



嘉義市第 38 屆中小學科學展覽會
作品說明書



科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：當達文西遇上柏拉圖立體

關 鍵 詞：正多面體、立面化



編 號：_____



目 錄



摘要.....	1
壹、研究動機.....	1
貳、研究目的.....	1
參、研究設備及方法.....	2
肆、研究過程與結果.....	3
研究一:面面相扣.....	3
研究二:點數成星.....	9
研究三:延伸應用.....	17
伍、研究探討.....	20
陸、結語.....	24
捌、參考資料及其他.....	25



當達文西遇上柏拉圖立體

摘要

以繪圖為出發點，應用立體的頂點、邊、面，深入探討如何以切割「面」，並製作卡榫，以組合出五個柏拉圖立體。運用學習過的數學幾何知識，將正多面體的面進行切割與組合，先面面相扣組成花紋層次的平面，再以達文西定義的「立面化」設計不同的結構元件，挑戰立面化後的對偶多面體。我們發現不管是重心，或者是空間幾何，利用比例特別設計的單一元件組合完成的柏拉圖立體，猶如藝數幾何星球，而且都有其美麗的規律存在，快來看看我們如何運用這些規律描繪出達文西獨一無二的想像吧！

壹、研究動機

去年國一暑假的時候，數學老師邀請我去擔任小隊輔，那是一個叫做「魔數師修練營」的數學營隊，要帶領可愛的小學生們玩許多和數學相關的課程，其中讓我印象最深刻的，是 IQ-light 的組裝。IQ-light 是利用 30 個相同的菱形元件相互扣在一起，再依序拼成一個完整的多面體，老師還教大家在其中裡放入燈泡，讓原本看起來很普通的多面體變得像天上的月亮一樣漂亮。

從那一刻起，學美術的我才發現，原來數學也可以如此美麗，心中開始對於多面體這樣的結構萌發出了好奇心和濃厚的興趣。上網查詢相關資料，看到帕西奧利及達文西的著作《神聖比例》一書的畫作，讓我想更加深入的去了解正多面體的面貌，於是開始自己動手做，也想要製作出屬於自己的獨一無二的柏拉圖立體。

老師說這是一個好的開始，建議可以把我和同學的研究過程與作品分享給大家，因此，我們大膽地參加了科展，希望大家也可以看見簡單又美麗的數學世界。

貳、研究目的

我們想以幾何元素出發，利用尺規作圖製作組合基本的元件，設計用單一元件就能組合出正多面體的可能方式。



- 一、面面相扣:以「面」製作正多面體的卡榫，切割出單一的表面組合元件。
- 二、點數成星:利用單一的表面結構元件，將正多面體的面進行「立面化」。
- 三、延伸應用:修改結構條件，嘗試不同高度的立面化效果。

參、研究設備及方法

一、研究設備與材料

參照了坊間 IQ light 元件的特質，我們設定了四個主要需求：透光、輕盈、簡潔、卡榫。所需要的研究材料有：圓規、尺、夾子、粉彩紙、描圖紙、PP 合成紙、電腦(Inkscape 軟體、RDworks、文書處理)、雷射雕刻機等。

需求表整理如下：

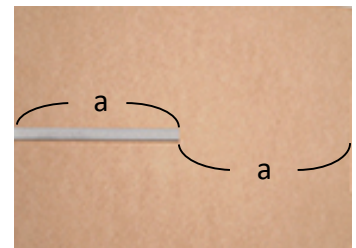
材料名稱	1.圓規	2.直尺	3 粉彩紙、描圖紙 PP 合成紙
圖片			
機具名稱	4.美工刀	5. 雷射雕刻機	6. 電腦 (Inkscape、RDworks 軟體、文書處理)
圖片			

二、尺規作圖

在研究製作過程中，所使用的正三角形、正方形、正五邊形，都是透過尺規作圖的方法獲得。最後的成品，因為要透過雷射雕刻機切割，所以，作圖另外透過電腦以 Inkscape 製圖轉檔，再用 RDworks 處理，進行結構元件切割。

三、卡榫製作

考量組合時若利用黏著劑，有可能沾黏，造成元件無法復原，我們期望結構元件可以重複利用，所以想到了小時候的搓搓樂紙盒(如右圖)，裡面的隔間所使用的卡榫設計，我們將一樣的方法應用在製作的基本元件上，使元件在進行組合時，無需使用膠劑黏合。



肆、研究過程與結果

研究一、面面相扣: 以「面」製作正多面體的卡榫，切割出單一組合元件。

一、研究過程

帕西奧利及達文西的著作《神聖比例》一書中，達文西筆下繪出的正多面體，每個面均由全等的正多邊形組成，且每個頂點所接的面數量一致。

老師說若要利用單一元件組成正多面體，必須先對其頂點數 V 、邊數 E 和面數 F 的性質要有所了解，若每個面的邊有 p 條 ($p \geq 3$) 且每個頂點相交的邊有 q 條 ($q \geq 3$)，則：

$$V - E + F = 2, \text{ 且}$$

$$qV = 2E = pF$$

兩式合併為：

$$\frac{2E}{q} - E + \frac{2E}{p} = 2$$

於是，

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$

其中 $E > 0$ ， $p \geq 3$ 且 $q \geq 3$ ，





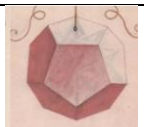
所以，

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

p	3	3	3	4	5
q	3	4	5	3	3

從上面的結果，可得到5種正多面體，以施萊夫利符號表示 $\{p, q\}$ ，各別是正三角形所組成的正四面體 $\{3, 3\}$ 、正八面體 $\{3, 4\}$ 與正二十面體 $\{3, 5\}$ ，還有正方形所組成的正六面體，和正五邊形構成的正十二面體 $\{5, 3\}$ ，為了設計單一的切割元件，我們先將5個正多面體的相關資料整理如下表1：

