

嘉義市第 38 屆中小學科學展覽會
作品說明書

科別：數學科

組別：國小組

作品名稱：九人收場地

關鍵詞：對稱

編號：

壹、研究動機

有一天，在科學研習月刊中，看到一個題目如下：



班上有九個好友組成足球隊，身高兩兩不同，比賽完排成 3×3 的隊形聽教練指示。

教練說：「每一橫列最高的兩人舉手！」

於是共有六個人舉手了。

教練又說：「手放下，現在每一直排最高的兩人舉手！」

於是又有六個人舉手了。

於是教練說：「手放下，兩次都有舉到手的人去收場地，其他的解散。」

1. 有沒有可能剛好六個人去收場地？
2. 小定的身高恰好居於這九個人的中間（即第五高），有沒有可能他不用去收場？

感覺這個問題很有趣，嘗試著把這個問題解決。

貳、研究目的

- 一、討論待答問題。
- 二、將問題推廣到 $n \times n$ 隊形，直排和橫列都各取 2 人，收場地人數的範圍。
- 三、將問題推廣到 $n \times n$ 隊形，直排和橫列都各取 3 人，收場地人數的範圍。
- 四、將問題推廣到 $n \times n$ 隊形，直排和橫列都各取 k 人，收場地人數的範圍。
- 五、將問題推廣到 $m \times n$ 隊形，直排和橫列都各取 k 人，收場地人數的範圍。

參、研究設備及器材

鉛筆、紙

肆、研究過程

一、解決待答問題

首先一開始，針對這個問題，希望能找出答案，滿足我的好奇心。

為了能夠容易討論起見，在這個問題中，因為身高**兩兩不同**，所以我們以數字 1-9 來表示 9 個同學的身高大小，9 代表身高最高的同學，1 號代表最矮的同學，所以依照身高的高矮我們以 9、8、7、6、5、4、3、2、1 來表示。

(一)問題一:有沒有可能剛好六個人去收場地，我嘗試寫出幾種解答如下(紅色數字代表是收場地的同學)。

9	8	3
7	2	6
1	5	4

8	9	3
7	2	6
1	5	4

5	9	3
7	2	4
1	8	6

9	8	3
7	1	6
2	5	4

8	9	2
7	3	6
1	5	4

5	9	1
3	8	4
7	2	6

觀察以上的方法，我觀察出:如果要剛好 6 個人去收場地，就代表只能留下最矮 3 個人，而這最矮的 3 個人(1、2、3 號同學)，如果站在**對角線**的位置或者各行列不重複只站一個最矮的，則就剛好 6 個人去收場地。(即每一直排、橫列都恰好 2 人，則 $2 \times 3 = 6$ 人)

(二)問題二:小定的身高恰好居於 9 個人的中間(即第五高)，請問他有沒有可能不用去收場地。我思考了一下，寫出幾種解答如下

9	8	3
7	6	4
1	5	2

9	8	3
7	6	4
5	2	1

9	8	5
7	6	4
3	2	1

8	9	3
7	6	5
1	2	4

7	9	3
8	6	1
5	4	2

6	8	5
7	9	4
1	2	3

觀察以上的方法，我觀察出:如果第 5 高的同學，不用去收場地，就代表最高的 4 個人要去收場地，而這 4 個最高的人(9、8、7、6 號同學)，如果站在前 4 高的同學**相同的行和列**的位置，則第 5 高的人沒有站在右下角灰色的位置，則第五高的同學不用去收場地。

二、尋找規律

有了以上的經驗以後，自己腦袋裡面，嘗試將這個問題推廣:

在 $n \times n$ 的隊形中，如果橫列最高的 2 個人，以及直排最高的 2 個人舉手，同時都舉手的人收場地。請問最多幾人去收場地?最少幾人去收場地?

為了尋找規律，我從隊形的人數著手:

(一)、 1×1 的隊形：

因要最高的 2 個人舉手，所以這個隊形，不符合題意。

(二)、 2×2 的隊形

1	4
2	3

1	4
3	2

4	1
2	3

在這個隊形中，因為直排橫列都需要取 2 人，所以最多 4 人收場地，最少也是 4 人收場地。

(三)、 3×3 的隊形

如同上述的討論過程，最多 6 人收場地，最少 4 人收場地。

(四)、 4×4 的隊形

最多 8 人

如圖，只要把最高的 8 人分別分散排在直排橫列不重複，即可找到最多的人數收場地。

或者將最矮的同學排在**對角線**上，接下來把最高的 8 人以對角線為**對稱軸**排列。

或者簡單來說即每一直排、橫列都恰好 2 人，則 $2 \times 4 = 8$ 人)

16	15	8	4
14	13	3	7
6	2	12	11
1	5	10	9

最少 4 人

把最高的 4 個人集中在左上角，而右下角灰色網底的部分不排 12,11,10,9 號同學，即可最少 4 人收場地。

16	15	8	7
14	13	6	5
12	11	4	3
10	9	2	1

(五) 5×5 的隊形

最多 10 人

或者將最矮的同學排在對角線上，接下來把最高的 10 人以對角線為對稱軸排列，即可得最多人數。

16			25	1
		23	2	24
	21	3	22	
19	4	20		
5	18			17

或者簡單來說即每一直排、橫列都恰好 2 人，則 $2 \times 5 = 10$ 人

最少 4 人

把最高的 4 個人集中在左上角，而右下角灰色網底的部分不排 21,10,19,18,17,16 號同學，即可最少 4 人收場地。

25	24			
23	22			
		1	2	3
		4	5	6
		7	8	9

(六) $n \times n$ 的隊形

最多 $2 \times n$ 人

或者將最矮的同學排在對角線上，接下來把最高的 $2 \times n$ 人以對角線為對稱軸排列，即可得最多人數。

或者簡單來說即每一直排、橫列都恰好 2 人，則 $2 \times n$ 人

◎						◎	1
					◎	2	◎
				◎	3	◎	
			◎	4	◎		
		◎	5	◎			
	◎	6	◎				
◎	7	◎					
n	◎						◎

