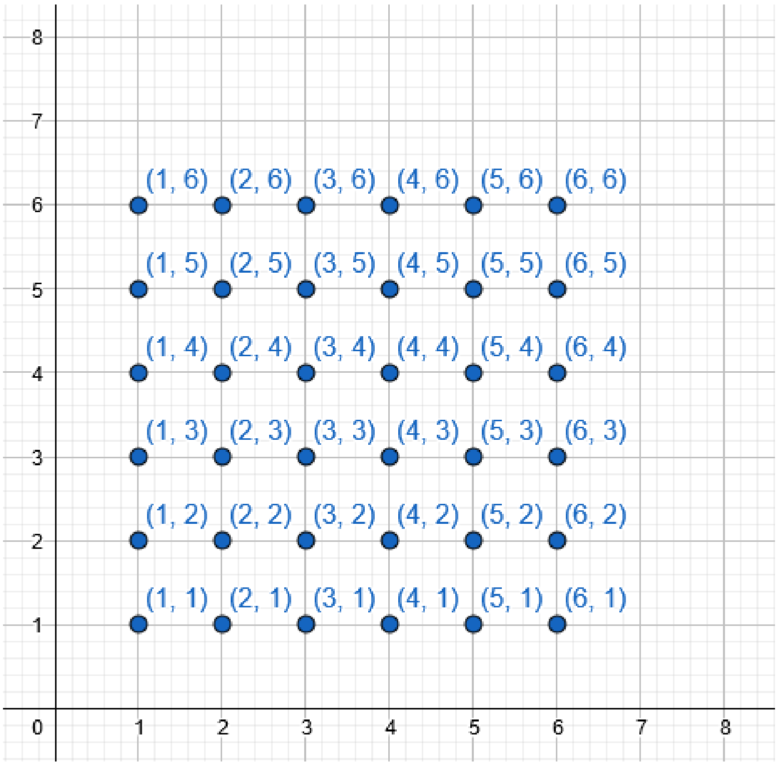
3. 偏斜正方形：邊長與對角線都不為鉛直與水平的方向。其面積依畢氏定理，以兩股長的平方和等於斜邊平方，即為正方形面積。
例：5、10、13、17、20、25、26、29、34、37、40、50 等。



三、 研究過程

(一) 座標編碼

為了能夠分析區域內每一點所能連線的正方形數量，本研究利用平面直角座標的概念，將 n × n 平面方格點區域每一個點的座標標示出來，方便後續討論。例如：5 × 5 平面方格點區域內的每個點座標如下圖所示。



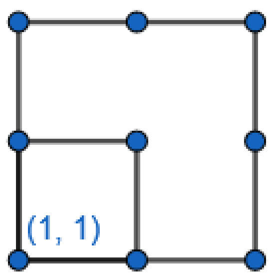
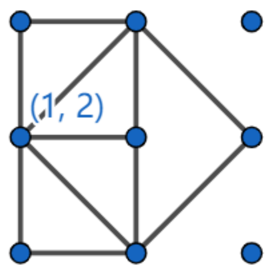
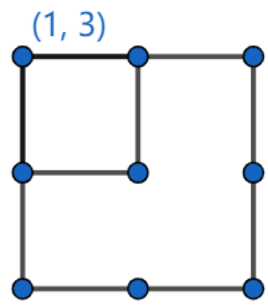
(二) n × n 平面方格點分析

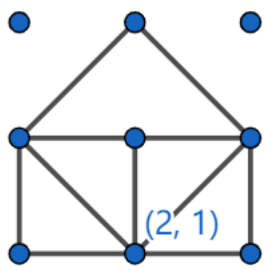
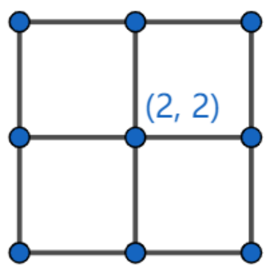
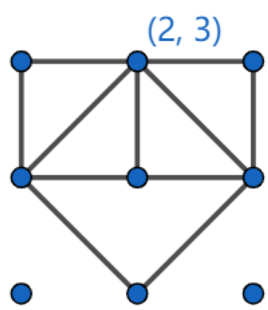
1. 分析 2 × 2 平面方格點區域

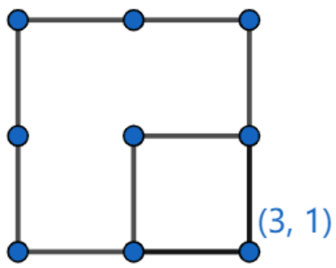
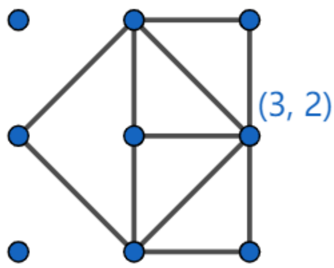
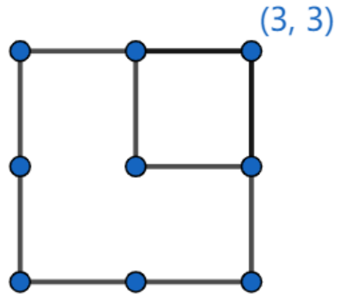
(1) 計算區域內可畫出不同面積的正方形個數，以及各點可畫出的正方形個數。

座標(x，y)	不同面積大小的正方形數量統計			合計
	1	2	4	
（1，1）	1	0	1	2
（1，2）	2	1	0	3
（1，3）	1	0	1	2
（2，1）	2	1	0	3
（2，2）	4	0	0	4
（2，3）	2	1	0	3
（3，1）	1	0	1	2
（3，2）	2	1	0	3
（3，3）	1	0	1	2
正方形個數	4	1	1	6