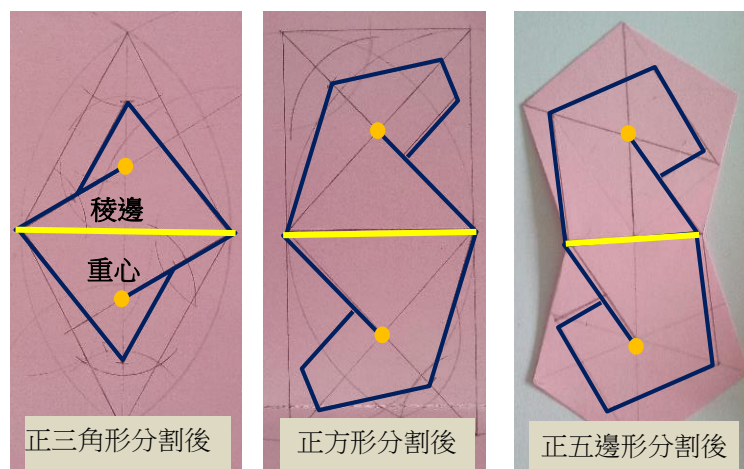
表 1 五種正多面體的頂點、邊、面

柏拉圖立體	圖形	頂點數	邊數	施萊夫利符號
正 4 面體		4	6	{3,3}
正 6 面體		8	12	{4,3}
正 8 面體		6	12	{3,4}
正 12 面體		20	30	{5,3}
正 20 面體		12	30	{3,5}

二、研究結果

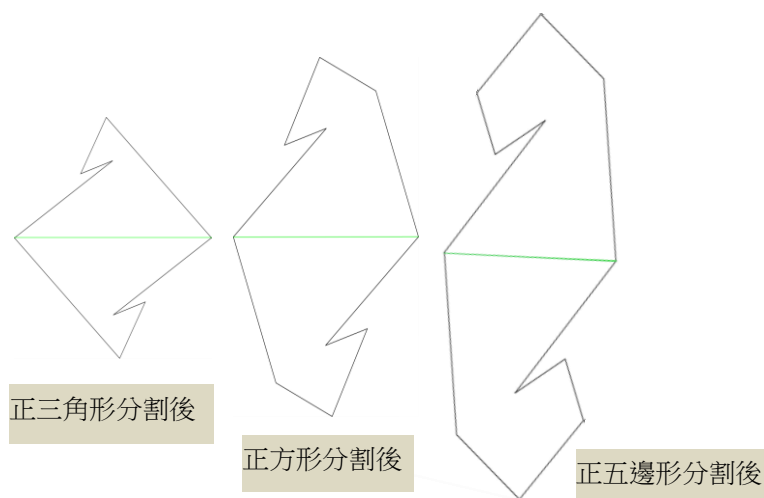
(一)分割面積的卡榫_重心

利用尺規作圖畫了三個不同的圖形分別是以**正三角形**、**正方形**、**正五邊形**為基底，以「邊」做為主體，基於每一條「邊」皆由兩個相鄰的面交接，所以用「面」來製作卡榫，就需要將面進行分割，**面積均分**是我們腦袋裡最先浮現的點子，因此初步利用正多邊形的**重心**來進行切割，尺規作圖畫出來的組合元件如下圖。

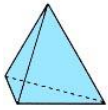
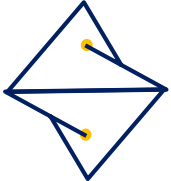


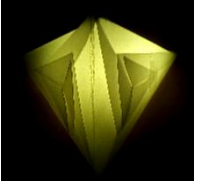

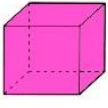
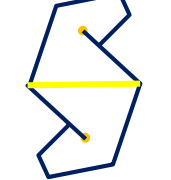




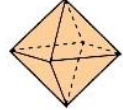
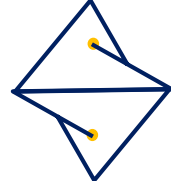


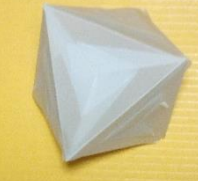


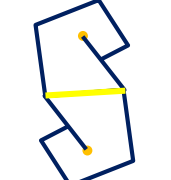





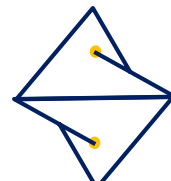






▲正多邊形手繪的結構元件元件

尺規作圖完成的三種單一切割元件的設計後，一一用描圖紙仔細裁減，並將面積切割元件逐一組裝完成各種正多面體。



作品圖表 2 單一切割元件的組合——以面為卡榫的正多面體

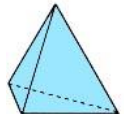
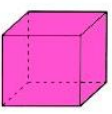
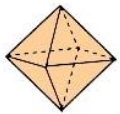
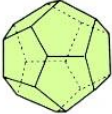

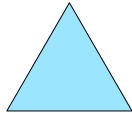

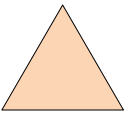
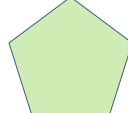
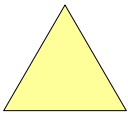
正多面體	切割元件	製作過程			
正 4 面體 					
正 6 面體 					
正 8 面體 					
正 12 面體 					
正 20 面體 					

利用切割元件組裝的正多面體成品非常特別，每個正多邊形上不僅有非常清楚的稜線，組裝過程因為旋轉而產生的光影交疊，形成特殊的紋路，這個單一元件分割面積進行卡榫，彼此間產生旋轉式的交疊，結果令人欣喜。

(二)研究一歸納整理

要組合一個正多面體，需要多少切割元件呢？從下表3，我們可以觀察出其中的關係：

表3 正n面體組合單一切割元件元件需求數

	正4面體	正6面體	正8面體	正12面體	正20面體
正n面體	 n=4	 n=6	 n=8	 n=12	 n=20
正m邊形	 m=3	 m=4	 m=3	 m=5	 m=3
總邊數	6	12	12	30	30
元件數	6	12	12	30	30

