

嘉義市第 38 屆中小學科學展覽會

作品說明書

# 「Spot It」

## 哆寶桌遊之探討與延伸



科 別：國民小學組

組 別：數學科

作品名稱：「Spot It」哆寶桌遊之探討與延伸

關 鍵 詞：排列組合、桌遊、3D 列印

## 摘要

哆寶桌遊是卡牌中有許多圖案的一款桌遊，我們藉由遊戲去發現到哆寶的問題，並設計實驗來尋求問題的解答，一步一步發現哆寶的小秘密。

從研究一中找到原哆寶桌遊「隨機抽取兩張牌，都會有 1 個相同圖案」的原理與設計法

我們利用了許多「法」來延伸哆寶桌遊，將遊戲條件更改為「每張牌有  $n$  個圖案，隨機抽取兩張牌，都會有 2 個個以上的相同圖案」的情形，並找出其原理。

接著延伸到，「每張牌有  $n$  個圖案，隨機抽取兩張牌，都會有  $x$  個相同圖案」的情形，並推論  $n$  與  $x$  的公式

最後，我們將上述資料做整理，並改變新玩法，利用校內 3D 列印機製作 3D 實物，讓更多人可以參與此遊戲，也讓哆寶變得更有趣。

## 壹、 研究動機

我們在下課時看見同學在玩一款叫「哆寶」的桌遊，這款桌遊有許多卡牌，卡牌內有許多圖案，隨機抽兩張牌會發現，卡牌內都一定會有一個相同的圖案，而且只會有一個相同的圖案，我們覺得很神奇，想了解其中的原理是什麼，於是我們就去問老師這之中的原理是什麼及贏得勝利的方法，老師就邀請我們一起做科展，可以探討哆寶卡牌中的規律以及小秘密，藉由玩遊戲的過程，讓我們一步一步的破解這款桌遊。

## 貳、 研究目的

- 一、研究一：探討哆寶牌組的設計概念以及相關原理。
- 二、研究二：探討並設計「隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同的圖案」的牌組及公式。
- 三、研究三：探討並設計「隨機抽取兩張牌，都有 3 個相同的圖案」的牌組及公式。
- 四、研究四：將上述研究的牌組特性做整理，並延伸到「每張牌有  $n$  種圖案，隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案」的牌組及公式。
- 五、研究五：運用上述研究資料，改編玩法並設計卡牌。

## 參、 研究設備及器材

- 一、基本設備：Spot it 哆寶桌遊、筆記本、計算紙、筆、黑板。
- 二、電腦相關：3D 列印機、3D 列印機線材、Tinkercad 線上建模網站、Word（整理資料、撰寫報告、表格製作）。
- 三、製作牌組工具：裁紙刀、切割墊、包裝盒、高磅數紙張、輕質黏土。

## 肆、 研究過程或方法

### 一、 研究一：探討哆寶牌組的設計概念以及相關原理。

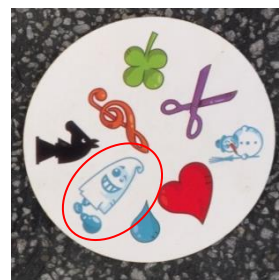
#### （一） 哆寶遊戲規則

1. 遊戲介紹：這是一款訓練眼力、觀察力、敏銳度的一款遊戲。
2. 遊戲配件：

此款桌遊共有 55 張卡牌，有 57 種圖案散佈在這 55 張卡牌中，每張卡牌中都有 8 種不同的圖案（如下圖 1、2）。

#### 3. 遊戲規則：

兩人手中拿一疊卡牌，數到 3 後隨機抽取一張卡牌翻到正面，看誰先找出這兩張卡牌中相同的圖案，先指出（或說出）圖案者獲勝，獲勝者可拿走卡牌，再繼續進行下一場遊戲，直到有一方卡牌用完為止。如下圖 1、2，先指出相同圖案「白色幽靈」即獲勝。












