(2) 各點可畫出的正方形類型

（1，1）	（1，2）	（1，3）
		

（2，1）	（2，2）	（2，3）
		

（3，1）	（3，2）	（3，3）
		

2.　分析 3 × 3 平面方格點區域

(1)　計算區域內可畫出不同面積的正方形個數，以及各點可畫出的正方形個數。

座標（x，y）	不同面積大小的正方形數量統計					合計
	1	2	4	5	9	
（1，1）	1	0	1	0	1	3
（1，2）	2	1	0	1	1	5
（1，3）	2	1	0	1	1	5
（1，4）	1	0	1	0	1	3
（2，1）	2	1	0	1	1	5
（2，2）	4	2	1	0	0	7
（2，3）	4	2	1	0	0	7
（2，4）	2	1	0	1	1	5
（3，1）	2	1	0	1	1	5
（3，2）	4	2	1	0	0	7
（3，3）	4	2	1	0	0	7
（3，4）	2	1	0	1	1	5
（4，1）	1	0	1	0	1	3
（4，2）	2	1	0	1	1	5
（4，3）	2	1	0	1	1	5
（4，4）	1	0	1	0	1	3
正方形個數	9	4	4	2	1	20

3.　分析 4 × 4 平面方格點區域

(1)　計算區域內可畫出不同面積的正方形個數，以及各點可畫出的正方形個數。

座標（x，	不同面積大小的正方形數量統計	合計

y）	1	2	4	5	8	9	10	16	
（1，1）	1	0	1	0	0	1	0	1	4
（1，2）	2	1	1	1	0	1	1	0	7
（1，3）	2	1	2	2	1	0	0	0	8
（1，4）	2	1	1	1	0	1	1	0	7
（1，5）	1	0	1	0	0	1	0	1	4
（2，1）	2	1	1	1	0	1	1	0	7
（2，2）	4	2	1	2	0	1	0	0	10
（2，3）	4	3	2	2	0	0	0	0	11
（2，4）	4	2	1	2	0	1	0	0	10
（2，5）	2	1	1	1	0	1	1	0	7
（3，1）	2	1	2	2	1	0	0	0	8
（3，2）	4	3	2	2	0	0	0	0	11
（3，3）	4	4	4	0	0	0	0	0	12
（3，4）	4	3	2	2	0	0	0	0	11
（3，5）	2	1	2	2	1	0	0	0	8
（4，1）	2	1	1	1	0	1	1	0	7
（4，2）	4	2	1	2	0	1	0	0	10
（4，3）	4	3	2	2	0	0	0	0	11
（4，4）	4	2	1	2	0	1	0	0	10
（4，5）	2	1	1	1	0	1	1	0	7
（5，1）	1	0	1	0	0	1	0	1	4
（5，2）	2	1	1	1	0	1	1	0	7
（5，3）	2	1	2	2	1	0	0	0	8
（5，4）	2	1	1	1	0	1	1	0	7
（5，5）	1	0	1	0	0	1	0	1	4
正方形個數	16	9	9	8	1	4	2	1	50

4. 分析 5 × 5 平面方格點區域

(1) 計算區域內可畫出不同面積的正方形個數，以及各點可畫出的正方形個數。

座標（x，y）	不同面積大小的正方形數量統計											合計
	1	2	4	5	8	9	10	13	16	17	25	
（1，1）	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	5
（1，2）	2	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	8
（1，3）	2	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	11

（1，4）	2	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	11
（1，5）	2	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	8
（1，6）	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	5
（2，1）	2	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	9
（2，2）	4	2	1	2	0	1	2	0	1	0	0	13
（2，3）	4	3	2	3	1	1	1	0	0	0	0	15
（2，4）	4	3	2	3	1	1	1	0	0	0	0	15
（2，5）	4	2	1	2	0	1	2	0	1	0	0	13
（2，6）	2	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	9
（3，1）	2	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	11
（3，2）	4	3	2	3	1	1	1	0	0	0	0	15
（3，3）	4	4	4	4	0	1	0	0	0	0	0	17
（3，4）	4	4	4	4	0	1	0	0	0	0	0	17
（3，5）	4	3	2	3	1	1	1	0	0	0	0	15
（3，6）	2	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	11
（4，1）	2	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	11
（4，2）	4	3	2	3	1	1	1	0	0	0	0	15
（4，3）	4	4	4	4	0	1	0	0	0	0	0	17
（4，4）	4	4	4	4	0	1	0	0	0	0	0	17
（4，5）	4	3	2	3	1	1	1	0	0	0	0	15
（4，6）	2	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	11
（5，1）	2	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	9
（5，2）	4	2	1	2	0	1	2	0	1	0	0	13
（5，3）	4	3	2	3	1	1	1	0	0	0	0	15
（5，4）	4	3	2	3	1	1	1	0	0	0	0	15
（5，5）	4	2	1	2	0	1	2	0	1	0	0	13
（5，6）	2	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	9
（6，1）	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	5
（6，2）	2	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	8
（6，3）	2	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	11
（6，4）	2	1	2	2	1	1	1	1	0	0	0	11
（6，5）	2	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	8
（6，6）	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	5
正方形個數	25	16	16	18	4	9	8	2	4	2	1	105

5. 分析 $n \times n$ 平面方格點區域

(1) n＝1、2、3、4、5、6、7、8 時

區域內所能畫出的不同面積大小之正方形個數，詳如下表所示：

區域	不同面積大小的正方形數量統計																							合計
	1	2	4	5	8	9	10	13	16	17	18	20	25	26	29	32	34	36	37	40	49	50	64	
1 × 1	1																							1
2 × 2	4	1	1																					6
3 × 3	9	4	4	2		1																		20
4 × 4	16	9	9	8	1	4	2		1															50
5 × 5	25	16	16	18	4	9	8	2	4	2			1											105
6 × 6	36	25	25	32	9	16	18	8	9	8	1	2	4	2				1						196
7 × 7	49	36	36	50	16	25	32	18	16	18	4	8	11	8	2			4	2		1			336
8 × 8	64	49	49	72	25	36	50	32	25	32	9	18	24	18	8	1	2	9	8	2	4	2	1	540

(2) 依正置正方形、半斜正方形、偏斜正方形分類

區域	正置正方形的數量統計								合計
	1	4	9	16	25	36	49	64	
1 × 1	1								1
2 × 2	4	1							5
3 × 3	9	4	1						14
4 × 4	16	9	4	1					30
5 × 5	25	16	9	4	1				55
6 × 6	36	25	16	9	4	1			91
7 × 7	49	36	25	16	9	4	1		140
8 × 8	64	49	36	25	16	9	4	1	204

區域	半斜正方形的數量統計				合計
	2	8	18	32	
1 × 1					0
2 × 2	1				1
3 × 3	4				4
4 × 4	9	1			10
5 × 5	16	4			20