規律 1

假設切割正m邊形面積時，設計以「邊」為主的元件，組合時的秘訣，就是正n面體共有多少稜邊，就需要多少個切割元件。

因此，

結構元件需求數=正n面體的總邊數

規律 2

若從面積來看，每個切割元件扣除卡榫後，在組合時貢獻給正多面體的遮蔽面積都是原正m邊形的 $\frac{2}{m}$ 。

因此，假設正n面體是由正m邊形構成，共需r片切割元件組成，則n、m、r三者的關係可以寫成：

$$r = \frac{n}{\frac{2}{m}} = \frac{n \times m}{2}$$

例如：正12面體由正5邊形構成，

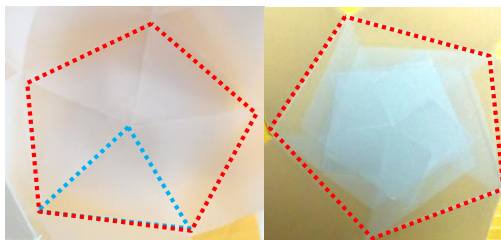
$$r = \frac{12 \times 5}{2} = 30$$

透過上，即可算出組成一個正12面體，需要30片正五邊形的切割元件。

(三)研究一問題討論

利用正多邊形的**重心**來進行切割柏拉圖立體的「面」製作卡榫，切割元件組合過程，可以清楚地看到在正多面體的內部觀察到每個面，皆均分成全等的等腰三角形。

還有，卡榫無論將**卡在內**或**卡在外**，正多面體的線條呈現都非常迷人，不過操作時，後者會比前者要容易組合。



▲卡榫在內

▲卡榫在外

第一次製作的切割元件，仍有許多需要修正的地方，以下就元件的修改上進行說明。

1. 製作材質

原先使用 110 磅市售的描圖紙製作，雖然透光度佳，裁切容易，但後來因為紙質過軟，造成組合上的困難，因此決定修改成較厚的粉彩紙或其他硬紙。

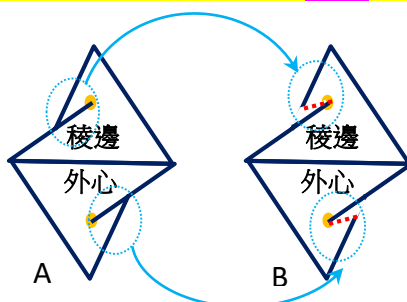
可惜，本以為利用較厚的粉彩紙或其他硬紙組合會更好，但卻容易破裂毀損，透光度也不佳，甚至嘗試過回收紙杯的材質，有礙於厚度規格不容易統一，都只好放棄。最後，找到 **PP 合成紙**，不過，厚度較大，即使用一般的剪刀或美工刀片都難以控制裁切後元件的品質，解決方案：

此後的研究作品多以 PP 合成紙，且用雷射雕刻切割完成。

2. 卡榫切口

組合過程也發現，平整的切口在多層次的重疊組裝之後，越來越厚以至於不容易鑲卡，因此切割元件的卡榫需要切口製造更多的空間，解決方案如下圖示：

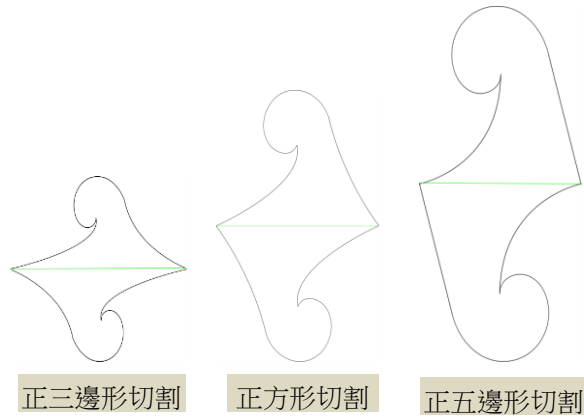
將原圖 A 的切口修改成 B 缺口可能比較好。



▲切割元件卡榫切口修正_以正三角

3. 卡樺外型最佳化

操作自由軟體 Inkscape，將卡樺外型進行修改，使除了上述的切口外，我們也利用線的節點修改，使切割元件的線條更平滑，修飾過的卡樺，控制圈數、發散度和內徑，切割元件在重心交接處，可以產生螺旋線的效果，最後的切割元件完稿如下圖所示。



▲切割元件外型最佳化結果

最終修正的切割元件組合出的正多面體成果如下：

作品圖表 4 面積切割元件雷雕組合作品

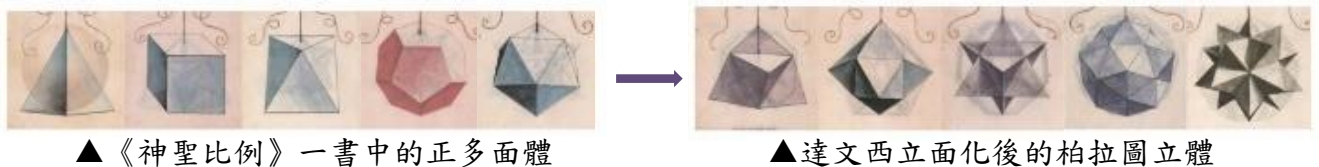
	正 4 面體	正 6 面體	正 8 面體	正 12 面體	正 20 面體
切割元件					
r	6	12	12	30	30
最佳化成果					

研究二、點數成星：利用單一結構元件，將多面體的面「立面化」。

一、研究過程

(一)有關於面的「立面化」

雖然「立面化」常見於建築設計或工業設計產品中，不過，最早提及立面化一詞的，是在帕西奧利及達文西的著作《神聖比例》一書。達文西於書中，也以正角椎體繪製了柏拉圖立體立面化的想像結果(如下所示)從他的作品中可以觀察，若利用正三角形進行結構元件的設計，構面出立面化的五個柏拉圖立體是可行的，其中，正 n 邊形立面化成正 n 角椎的圖示如下：



▲《神聖比例》一書中的正多面體

▲達文西立面化後的柏拉圖立體

(二)立面化的估算

首先，用正三角形(邊長為 a)進行正多面體每個正多邊形的立面化，立面化後，每個正角錐的高度(\overline{OH})如下：

1. 正三角形的立面化

$$\angle AOB = 120^\circ$$

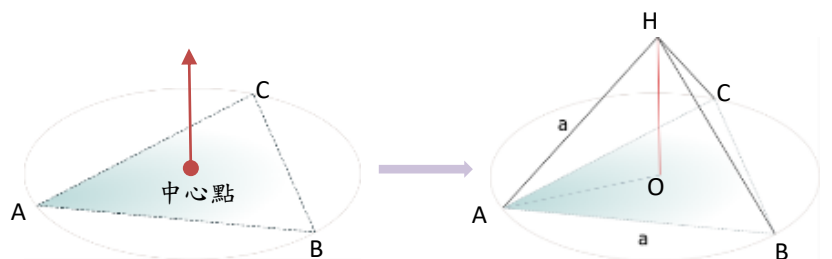
$$\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$$

$$\frac{\sin \angle AOB}{AB} = \frac{\sin \angle OBA}{OA}$$

$$\frac{\sin 120^\circ}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{OA} \quad \text{可得:}$$

$$\overline{OA} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad \text{依畢氏定理: } \overline{OA}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{AH}^2 \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2 + \overline{OH}^2 = a^2$$

$$\overline{OH}^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \rightarrow \overline{OH}^2 = \frac{2a^2}{3} \rightarrow \boxed{\overline{OH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a}$$