#### （二） 名詞解釋：我們將牌卡的資訊分成以下五大類，以原卡牌的設計為例：

















1. **每張牌出現的圖案數**：每張卡牌上有多少個圖案，原卡牌有 8 個，最多 2 個延伸到 n 個。
2. **每個圖案出現次數**：將全部卡牌所出現的圖案做統計，找出每個圖案所出現的次數。原卡牌每個圖案出現次數不同，有 6~8 次的（以下研究有統計出。）

3. **共有幾張牌**：整副牌組最多可以設計出幾張牌，原卡牌有 55 張牌。
4. **共有幾個圖案**：計算全部卡牌總共出現幾種不同的圖案，原卡牌共出現 57 種不同的圖案。
5. **兩張牌中有幾個相同的圖案**：原卡牌設計為「隨機抽取兩張牌中，都有 1 個相同的圖案」，我們將此延伸，可以找出「隨機抽取兩張牌中，都有 2 個相同的圖案」，甚至延伸到 3 個、4 個、...直到「隨機抽取兩張牌中，都有 x 個相同的圖案」。

(三) 圖案統計：

1. 我們發現每個圖案會分布在不同的卡牌中，因此我們統計每個圖案使用的次數，如下表可知，哆寶卡牌所使用圖案共有 57 種，大多數的圖案都出現 8 次，也有出現 7 次或 6 次的圖案。**我們猜測，如果利用出現次數較少的圖案，還可以做出更多卡牌**，卡牌數可以超過 55 張（哆寶卡牌只有 55 張）。

圖案種類									
出現次數	8	8	8	7	8	6	8	8	
圖案種類									
出現次數	8	8	8	8	8	8	8	7	8
圖案種類									
出現次數	7	7	7	8	8	8	8	7	
圖案種類									
出現次數	8	7	8	8	8	8	7	7	
圖案種類									
出現次數	8	7	8	8	8	6	8	8	

圖案種類									
出現次數	8	8	8	7	8	8	8	8	
圖案種類									
出現次數	8	7	8	8	8	8	8	8	

(四) 探討「每張牌不同圖案數」的公式。

- 基於上述猜測，我們開始研究卡牌設計的原理，探討「隨機抽取兩張牌，都有 1 個相同的圖案」的原理，但因每張牌的數量及圖案數實在太多，我們很難去發現其中的規律或變化，因此我們將條件縮到最小（每張牌只有 2 個圖案的情形），慢慢將規則放大（每張牌有 3 個、4 個、...、8 個等圖案的情形），找出其中的規律。
- 為了方便研究，圖案就不一一手繪，改為數字代替，例如數字 1 就是第一個圖案，數字 2 就是第二個圖案...此以類推。
- 每張牌有 2 個圖案的情形**，如下圖(虛線框框內為卡牌，長方形框內為圖案)：

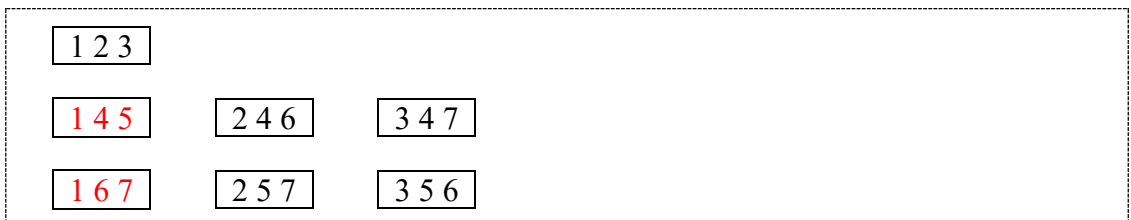


(1) 卡牌內容：

每張牌 2 個圖案、每個圖案重複 2 次，共有 3 個圖案、共有 3 張牌。

(2) 發現 1：很簡單，還沒看出什麼規律。

- 每張牌有 3 個圖案的情形**，如下圖：



(1) 卡牌內容：

每張牌 3 個圖案、每個圖案重複 3 次，共有 7 個圖案、共有 7 張牌。

(2) 發現 1：第一張牌就假設是 123，再由 1、2、3 分別列出更多牌。

(3) 發現 2：由分出來的”1”開始列出更多圖案（4~7），直接依序排進去，如紅字處，我們稱為「順序法」。

(4) 發現 3：再將 4~7 的圖案，交錯列入 2.3 的牌裡面。

5. 每張牌有 4 個圖案的情形，如下圖：

1 2 3 4			
1 5 6 7	2 5 8 11	3 5 10 12	4 5 9 13
1 8 9 10	2 6 9 12	3 6 8 13	4 6 10 11
1 11 12 13	2 7 10 13	3 7 9 11	4 7 8 12