6 × 6	25	9	1		35
7 × 7	36	16	4		56
8 × 8	49	25	9	1	84

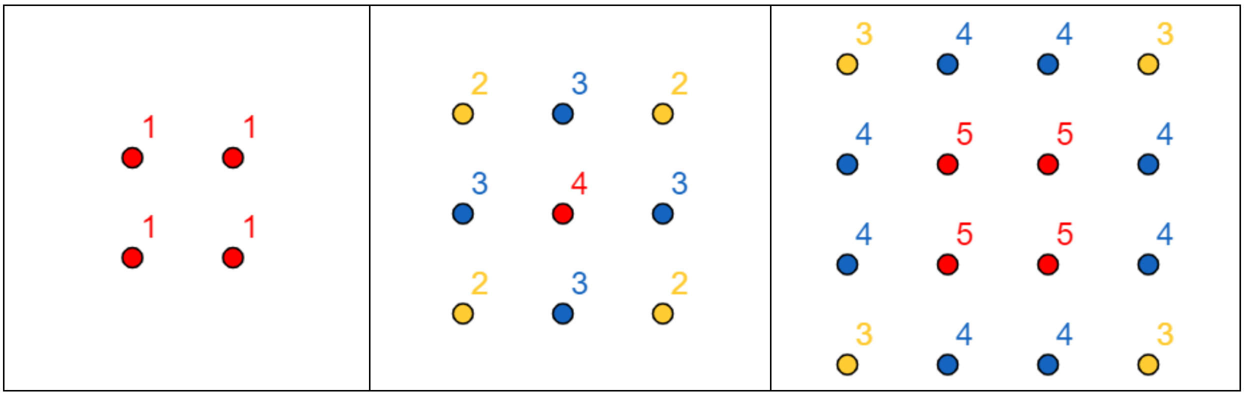
區域	偏斜正方形的數量統計												合計
	5	10	13	17	20	25	26	29	34	37	40	50	
1 × 1													0
2 × 2													0
3 × 3	2												2
4 × 4	8	2											10
5 × 5	18	8	2	2									30
6 × 6	32	18	8	8	2		2						70
7 × 7	50	32	18	18	8	2	8	2		2			140
8 × 8	72	50	32	32	18	8	18	8	2	8	2	2	252

註：在正置正方形和偏斜正方形中，都有面積大小是 25 平方單位的，為方便觀察數據的規律性，在此分開統計。

(三) n × n 的平面方格點區域內連方策略

1. 1 ×1、2 × 2、3 × 3 的平面方格點區域內

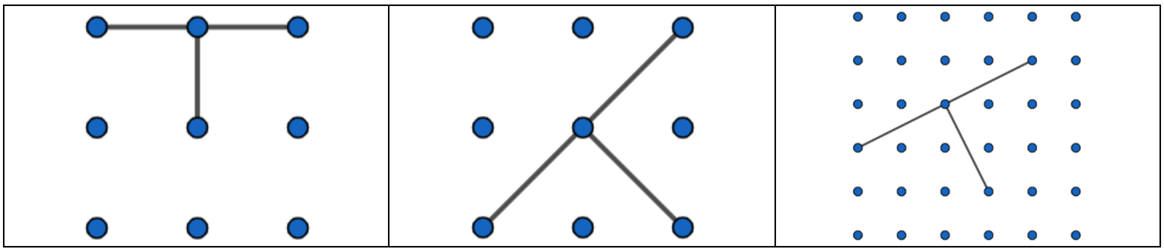
各點位置可供連方的數量標示



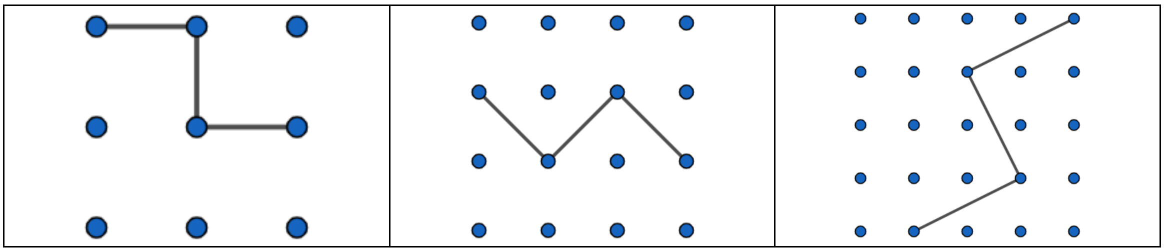
2. 4 ×4 以上的平面方格點區域內

找出各種可能獲勝的樣式

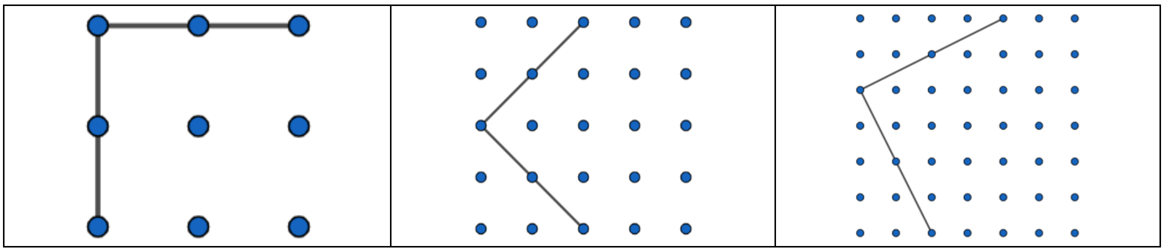
(1) T 字形



(2) N 字形



(3) L 字形



伍、 研究結果與討論

一、 $n \times n$ 的平面方格點區域內可畫出不同面積大小的正方形個數

經觀察上述數據後，發現不同面積大小的正置正方形和半斜正方形之個數都是完全平方數，而偏斜正方形的個數則是完全平方數的 2 倍。在不同的平面方格點區域，其正方形個數的總和有以下的關係：