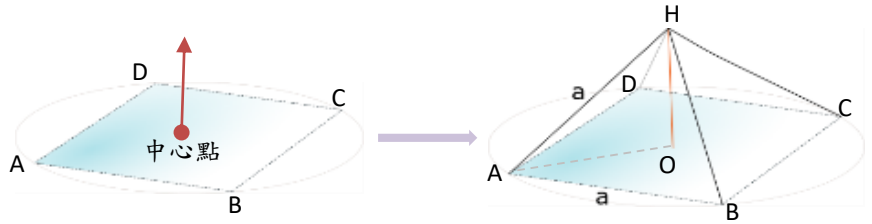
2. 正方形的立面化

正方邊形 ABCD 邊長為 a

在 $\triangle AOH$ 中

$$\overline{OH}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AO}^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} a^2$$



$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

3. 正五邊形的立面化

正五邊形 ABCDE 邊長為 a

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$\triangle AOB$ 為等腰三角形

$$\angle OAB = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$$

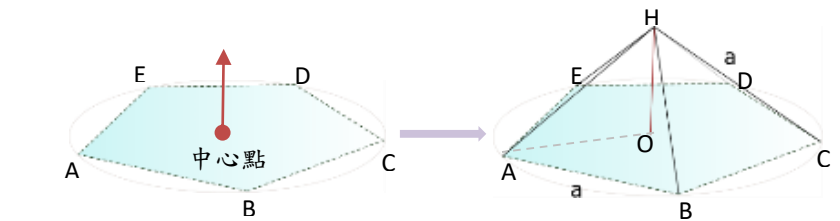
在 $\triangle AOH$ 中

$$\overline{AO}^2 = \frac{a}{2 \cos 54^\circ} = \frac{a}{2 \sin 36^\circ}$$

在 $\triangle AOH$ 中

$$\overline{OH}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AO}^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin 36^\circ}\right)^2$$



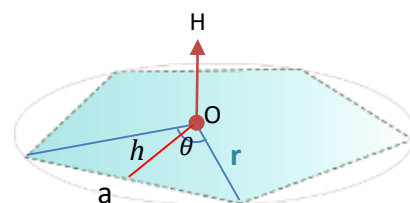
$$\overline{OH} = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2 \sin 36^\circ}\right)^2}$$

歸納整理

統整上述三個正多邊形立面化後的高度，我們還可以把邊長為 a 正 m 邊形視作圓 O 的圓內接正多邊形，已知圓周是 2π ，則正 m 邊形的每一中心角 θ 都是 $2\pi/m$ 。則半徑 r 、邊長為 a 、圓心距 h ，三者的關係可以寫成：

$$h = r \cdot \cos \frac{\pi}{m} = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{m}}$$

$$r = \frac{h}{\cos \frac{\pi}{m}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$$



而正 n 邊形立面化後的高度 $\overline{OH}^2 = a^2 - r^2$ ，可得：

$$\overline{OH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}\right)^2}$$

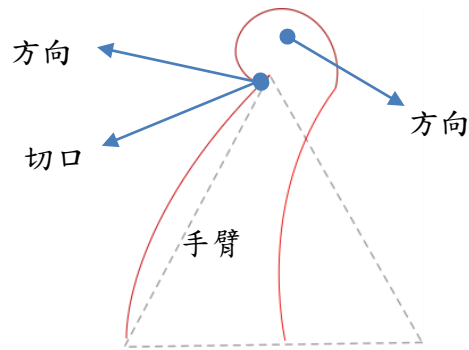
二、研究結果

(一) 結構元件設計

1. 設計原理

類別	正三角錐	正四角錐	正五角錐
展開圖			
設計原理			
設計說明	<p>1. 卡榫設計</p> <p>單一結構元件的組合需要卡榫處，選擇正角錐的頂點當卡榫交接處，從開圖可清楚知道交接點位置，這樣的結構元件也可以獨自組成一個正角錐體。</p> <p>2. 面面相扣</p> <p>從研究一可以知道元件彼此組合相扣的空間很重要，所以元件與元件之間交錯的空間必須先預留邊長的一半。右圖紅線為設計方式的舉例。</p>		

歸納整理



在多次嘗試的錯誤經驗累積，元件設計有幾個要特別留意的重點，紀錄如下：

- **方向：**元件的卡榫方向與卡榫手臂同一側(手臂在左，卡榫向左)會比不同側效果好。
- **切口：**切口的設計，可以容納數片元件重疊的厚度，減少組合變形件的機會。
- **接頭：**接頭過小，元件彼此不容易固定，接頭過大，則容易造成組合旋轉時的困難度，組裝時，因為不容易控制內部的正三角形，也較容易錯亂。以下圖芋葉元件做為舉例。



芋葉元件



組成正 20 面體

- **手臂：**元件的手臂寬度不能過細，容易在雷射的時候斷裂；另外過粗也不恰當，以下列獨角獸元件為例，除了組合困難，免強組合完成後，也很難辨識原來的正多面體型態。