(1) 卡牌內容：

每張牌 4 個圖案、每個圖案重複 4 次，共有 13 個圖案、共有 13 張牌

(2) 發現 1：首先如上，假設第一張牌為 1234，再使用「順序法」，將 5~13 依序排進以 1 為首的卡牌中，完成紅字處的卡牌。

(3) 發現 2：將 5、6、7 直接填到以 2、3、4 為首的卡牌中，如上棕字處。

(4) 發現 3：利用「交錯法」，發現交錯排列的技巧，排列技巧 1：例如將 8.9.10 這三個數字排進去的時候，第二列排 8.9.10，第三列排 10.8.9，第四列排 9.10.8（第一個數字 8 一直後退一格，其他數字跟著動。），如上藍字處。

(5) 發現 4：排列技巧 2，將接下來排進去的將 11.12.13 這三個數字排進去時，第二列排 11.12.13，第三列排 12.13.11，第四列排 13.11.12，（第一個數字 11 一直後退兩格，其他數字跟著動。），如上綠字處。

6. 每張牌有 5 個圖案的情形，如下圖：

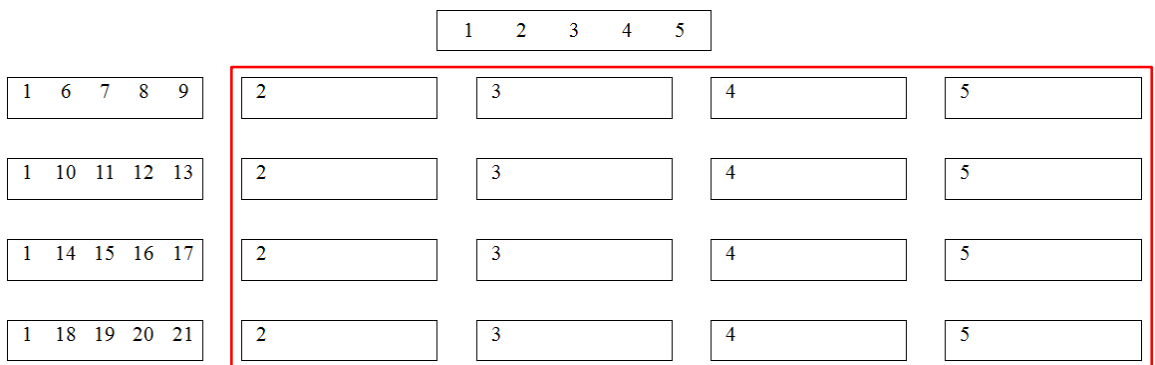
		1 2 3 4 5		
1 6 7 8 9	2 6 10 14 18	3 6 11 16 21	4 6 12 17 19	5 6 13 15 20
1 10 11 12 13	2 7 11 15 19	3 7 10 17 20	4 7 13 16 18	5 7 12 14 21
1 14 15 16 17	2 8 12 16 20	3 8 13 14 19	4 8 10 15 21	5 8 11 17 18
1 18 19 20 21	2 9 13 17 21	3 9 12 15 18	4 9 11 14 20	5 9 10 16 19