1×1 平面方格點區域：$1^2 \times 1 = 1$
2×2 平面方格點區域：$1^2 \times 2 + 2^2 \times 1 = 6$
3×3 平面方格點區域：$1^2 \times 3 + 2^2 \times 2 + 3^2 \times 1 = 20$
4×4 平面方格點區域：$1^2 \times 4 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 2 + 4^2 \times 1 = 50$
5×5 平面方格點區域：$1^2 \times 5 + 2^2 \times 4 + 3^2 \times 3 + 4^2 \times 2 + 5^2 \times 1 = 105$
6×6 平面方格點區域：$1^2 \times 6 + 2^2 \times 5 + 3^2 \times 4 + 4^2 \times 3 + 5^2 \times 2 + 6^2 \times 1 = 196$
7×7 平面方格點區域：$1^2 \times 7 + 2^2 \times 6 + 3^2 \times 5 + 4^2 \times 4 + 5^2 \times 3 + 6^2 \times 2 + 7^2 \times 1 = 336$
8×8 平面方格點區域：$1^2 \times 8 + 2^2 \times 7 + 3^2 \times 6 + 4^2 \times 5 + 5^2 \times 4 + 6^2 \times 3 + 7^2 \times 2 + 8^2 \times 1 = 540$

根據以上得出的規律，在 n × n 平面方格點區域中，正方形個數的總和可用下列算式表示：

n × n 平面方格點區域正方形個數的總和

$=1^2\times n+2^2\times(n-1)+3^2\times(n-2)+4^2\times(n-3)+\ldots\ldots+(n-3)^2\times 4+(n-2)^2\times 3+(n-1)^2\times 2+n^2\times 1$

$$=\sum_{k=1}^{n} k^2\times(n-k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} nk^2-\sum_{k=1}^{n} k^3+\sum_{k=1}^{n} k^2$$

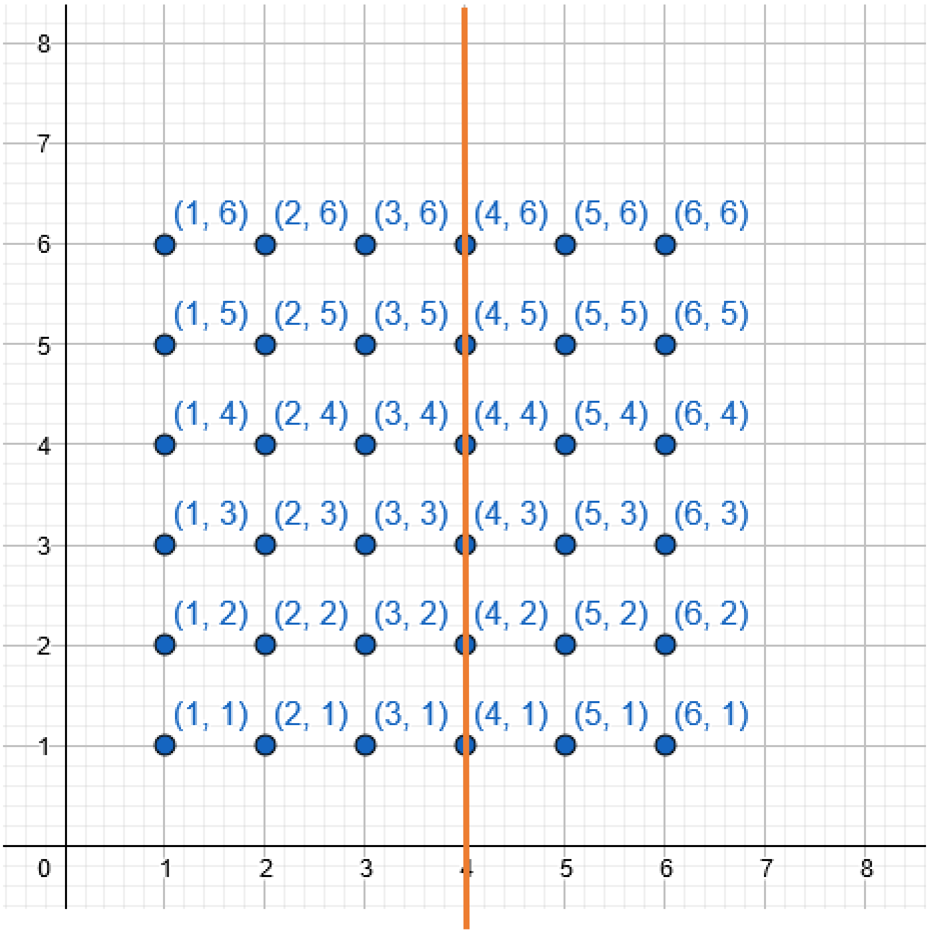
$$=\frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$=\frac{\mathrm{n}\times(\mathrm{n}+1)^2(\mathrm{n}+2)}{12}$$

二、　n × n 的平面方格點區域內各點可供連成正方形的個數

(一) 正置正方形

先將區域內的所有點分成左右兩區，以 5 × 5 的平面方格點區域為例，如下所示：



1. 點(x，y)在 n × n 的平面方格點區域的左邊$\left(x \le \frac{n+1}{2}\right)$

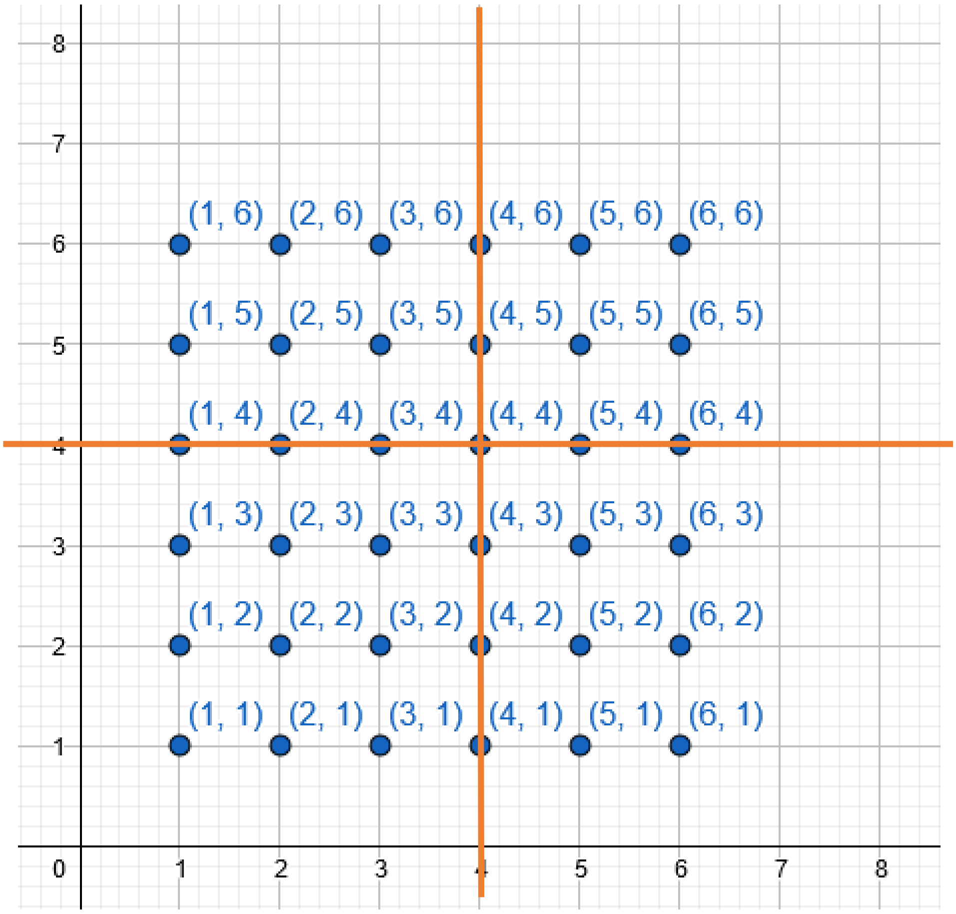
   點(x，y)可供連成正置正方形的個數 $= 3(x-1)+(n+1-x)$