艷紫荊元件 過細



獨角獸元件 過粗

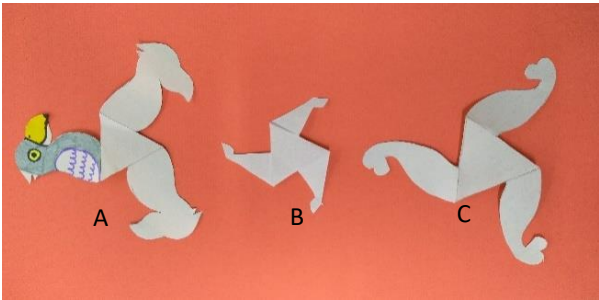
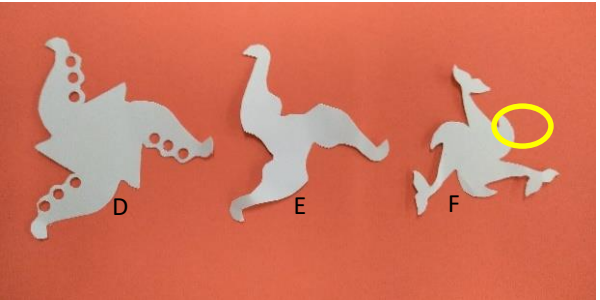
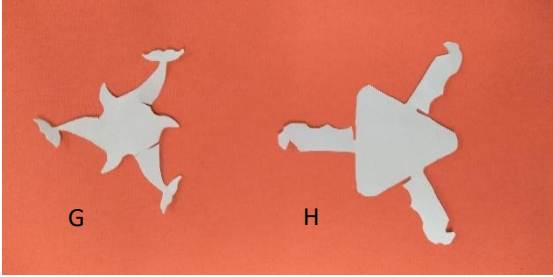
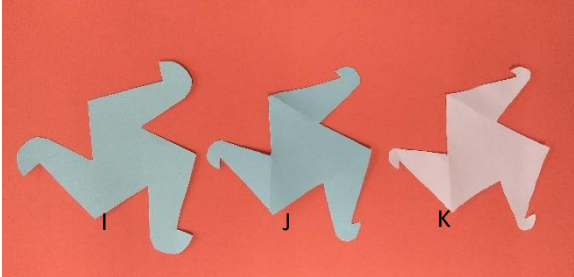
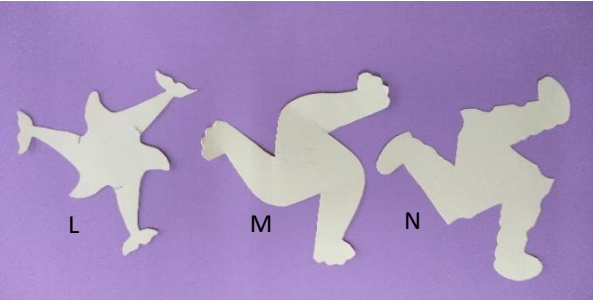


正 4 面體 難辨識

2. 試誤紀錄

從嘗試錯誤的過程中，失敗了許多設計的圖稿，每一次都抱著希望，但是常常得到的是失落。不過，我們相信每一次的錯誤，都能帶給我們新的討論空間，以下是這些日子，我們一起將結構元件設計進展到最佳化的紀錄說明。

作品圖表 5 試作記錄分析圖表，以正三角形為例

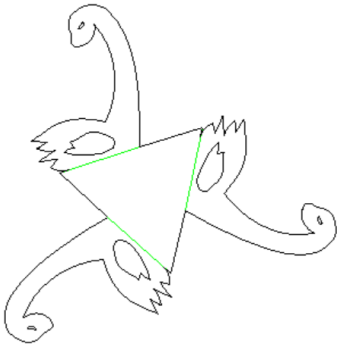
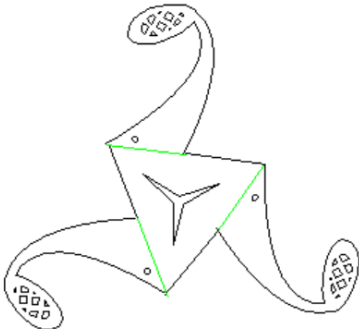
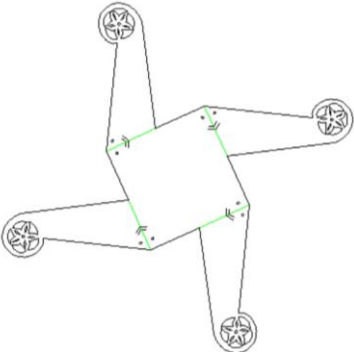
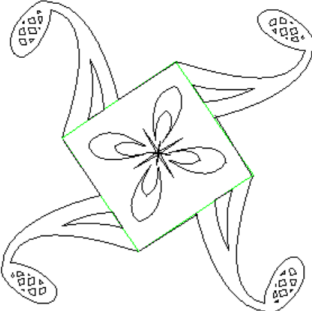
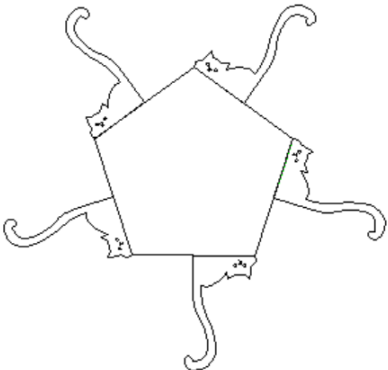
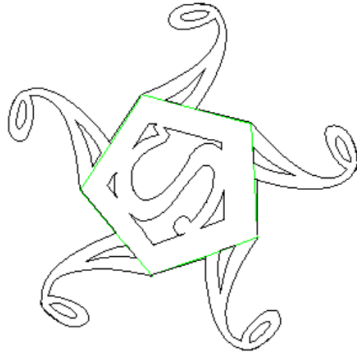
	
<p>紀錄 1:</p> <p>圖 A:卡榫太長，扣起來會變形</p> <p>圖 B:卡榫處的角度大於 90°，以致無法相扣。所以卡榫的角度需小於 90 度，才可完全卡緊。</p> <p>圖 C: 卡榫的大小有誤差，導致無法穩定。</p>	<p>紀錄 2:</p> <p>圖 D:卡榫不夠有力，需要修正。</p> <p>圖 E:交接處因為構圖的問題，無法卡緊。我們覺得改用鑲嵌的方式來繪稿，可以問題這個解決。</p> <p>圖 F:海豚背鰭凸出三角形外，扣不起來。</p>
	
<p>紀錄 3: 鑲嵌的運用</p> <p>圖 G:凸出的背鰭修到三角形內，鑲嵌後，扣起來較緊。</p> <p>圖 H:因為角度問題，以五片相扣時，會導致卡榫無法緊扣而鬆開。</p>	<p>紀錄 4: 角度 60°、70°、80°測試</p> <p>圖 I、圖 J、圖 K:</p> <p>做此比較的是為了測試哪一個度數的缺口做成的卡榫最合適，經三者比較後，選了 60°的。</p>
	<p>紀錄 5: 初步完成可用設計</p> <p>圖 L: 將圖 G 調整完成，完成海豚。</p> <p>圖 M、圖 N:</p> <p>恐龍雖然可以成功相扣，但凹陷處在面面扣時，無法扣出好看的形狀，得再嘗試構圖方面。</p>