(1) 卡牌內容：

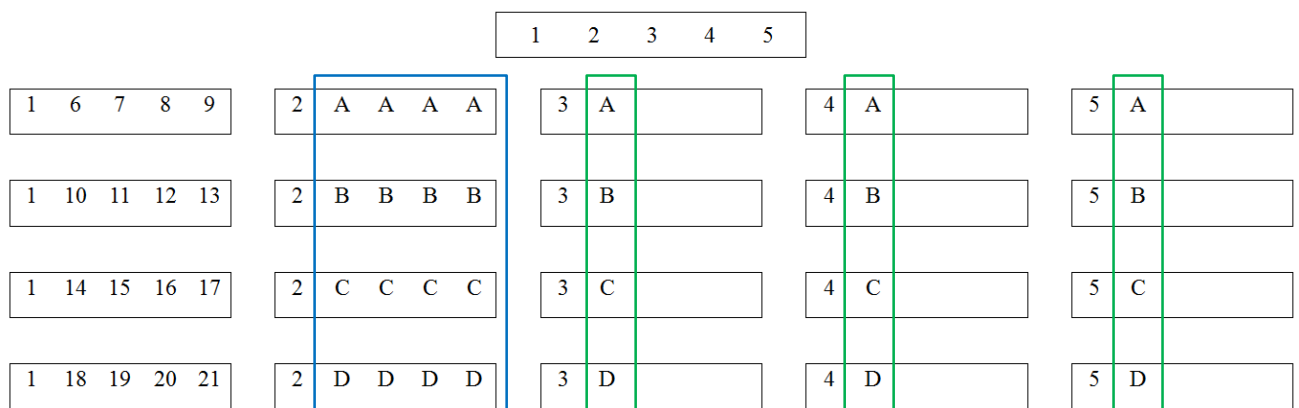
每張牌 5 個圖案、每個圖案重複 5 次，共有 21 個圖案、共有 21 張牌。

(2) 發現 1：「交錯法」使用有盲點。原因：用交錯法時，10.11.12.13 要後退一格（沒問題），但 14.15.16.17 要後退兩格，就會發現重複情況，例如第一次後退為，16.17.14.15，第二次後退變成 14.15.16.17，就重複了，交錯法失敗。

(3) 發現 2：改用「替代法」，如下圖：紅色框框處要將 6~9、10~13、14~17、18~21 排進去，又互相不能重複。



因此先將它們各取代號為 ABCD（6、10、14、18 為 A，7、11、15、19 為 B，8、12、16、20 為 C，9、13、17、21 為 D），然後排排看，直排不能相同（因為 2、3、4、5 已經相同了），橫排僅有一組可以相同（皆排在 2 的後面）如藍框處。其餘部分 3、4、5 的第一個數字，放依序放 ABCD，可確認每一張卡牌都有相同的 1 個圖案，如綠框處



最後，將其他空格子中填入 ABCD，且直排、橫排都不能重複到，填完結果如下圖棕框處。最後再將 ABCD 換成原本 6~21 的數字即可。

1 2 3 4 5				
1 6 7 8 9	2 A A A A	3 A B C D	4 A C D B	5 A B D C
1 10 11 12 13	2 B B B B	3 B A D C	4 B D C A	5 B A C D
1 14 15 16 17	2 C C C C	3 C D A B	4 C A B D	5 C D B A
1 18 19 20 21	2 D D D D	3 D C B A	4 D B A C	5 D C A B

7. 每張牌有 6 個圖案的情形，如下圖：

1 2 3 4 5 6					
1 7 8 9 10 11	2 7 12 17 22 27	3 7 16 20 24 28			
1 12 13 14 15 16	2 8 13 18 23 28	3 8 12 21 25 29			
1 17 18 19 20 21	2 9 14 19 24 29	3 9 13 17 26 30			
1 22 23 24 25 26	2 10 15 20 25 30	3 10 14 18 22 31			
1 27 28 29 30 31	2 11 16 21 26 31	3 11 15 19 23 27			
4 7 15 18 26 29	5 7 14 21 23 30	6 7 13 19 25 31			
4 8 16 19 22 30	5 8 15 17 24 31	6 8 14 20 26 27			
4 9 12 20 23 31	5 9 16 18 25 27	6 9 15 21 22 28			
4 10 13 21 24 27	5 10 12 19 26 28	6 10 16 17 23 29			
4 11 14 17 25 28	5 11 13 20 22 29	6 11 12 18 24 30			