2. 點(x，y)在 n × n 的平面方格點區域的右邊$\left(x \ge \frac{n+1}{2}\right)$

   點(x，y)可供連成正置正方形的個數 $= 3(n+1-x)+(x-1)$

(二) 半斜正方形

先將區域內的所有點分成四個象限，以 5 × 5 的平面方格點區域為例，如下所示：



1. 點(x，y)在 n × n 的平面方格點區域的第一象限

   當 n=3、5 時

   (n - x) + (n - y) = 2 可連成的半斜正方形有 0 個

   (n - x) + (n - y) = 3 可連成的半斜正方形有 1 個

   (n - x) + (n - y) = 4 可連成的半斜正方形有 2 個

   (n - x) + (n - y) > 4 可連成的半斜正方形有 4 個

   當 n=4、6 時

   (n - x) + (n - y) = 2 可連成的半斜正方形有 0 個

   (n - x) + (n - y) = 3 可連成的半斜正方形有 1 個

   (n - x) + (n - y) = 4 可連成的半斜正方形有 2 個

$(n-x)+(n-y)=5$ 可連成的半斜正方形有 3 個

$(n-x)+(n-y)>5$ 可連成的半斜正方形有 4 個

2. 點(x，y)在 $n\times n$ 的平面方格點區域的第二象限

   當 n=3、5 時

   $x+(n-y)=2$ 可連成的半斜正方形有 0 個

   $x+(n-y)=3$ 可連成的半斜正方形有 1 個

   $x+(n-y)=4$ 可連成的半斜正方形有 2 個

   $x+(n-y)>4$ 可連成的半斜正方形有 4 個

   當 n=4、6 時

   $x+(n-y)=2$ 可連成的半斜正方形有 0 個

   $x+(n-y)=3$ 可連成的半斜正方形有 1 個

   $x+(n-y)=4$ 可連成的半斜正方形有 2 個

   $x+(n-y)=5$ 可連成的半斜正方形有 3 個

   $x+(n-y)>5$ 可連成的半斜正方形有 4 個

3. 點(x，y)在 $n\times n$ 的平面方格點區域的第三象限

   當 n=3、5 時

   $x+y=2$ 可連成的半斜正方形有 0 個

   $x+y=3$ 可連成的半斜正方形有 1 個

   $x+y=4$ 可連成的半斜正方形有 2 個

   $x+y>4$ 可連成的半斜正方形有 4 個

   當 n=4、6 時

   $x+y=2$ 可連成的半斜正方形有 0 個

   $x+y=3$ 可連成的半斜正方形有 1 個

   $x+y=4$ 可連成的半斜正方形有 2 個

   $x+y=5$ 可連成的半斜正方形有 3 個

   $x+y>5$ 可連成的半斜正方形有 4 個

4. 點(x，y)在 $n\times n$ 的平面方格點區域的第四象限

   當 n=3、5 時

   $(n-x)+y=2$ 可連成的半斜正方形有 0 個

   $(n-x)+y=3$ 可連成的半斜正方形有 1 個

   $(n-x)+y=4$ 可連成的半斜正方形有 2 個

   $(n-x)+y>4$ 可連成的半斜正方形有 4 個

   當 n=4、6 時

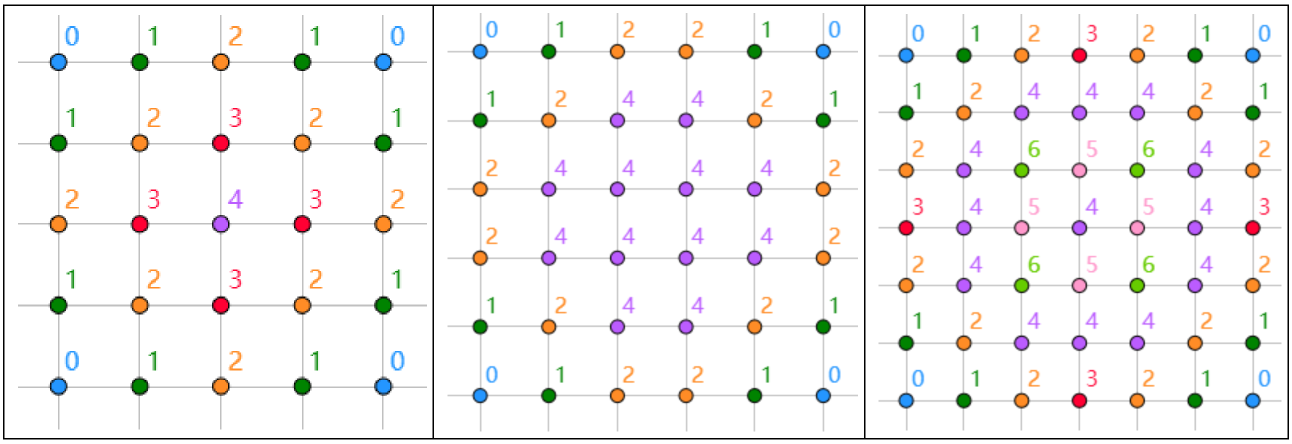
   $(n-x)+y=2$ 可連成的半斜正方形有 0 個

   $(n-x)+y=3$ 可連成的半斜正方形有 1 個

   $(n-x)+y=4$ 可連成的半斜正方形有 2 個

   $(n-x)+y=5$ 可連成的半斜正方形有 3 個

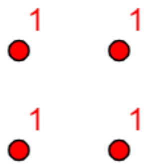
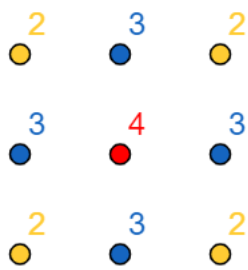
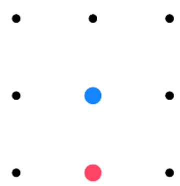
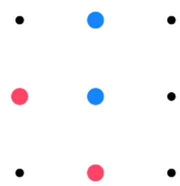