最少 $2 \times 2 = 4$ 人，即最高的 4 人放在紅色區域，次高的人不放入右下角灰色的部分。

三、問題的推廣

有了以上的經驗以後，自己腦袋裡面，繼續嘗試將這個問題推廣：

在 $n \times n$ 的隊形中，如果橫列最高的 3 個人，以及直排最高的 3 個人舉手，同時都舉手的人收場地。請問最多幾人去收場地？最少幾人去收場地？

為了尋找規律，

(一)、 1×1 的隊形：

因要最高的 3 個人舉手，所以這個隊形，不符合題意。

(二)、 2×2 的隊形

在這個隊形中，因為直排橫列都需要取 3 人，所以這個隊形，不符合題意。

(三)、 3×3 的隊形

因為直排橫列都需要取 3 人，所以最多 9 人收場地，最少 9 人收場地。

9	8	3
7	6	4
1	2	5

(四)、4×4的隊形

最多 12 人

將最矮的同學排在對角線上，接下來把最高的 12 人以對角線為對稱軸排列，即可得一解。
或者簡單來說即每一直排、橫列都恰好 3 人，則 $3 \times 4 = 12$ 人

◎	◎	◎	4
◎	◎	3	◎
◎	2	◎	◎
1	◎	◎	◎

最少 9 人

把最高的 9 個人集中在左上角，而右下角灰色網底的部分不排次高的同學，即可最少 9 人收場地。

(五)、5×5

最多 15 人

或者將最矮 4 個同學排在對角線上，接下來把最高的 15 人以對角線為對稱軸排列，即可得最多人數。

或者簡單來說即每一直排、橫列都恰好 3 人，則 $3 \times 5 = 15$ 人

	◎	◎	◎	1
◎		◎	2	◎
	◎	3	◎	◎
◎	4	◎		◎
◎	◎		◎	

最少 9 人

把最高的 9 個人集中在左上角，而右下角灰色網底的部分不排次高的同學，即可最少 9 人收場地。

(六)、 $n \times n$ 的隊形

簡單來說即每一直排、橫列都恰好 3 人，則 $3 \times n$ 人，即最多 $3 \times n$ 人，如圖

				◎	◎	◎	1
			◎		◎	2	◎
				◎	3	◎	◎
			◎	4	◎		◎
		◎	5	◎		◎	
◎	◎	6	◎				
◎	◎	◎					
◎	◎	◎					

最少 $3 \times 3 = 9$ 人，即最高的 9 人放在紅色區域，次高的人不放入右下角灰色的部分。

四、問題的延伸

有了以上的經驗以後，自己腦袋裡面，繼續嘗試將這個問題延伸

在 $n \times n$ 的隊形中，如果橫列最高的 k 個人，以及直排最高的 k 個人舉手，同時都舉手的人收場地。請問最多幾人去收場地？最少幾人去收場地？

依照上述的討論的規則：可以推出最多有 $n \times k$ 個人收場地，最少有 $k \times k$ 個人收場地。

五、將隊形改變成長方形

有了以上的經驗以後，自己腦袋裡面，繼續嘗試將這個問題延伸

在 $m \times n$ 的隊形中，如果橫列最高的 k 個人，以及直排最高的 k 個人舉手，同時都舉手的人收場地。請問最多幾人去收場地？最少幾人去收場地？

同理：依照上述的討論的規則：可以推出最多有 $n \times k$ 個人收場地，最少有 $k \times k$ 個人收場地。

伍、研究結果

- 一、解決待答問題，可以 6 個人去收場地；第 5 高的同學不用收場地。
- 二、 $n \times n$ 隊形，若直排橫列，各取最高 2 人，則最多 $2 \times n$ 人，最少 2×2 人收場地。
- 三、 $n \times n$ 隊形，若直排橫列，各取最高 3 人，則最多 $3 \times n$ 人，最少 3×3 人收場地。
- 四、 $n \times n$ 隊形，若直排橫列，各取最高 k 人，則最多 $k \times n$ 人，最少 $k \times k$ 人收場地。
- 五、 $m \times n$ 隊形 ($m \geq n$)，若直排橫列，各取最高 k 人，則最多 $k \times n$ 人，最少 $k \times k$ 人收場地。

陸、討論

從一個數學題目，生活中可見到的題目，竟然可以衍伸出這麼多的結論，是我始料未及的地方，但受限於還是個中年級的小學生，無法以高深的數學語言和想法來呈現問題的解法，只能以圖形和其中一種特殊解法來表達這個題目人數的最大與最小範圍，期盼自己將來年紀增長，可以將題目作更多的延伸，並且以較高深的數學式子來表達。

柒、參考資料

- 一、游森棚(2018)。九人收場地。科學研習月刊，第 57 卷第 02 期，44。