(1) 卡牌內容：

每張牌 6 個圖案、每個圖案重複 6 次，共有 31 個圖案、共有 31 張牌

(2) 發現 1：利用「順序法」與「交錯法」即可。每個紅字都可以看到後退一格的軌跡，12 在的 2 大組的時候在第一格、12 在的 3 大組的時候在第二格(後退一格，以此類推。)，13 在的 2 大組的時候在第一格、13 在的 3 大組的時候在第三格(後退兩格，以此類推。)



8. 每張牌有 7 個圖案的情形，如下圖：

1 2 3 4 5 6 7						
1 8 9 10 11 12 13	2 8 14 20 26 32 38	3 8 15 22 29 36 43	4 8 18 23 27 37 40			
1 14 15 16 17 18 19	2 9 15 21 27 33 39	3 9 14 23 28 37 42	4 9 19 22 26 36 41			
1 20 21 22 23 24 25	2 10 16 22 28 34 40	3 10 17 24 31 32 39	4 10 14 25 29 33 43			
1 26 27 28 29 30 31	2 11 17 23 29 35 41	3 11 16 25 30 33 38	4 11 15 24 28 32 42			
1 32 33 34 35 36 37	2 12 18 24 30 36 42	3 12 19 20 27 34 41	4 12 16 21 31 35 38			
1 38 39 40 42 42 43	2 13 19 25 31 37 43	3 13 18 21 26 35 40	4 13 17 20 30 34 39			
5 8 19 21 30 34 41	6 8 16 24 31 35 39	7 8 17 25 28 33 42				
5 9 18 20 31 35 40	6 9 17 25 30 34 38	7 9 16 24 29 32 43				
5 10 15 23 26 36 43	6 10 18 20 27 37 41	7 10 19 21 30 35 38				
5 11 14 22 27 37 42	6 11 19 21 26 36 40	7 11 18 20 31 34 39				
5 12 17 25 28 32 39	6 12 14 22 29 33 43	7 12 15 23 26 37 40				
5 13 16 24 29 33 38	6 13 15 23 28 32 42	7 13 14 22 27 36 41				

(1) 卡牌內容：

每張牌 7 個圖案、每個圖案重複 7 次，共有 43 個圖案、共有 43 張牌

- (2) 發現 1：利用「順序法」與「替代法」即可。用替代法將 8~13、14~19、20~25、26~31、32~37、38~43，這些分別排開，並把每組自首用紅字顯示，可清楚看到每張牌之間共同點只有一個，不會有重複兩次的可能。

9. 每張牌有 8 個圖案的情形，如下圖：

1 2 3 4 5 6 7 8							
1 9 10 11 12 13 14 15	2 9 16 23 30 37 44 51	3 9 22 28 34 40 46 52	4 9 21 26 31 43 48 53				
1 16 17 18 19 20 21 22	2 10 17 24 31 38 45 52	3 10 16 29 35 41 47 53	4 10 22 27 32 37 49 54				
1 23 24 25 26 27 28 29	2 11 18 25 32 39 46 53	3 11 17 23 36 42 48 54	4 11 16 28 33 38 50 55				
1 30 31 32 33 34 35 36	2 12 19 26 33 40 47 54	3 12 18 24 30 43 49 55	4 12 17 29 34 39 44 56				
1 37 38 39 40 41 42 43	2 13 20 27 34 41 48 55	3 13 19 25 31 37 50 56	4 13 18 23 35 40 45 57				
1 44 45 46 47 48 49 50	2 14 21 28 35 42 49 56	3 14 20 26 32 38 44 57	4 14 19 24 36 41 46 51				
1 51 52 53 54 55 56 57	2 15 22 29 36 43 50 57	3 15 21 27 33 39 45 51	4 15 20 25 30 42 47 52				
5 9 20 24 35 39 50 54	6 9 19 29 34 42 45 55	7 9 18 27 36 38 47 56	8 9 17 25 33 41 49 57				
5 10 21 25 36 40 44 55	6 10 20 23 35 43 46 56	7 10 19 28 30 39 48 57	8 10 18 26 34 42 50 51				
5 11 22 26 30 41 45 56	6 11 21 24 36 37 47 57	7 11 20 29 31 40 49 51	8 11 19 27 35 43 44 52				
5 12 16 27 31 42 46 57	6 12 22 25 30 38 48 51	7 12 21 23 32 41 50 52	8 12 20 28 36 37 45 53				
5 13 17 28 32 43 47 51	6 13 16 26 31 39 49 52	7 13 22 24 33 42 44 53	8 13 21 29 30 38 46 54				
5 14 18 29 33 37 48 52	6 14 17 27 32 40 50 53	7 14 16 25 34 43 45 54	8 14 22 23 31 39 47 55				
5 15 19 23 34 38 49 53	6 15 18 28 33 41 44 54	7 15 17 26 35 37 46 55	8 15 16 24 32 40 48 56				