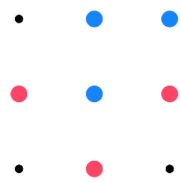
   $(n-x)+y>5$ 可連成的半斜正方形有 4 個

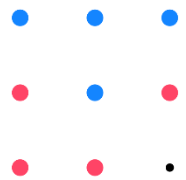
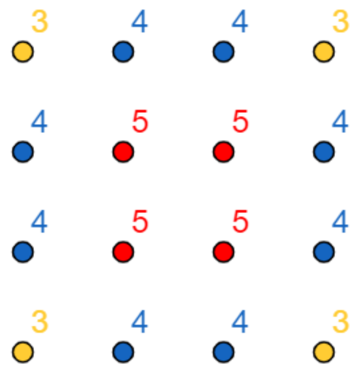
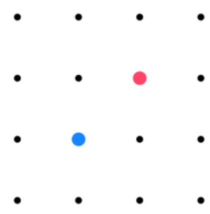
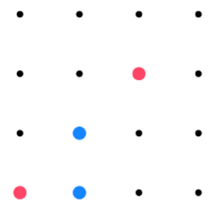
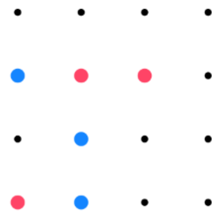
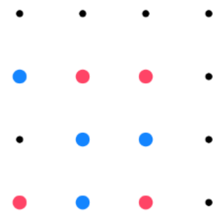


三、　n × n 的平面方格點區域內優先連成正方形的策略。

1. 1 ×1、2 × 2、3 × 3 的平面方格點區域內

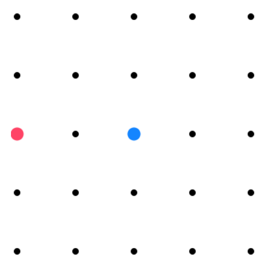
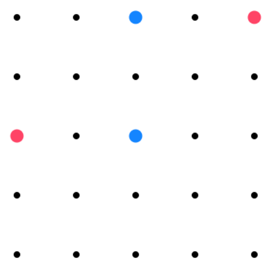
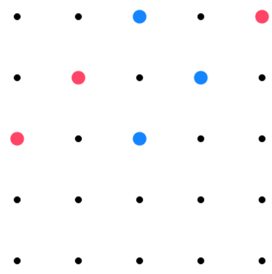
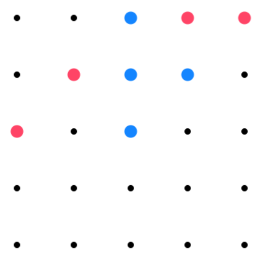
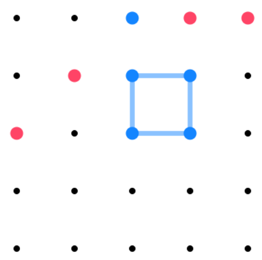
對弈雙方若都沒有犯錯，則都會是以平手收場。

<table>
<tr><th>區域大小</th><th>各點可供連方數量</th><th colspan="2">實例說明</th></tr>
<tr><td>1 ×1</td><td>
</td><td colspan="2">不管先後，第一、二步下完，雙方就都沒有獲勝機會了。</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2 × 2</td><td rowspan="3">
</td><td></td><td>先手為藍色棋子，下在棋盤中心的連方可能性最多（有四種），後手為紅色棋子，只能下在區域邊上（有三種可能）。雙方各下一子後，藍紅各自的連方可能性降為（2，1）</td></tr>
<tr><td></td><td>雙方各下二子後，藍紅各自的連方可能性降為（1，0），後手的紅色棋子已無獲勝可能。</td></tr>
<tr><td></td><td>雙方各下三子後，藍紅各自的連方可能性仍為（1，0）。</td></tr>
</table>

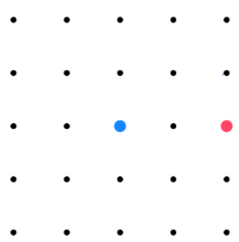
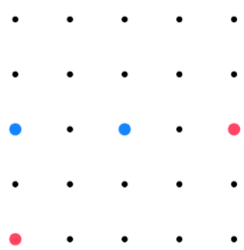
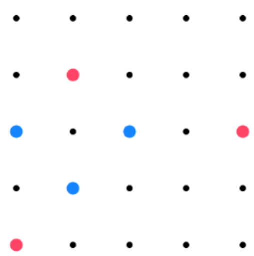
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>雙方各下四子後，藍紅各自的連方可能性降為（0，0），雙方平手。</td></tr>
<tr><td rowspan="7">3 × 3</td><td rowspan="7">
</td><td></td><td>先手為藍色棋子，下在棋盤中心區的連方可能性最多（有五種），後手為紅色棋子，也下在棋盤中心區。雙方各下一子後，藍紅各自的連方可能性為（4，4）</td></tr>
<tr><td></td><td>雙方各下二子後，藍紅各自的連方可能性仍為（4，4）。</td></tr>
<tr><td></td><td>雙方各下三子後，藍紅各自的連方可能性為（3，3）。</td></tr>
<tr><td></td><td>雙方各下四子後，藍紅各自的連方可能性降為（2，2）</td></tr>
<tr><td></td><td>雙方各下五子後，藍紅各自的連方可能性降為（1，0）</td></tr>
<tr><td></td><td>雙方各下六子後，藍紅各自的連方可能性降至（0，0），雙方平手。</td></tr>
</table>