(二) 立面化成果

1. 結構元件 E 化

成功設計的結構元件，使用 Inkscape 描繪，以邊為單位，透過旋轉鏡射等功能圍成正三角形，正方形或正五邊形，因篇幅有限，以下將設計的作品舉例呈現如下表：

作品圖表 6 Inkscape 描繪結構元件作品

元件名稱	天鵝湖	元件名稱	網球拍
電腦繪圖作品		電腦繪圖作品	
元件名稱	鼠年數年	元件名稱	無限符號
電腦繪圖作品		電腦繪圖作品	
元件名稱	貓的報恩	元件名稱	無限超人
電腦繪圖作品		電腦繪圖作品	

2. 描繪出達文西的想像

因為設計的元件款式很多，我們選了不同形狀裡最美麗的元件組合出以下的作品，其餘的設計，希望有機會可以在現場向各位老師呈現：

作品圖表 7 組裝成品與達文西立面化的柏拉圖立體對照

項目	結構元件	作品實拍	達文西的想像
正4面體			
正6面體			
正8面體			
正12面體			
正20面體			

歸納整理

1. 組成立面化的柏拉圖立體，需要幾個結構元件呢？

結構元件的設計以面為主，所以每個正 n 面體，都 n 片的正 m 邊形的結構元件，就可以組成立面化的正多面體喔！

2. 結構元件

結構元件的設計基礎，是以正角錐的展開圖為主。因此，每一個單一元件，也可以獨立組成一個正角錐體。



正三角錐 網球拍



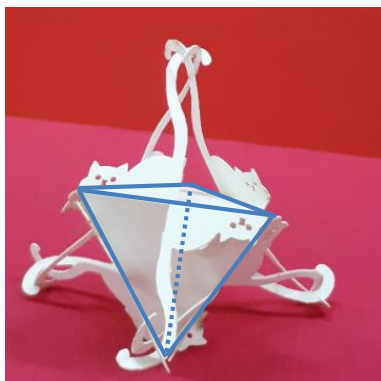
正四角錐 無限符號



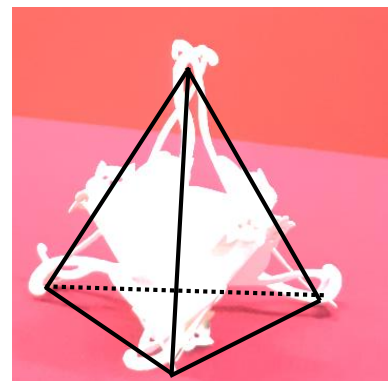
正五角錐 無限超人

3. 對偶多面體

動手組合完成至多種正多面體，彷彿可以放射出光芒一般，看起來是不是跟星星一樣美麗？如果將作品卡榫的位置當成**頂點**來進行觀察，是不是會覺得似曾相識？以下讓我們一起觀察下面的正四面體的圖形變化。



立面化正 4 面體 / 貓的報恩



可看成另一個新的正 4 面體

以同樣的視角，來觀察其他四個正多面體立面化後的變化，一樣可以觀察到有新的多面體的樣態，正 6 面體立面化後，可以觀察出是正 8 面體，而正 8 面體立面化後又形成正 4 面體的模樣，上網查了資料，發現這就是所謂的對偶多面體，同理，我們也可從作品的組合中觀察到正 12 面體和正 20 面體互為彼此的對偶多面體。

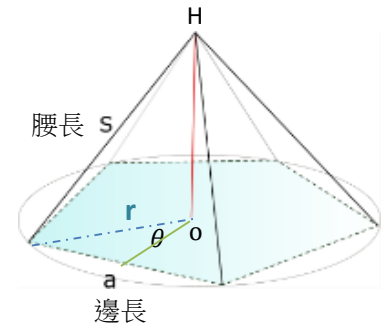
研究三、延伸應用：修改結構條件，嘗試不同高度的立面化效果。

一、研究過程

(一)不同高度的運算

依據達文西的作品，主要是以正三角形為側面的正角錐體設計為立面化，如果改變立面化的高度，將正三角形延伸成不同腰長的等腰三角形，結果又是如何呢？

由研究二的歸納整理可以知道，要在平面中心點產生高度 (\overline{OH})，則側面等腰三角形的腰長 S 、外接圓半徑 r 、正多邊形邊長 a 三者的關係可以寫成： $S > r$ ，



$$S > \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$$

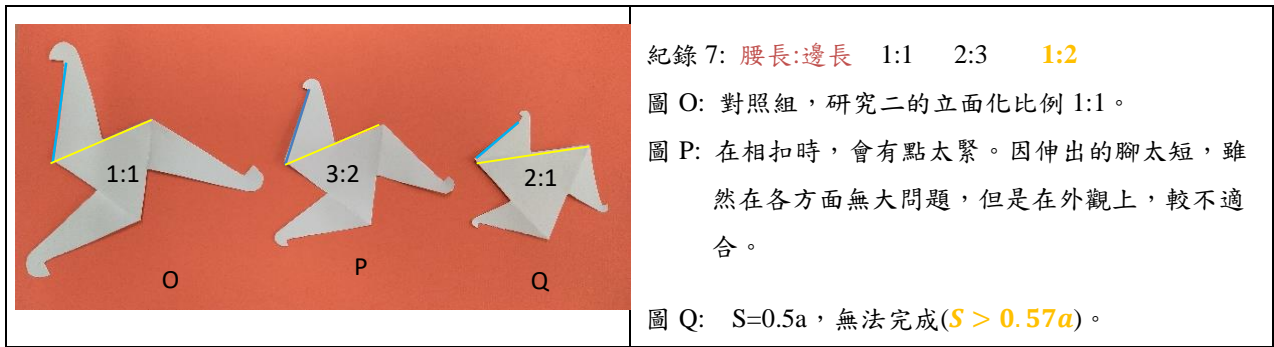
類別	正三角形	正方形	正五邊形
$\theta = \frac{\pi}{n}$	60°	45°	36°
等腰三角形 腰長限制	$S > \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$ $S > \frac{a}{2 \sin 60^\circ}$ 概算： $S > 0.57a$	$S > \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$ $S > \frac{a}{2 \sin 45^\circ}$ 概算： $S > 0.7a$	$S > \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$ $S > \frac{a}{2 \sin 36^\circ}$ 概算： $S > 0.85a$

依據上表的整理，可以觀察到，正 m 邊形的中心角 $\frac{\pi}{m}$ 越大，腰長 S 則越大，而為的設計時方便換算，我們用電算機將實際的比值進行概算，以供參考。

(二)試誤作品

開始思考不同高度所造型的立面效果，從研究二中的實作過程，可以很清楚知道，卡榫的交點位置就是控制立面高度的主要因素，因此，開始以不同比例進行了多次的試誤測試，以正 n 邊形的高過程紀錄如下：

作品圖表 8 不同高度的立面效果嘗試試驗，以正三角形為例



在研究三中, 元件設計時, $\frac{s}{a} > 1$ 一定可行, 但是當 $\frac{s}{a} < 1$ 時, 適用於正三角形的腰長、邊長比, 未必適用於正方形和正五邊形的元件, 這一點可以從研究二的實作與觀察得知, 同一個 $\frac{s}{a}$ 比例的條件下, 立面化高度正三角形 > 正方形 > 正五邊形。

二、研究結果

(一) 不同高度結構元件 E 化

用不同的 $\frac{s}{a}$ 設計的結構元件, 以邊為單位, 透過旋轉鏡射等功能圍成正三角形、正方形、正五邊形, 因篇幅有限, 將設計的作品舉例呈現如下表:






作品圖表 9 Inkscape 描繪結不同比值的構元件作品

元件名稱	遊戲海豚	元件名稱	考古化石	元件名稱	天堂鳥
電腦繪圖作品		電腦繪圖作品		電腦繪圖作品	
元件名稱	蝴蝶寶盒	元件名稱	芋葉(修正版)	元件名稱	豔紫荊
電腦繪圖作品		電腦繪圖作品		電腦繪圖作品	

(二) 不同高度結構元件

利用不同高度設計了不同的元件，組合成果如下表，選擇的作品多是以 $\frac{s}{a} < 1$ 為主，主要原因是因為我們準備的 100 張 PP 合成紙已經快要用罄，在報告書繳交期限前，新的還沒有到貨，因此只能先選擇較小的元件完成雷射切割， $\frac{s}{a} > 1$ 的成品有機會會場再展出。

作品圖表 10 以不同腰長與邊長比設計的元件組合

項目	作品實拍		
正 4 面體		元件名稱	考古化石
		腰長:邊長	$\frac{s}{a} = \frac{5}{7}$
正 6 面體		元件名稱	蝴蝶寶盒
		腰長:邊長	$\frac{s}{a} = \frac{10}{13}$
正 8 面體		元件名稱	遊戲海豚
		腰長:邊長	$\frac{s}{a} = \frac{5}{7}$
正 12 面體		元件名稱	天堂鳥
		腰長:邊長	$\frac{s}{a} = \frac{7}{8}$
正 20 面體		元件名稱	考古化石
		腰長:邊長	$\frac{s}{a} = \frac{5}{7}$

伍、研究探討

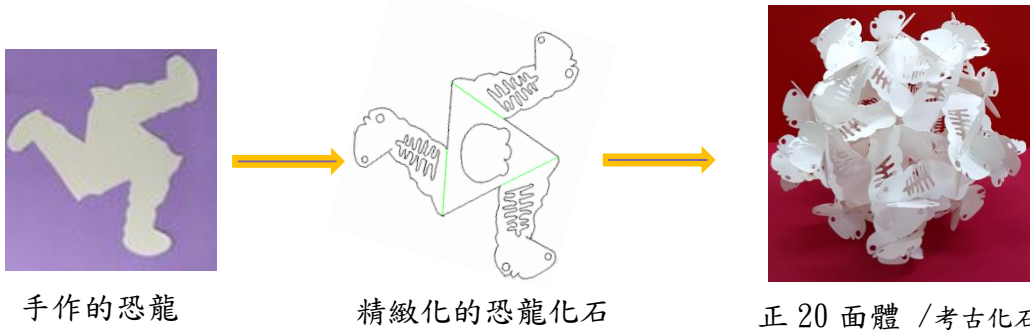
一、製作過程的問題探討

(一)元件切割降低製作誤差

因為同樣的元件要反覆剪割很多次，所以我們剛開始的設計線條非常簡單，元件也要很大，否則太精細不但容易因為手工切割造成誤差，也會花費許多時間剪裁。後來，老師建議我們用繪圖軟體搭雷射雕刻，解決了「製作誤差」這個的難題。



此外，有了電腦繪圖和雷雕，就可以盡情創作，不僅精密度提高許多，許多細微的設計也都能實現，從下面的恐龍進化圖板，就可以看出這其中的差異和改進。



(二)雷射切割功率與速率

雷射切割功率的測試對我們也是一大考驗，學校的雷雕機，多是用來切割木片居多，我們要切的紙片厚度只有 0.3mm 的紙，確實是一大考驗，我們準備的 PP 合成紙也因此成了嘗試錯誤的學費，損失了不少。

作品圖表 11 雷雕機切割與雕刻測試

切割測試(黑線切割)				雕刻測試(綠線摺痕)			
<p>R 成功 S 未切斷 T 失敗</p>				<p>U 裂開 V 恰好 W 不明顯</p>			
速率:	100	80	60 mm/s	速率:	170	120	100 mm/s
功率:	35	30	25 %	功率:	15	13	11
測試結果:選擇速度:90mm/s 功率:33% 成功切割,焦痕低				測試結果:選擇速度:120mm/s 功率:13% 摺痕深度剛好,可以加速組合流程			

(三)PP 合成紙不易買到

市面上的 PP 合成紙多是賣給工廠生產線使用，沒有分裝和零賣，後來打電話給開模的老闆，她知道用在科展，很樂意賣給我們一些，可惜我們沒有來的及切割完成所有的設計，不過，老闆這次會賣給我們更大張的 PP 合成紙，期待之後切出更大的作品吧!