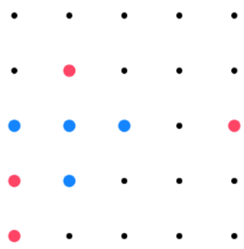
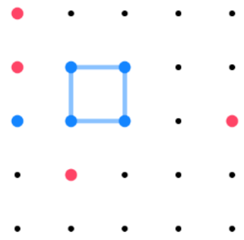
2. 4 ×4 以上的平面方格點區域內

(1) 找樣式來取勝—T 字形實例一

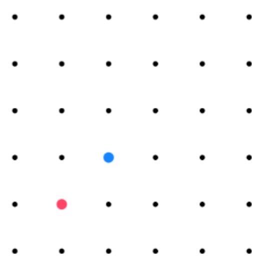
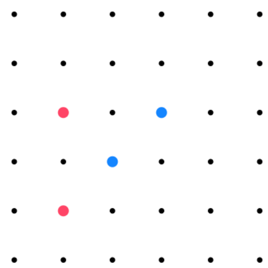
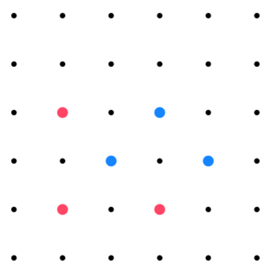
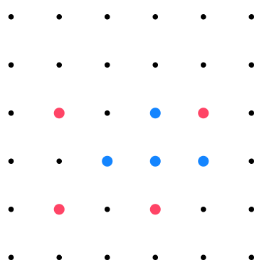
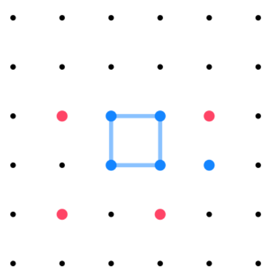
第一步	第二步	第三步
 先手藍棋的第一步下在中心，有四個方向可發展，後手紅棋擋住藍棋發展棋局的其中一個方向。	 藍棋的第二步下在對手沒下到的三個方向其中之一，紅棋以為藍棋的棋局發展目標是 2x2 正方形，因而下子在其中一角。	 藍棋的第三步下在離兩點距離為$\sqrt{2}$單位的點，紅棋認為藍棋目標是發展另一個$\sqrt{2}$x$\sqrt{2}$正方形，因而事先阻擋發展方向。
第四步	第五步	
 藍棋的第四步下在三點的中心，形成兩個 1x1 正方形的可能。	 藍棋的第五步下在對手沒有阻擋的另一個正方形可能，成功連成正方形。	

(2) 找樣式來取勝—T 字形實例二

第一步	第二步	第三步
		
第四步	第五步	

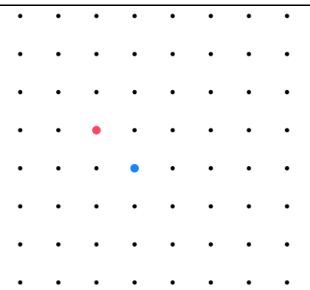
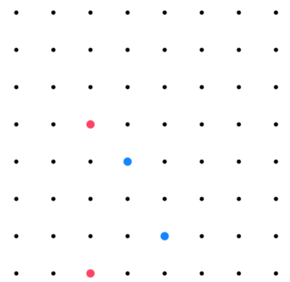
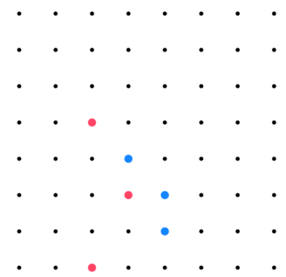
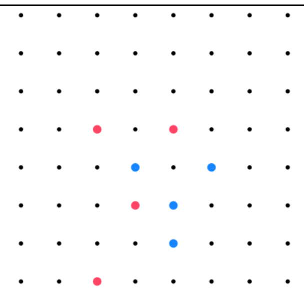
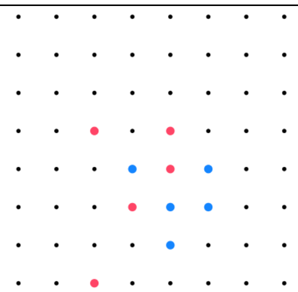
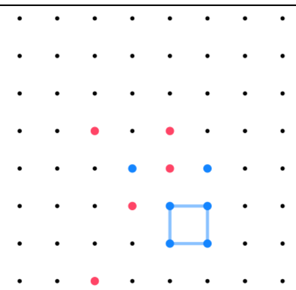
(3) 找樣式來取勝—T 字形實例三

第一步	第二步	第三步
 先手藍棋的第一步下在中心附近，有四個方向可發展，後手紅棋擋住藍棋發展棋局的其中一個方向。	 藍棋的第二步下在對手沒下到的三個方向其中之一，紅棋以為藍棋的棋局發展目標是 2x2 正方形，因而下子在其中一角。	 藍棋的第三步下在離兩點距離為$\sqrt{2}$單位的點，紅棋認為藍棋目標是發展另一個$\sqrt{2}$x$\sqrt{2}$正方形，因而事先阻擋發展方向。
第四步	第五步	
 藍棋的第四步下在三點的中心，形成兩個 1x1 正方形的可能。	 藍棋的第五步下在對手沒有阻擋的另一個正方形可能，成功連成正方形。	

經由上述實際操作後發現，先手只要第一步下子盡量下在棋盤中心，其向四周圍方向發展棋局的可能性最大，其後再依照 T 字型的模式來下棋，其結果一定必勝。先手的每一步下子都要盡可能讓可連成的正方形數量不只有唯一，就可讓對手無法猜中你想要連方的位置。T 字型第一步下在棋盤中心，當對手下在四個象限的其中一或兩個時，還有兩個選擇，如果下在邊，只有一個選擇，必定無法連成 T 字型。

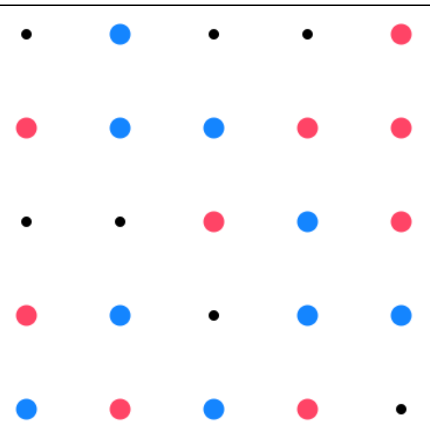
(4) 找樣式來取勝—N 字形實例

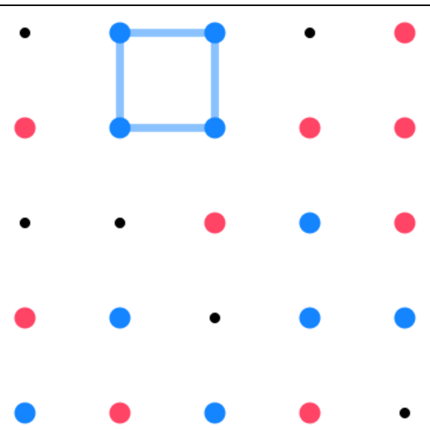
第一步	第二步	第三步

 先手藍棋的第一步下在中心附近，有四個方向可發展，後手紅棋擋住藍棋發展棋局的其中一個方向。	 藍棋的第二步下在對手沒下到的三個方向其中之一，紅棋以為藍棋的棋局發展目標是$\sqrt{5}$x$\sqrt{5}$正方形，因而下子在其中一角。	 藍棋的第三步下在前兩點之間，紅棋認為藍棋目標是發展1x1正方形，因而事先阻擋發展方向。
第四步	第五步	第六步
 藍棋的第四步下在可供連成$\sqrt{2}$x$\sqrt{2}$正方形的位置，迫使紅棋下在指定位置以阻止藍棋連方成功。	 藍棋的第五步下在可供形成 N 字形的位置，至此紅棋已無反擊機會	 藍棋的第六步下在可成功連方的位置，順利獲勝。

經由上述實際操作後發現，先手只要第一步下子盡量下在棋盤中心，其向四周圍方向發展棋局的可能性最大，其後再依照 N 字型的模式來下棋，其結果勝率大增。

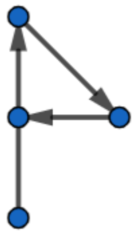
(5) 找樣式來取勝—L 字形實例



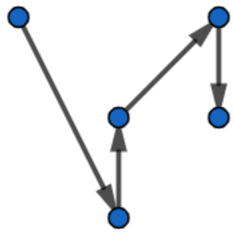


(6) 找樣式來取勝—棋盤無限大時

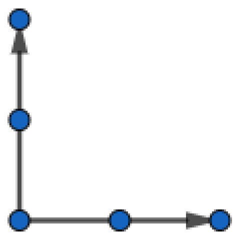
經由實際操作後，發現 T 字型是下子步數最少也最好的獲勝策略。用 T 字型策略時，利用下圖的四個下子順序可以獲勝。



用 N 字型的下子步數會比 T 字型多，且容易被對手阻擋，不一定每次都會成功。



雖然 L 字型也能創造出兩個連方成功的的可能，但其下子的發展方向只有兩個，且較適合發展正置正方形，半斜正方形與偏斜正方形的棋局發展可能性少，優點是半斜與偏斜正方形在視覺上比較不容易辨認出來，若有下子時間限制且棋盤無限大的話，較能騙過對方，但若是與電腦下棋，則不易取得優勢。



陸、結論

一、 $n \times n$ 的平面方格點區域內可畫出不同面積大小的正方形，其個數總和為

$=1^2 \times n+2^2 \times (n-1)+3^2 \times (n-2)+4^2 \times (n-3)+\ldots\ldots+(n-3)^2 \times 4+(n-2)^2 \times 3+(n-1)^2 \times 2+n^2 \times 1$

$$=\sum_{k=1}^{n} k^2 \times (n-k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} nk^2-\sum_{k=1}^{n} k^3+\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$=\frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n \times (n+1)^2(n+2)}{12}$$

二、 n × n 的平面方格點區域內各點可連成正方形的個數

點$(x，y)$在 n × n 的平面方格點區域的左邊$\left(x \le \frac{n+1}{2}\right)$

點$(x，y)$可供連成正置正方形的個數 $= 3(x-1) + (n+1-x)$

點$(x，y)$在 n × n 的平面方格點區域的右邊$\left(x \ge \frac{n+1}{2}\right)$

點$(x，y)$可供連成正置正方形的個數 $= 3(n+1-x) + (x-1)$

三、 n × n 的平面方格點區域內優先連成正方形的策略

經由實際操作後發現，先手只要第一步下子盡量下在棋盤中心，其向四周圍方向發展棋局的可能性最大，先手的每一步下子都要盡可能讓可連成的正方形數量不只有唯一，就可讓對手無法猜中你想要連方的位置，如果對方下的子跟你下的子間隔一個單位，那我們就可以把連方的目標正方形邊長再訂為更大。棋局的發展可依照 T 字形、N 字形和 L 字形的模式來下棋。

T 字形方法的第一步是下子在棋盤中心，當對手下在四個象限的其中一或兩個時，還有兩個選擇；如果下在棋盤的邊上，只有一個選擇，必定無法連成 T 字形。按照由外而內的下子模式，其結果一定必勝。

N 字形的方法則是先發展成 Y 字形後，再伺機連成 N 字形，其下子步數會比 T 字形多一步，可能提供對手利用 T 字形方法來取得獲勝機會。

L 字形的方式雖然也有成功連方的可能性，但是棋局發展過程易受對手干擾而破局，不過若棋盤無限大，此法也有成功獲勝機會。

柒、 參考資料及其他

一、李信昌。四點連方【數學遊戲】。取自 http://www.mathland.idv.tw/game/mathgame.htm

二、Square it!. Retrieved August 11, 2019, from https://nrich.maths.org/square-it/

三、康軒文教事業（2020）。國民中學數學學習領域第四冊－第一單元等差數列與等差級數。台北：康軒文教事業股份有限公司。

四、Sigma 重要公式與證明. Retrieved November 11, 2019, from https://blog.xuite.net/wang620628/twblog/126093497-Sigma