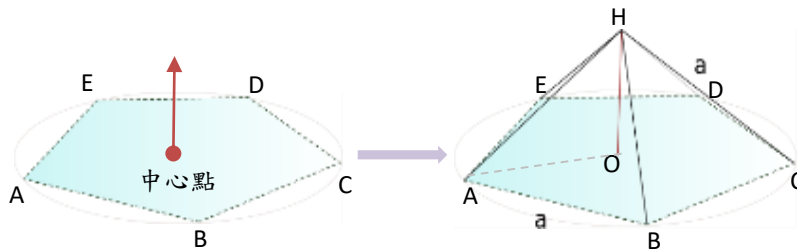
二、研究結果探討

(一)研究一:面面相扣~完整的面積切割元件

若從面積來看，每個利用重心切割完成的元件，在扣除卡榫後，必須貢獻給正多面體的遮蔽面積都是原正 m 邊形的 $\frac{2}{m}$ 。因此，由正 m 邊形構成的正 n 面體，共需 r 片

切割元件組成，則 n 、 m 、 r 三者的關係可以寫成： $r = \frac{n}{\frac{2}{m}} = \frac{n \times m}{2}$

(二)研究二:點數成星~呼應達文西的立面化



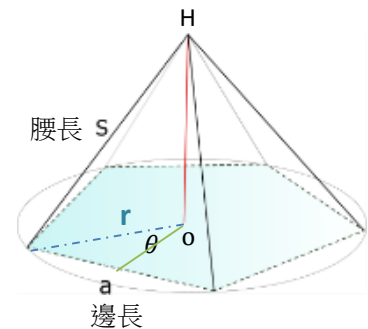
正 m 邊形組成的正多面體立面化高度， $\overline{OH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}\right)^2}$ ，當邊長固定：

正三角形的 $\overline{OH} >$ 正方形的 $\overline{OH} >$ 正五邊形的 \overline{OH}

(三)研究三:延伸運用~多樣立面化藝數星球













當正角錐的側面邊長由正三角形的 a 換成等腰三角形的腰長 S ，則：正 m 邊形的中心角 $\frac{\pi}{m}$ 越大，腰長 S 則越大。

$$S > \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$$



最後，將上列三個研究的數形關係與各個元件作品整理如下表：

表 12 研究一~三作品整理

類別	研究一:面面相扣	研究二:點數成星	研究三:延伸應用
正 4 面 體			
正 6 面 體			
正 8 面 體			
正 12 面 體			
正 20 面 體			
數 論	<p>正 m 邊形組成正 n 面體的切割元件數 r:</p> $r = \frac{n}{2} = \frac{n \times m}{2}$	<p>邊長 a 的正 n 面體以正三角形立面化高度:</p> $\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}\right)^2}$	<p>邊長 a 的正 n 面體以等腰三角形立面化的腰長 S:</p> $S > \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$

三、剪紙成心，點數成星

最後，同學們都在想，做了這麼多美麗的正多面體，還能再做些什麼？

我們先利用重心剪出切割元件，再與達文西的畫作連結，將立面化柏拉圖立體實體化，我們都非常樂見這些美麗的幾何立體結構，能真正放出光芒。於是，當生活科技老師邀請我們把作品分享給更多人，要讓它與機電整合成一個新興科技的跨域課程，我們都非常驚喜，一想到有朝一日會有更多喜歡美術又熱愛數學的人看到這些的作品，手再痛也都值得！

這或許是我們額外的收穫，寫到這裡，也要和各位說晚安了，願達文西筆下的這些美麗的柏拉圖星球能伴你一夜好夢！

作品圖表 13 點亮藝數星球

元件名稱	點亮前	點亮後
正 12 面體 (鼠年數年)		
正 12 面體 (無限超人)		

陸、結語

有人說，科技始終來自人性，在這次的實作、學習與研究的過程中，我們真正體會到生活就是許多科學的體現，國中課業雖然繁重，卻也因這樣的學習歷程，讓讀書變得一點都不無趣，我們也在不斷嘗試錯誤的過程中學到許多：

一、做中學，學中做：

一百多個日子，每次一點時間的討論，透過合作，一起分工合作，失敗也不退縮，我們學習到很多有趣的、無法想像的東西，也開始知道怎麼把自己想的，變成真的，體會到創新的重要性與可貴。

二、設計軟體和科技運用的增能：

嘗試錯誤，一錯再錯的時候，雖然很無奈，但幸好網路無遠弗屆，我們可以一直受挫，卻也可以一直找方法學習，解決問題，或許還有不足，但學無止境，我們很勇敢，會一直繼續。

三、善用知識、舉一反三：

古人說，書到用時方恨少，果真如此！原以為自己的數學還不錯，沒想到最後上網查，翻課本參考資料一點都沒少做，也讓我們用更謙卑的心去看待數學這門科學，感謝它無限賜與的驚喜。

四、感謝師長父母的支持：

謝謝同學們的陪伴，在困難的時候一起打氣，謝謝生活科技老師的協助，更謝謝老師的引導，讓我們能恣意地做喜歡的事，任性地停留在自己想像裡那個簡單又美麗的數學世界。

從進國一，我們就一直是一起學習美術的好的夥伴，有機會用美術視線，看見更多不可思議的數學之美，讓數學的學習之路充滿難忘的色彩，這趟旅程我遇上了達文西，也遇見了柏拉圖，我覺得，這已經為我們的國中生活留下美好又難忘的回憶。

柒、參考資料及其他

1. 國中數學 翰林版 七年級下冊 第 3 章 比例式
2. 國中數學 翰林版 八年級上冊 第 2 章 平方根與勾股定理
3. 國中數學 翰林版 八年級下冊 第 2 章 尺規作圖
4. 國中數學 翰林版 九年級上冊 第 1 章 相似形
5. 國中數學 翰林版 九年級下冊 第 2 章 生活中的立體圖形
6. 高中數學 龍騰版 二年級上冊 三角函數基本定理
7. 洪明譽，編織的藝數 2，2018，全華圖書。
8. 余曉嵐，別被自己的眼睛騙了-神奇的幾何學，2014。泛科學網站參考資料：
<https://pansci.asia/archives/70538>
9. Inkscape 學習網站：<https://www.youtube.com/watch?v=CgKH9DcSZXY>
10. Rdworks 學習網站：<https://www.youtube.com/watch?v=9dz8w9lrHc>
11. 雷射雕刻功率與速度，參考網站：<https://www.lasermaker.com.cn/videos.html>
12. 對偶多面體，參考資料：<https://m98.nthu.edu.tw/~s9821103/dg11/dual.htm>