(1) 卡牌內容：

每張牌 8 個圖案、每個圖案重複 8 次，共有 57 個圖案、共有 57 張牌

(2) 發現 1：利用「順序法」與「交錯法」即可。一樣用紅字表示後退一格的軌跡。

(3) 發現 2：與原版哆寶格局一樣，但我們用了 57 種圖案，且有 57 張牌

(五) 整理成表格，發現圖案數、出現次數、牌數...等資訊是有規律性的，也推導出其中  $n$  的公式。

1. 我們利用「順序法」、「交錯法」、「替代法」等方法，找出每張牌有 2~8 種圖案時的情況，表格如下

探討內容 用法	每張牌出現 的圖案數	每個圖案 出現次數	共有幾張牌	共有幾個圖案
X	2	2	3	3
X	3	3	7	7
順序法+ 交錯法	4	4	$1+3\times 4$ =13	$1+3\times 4$ =13
順序法+ 替代法	5	5	$1+4\times 5$ =21	$1+4\times 5$ =21
順序法+ 交錯法	6	6	$1+5\times 6$ =31	$1+5\times 6$ =31
順序法+ 替代法	7	7	$1+6\times 7$ =43	$1+6\times 7$ =43
順序法 + 交錯法	8	8	$1+7\times 8$ =57	$1+7\times 8$ =57
⋮				
順序法+ $n$ =偶數，交錯法 $n$ =奇數，替代法	$n$	$n$	$1+(n-1)\times n$	$1+(n-1)\times n$

2. 公式表格如下

每張牌的圖案數	$n$
每個圖案出現次數	$n$
共有幾張牌	$1+(n-1)\times n$
共有幾個圖案	$1+(n-1)\times n$

3. 根據上述討論，若要設計更多圖案的卡牌，也是可以，因每張牌的圖案數 8 個時，可以有 57 張牌(用交錯法可驗證)，若要用替代法擴增至每張牌的圖案數 9 個時，可以有 73 張牌，用交錯法擴增至每張牌的圖案數 10 個時，可以有 91 張牌。

## 二、 研究二：探討並設計「隨機抽取兩張牌，都有 1 個相同的圖案」的牌組及公式。

研究一探討哆寶遊戲的規則及設計概念與相關原理，設計概念就是探討「隨機抽取兩張牌，都有 1 個相同的圖案」，研究二將此概念延伸，試著探討「隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同的圖案」的情形。

(一) 探討「每張牌不同圖案數」的公式（使用下填法+數獨法）。

1. 一樣以數字代替圖案，從最少的每張牌有 3 個圖案開始做，慢慢找出其中的規律性。
2. **每張牌有 3 個圖案的情形**，整理後如下表：(圖表意思為，編號 1 的卡片有圖案 1、2、3，編號 2 的卡片有圖案 1、2、4...以此類推)

全部圖案編號 卡片編號	1	2	3	4
1	✓	✓	✓	
2	✓	✓		✓
3	✓		✓	✓
4		✓	✓	✓

(1) 卡牌內容：

每張牌 3 個圖案、每個圖案重複 3 次，共有 4 個圖案、共有 4 張牌。

(2) 發現 1：因為很簡單，還沒看出什麼規律。

(3) 發現 2：第一張牌用  $\boxed{123}$ ，因為其他牌都要與  $\boxed{123}$  有 2 個相同的圖案，我們將它拆成  $\boxed{12?}$ 、 $\boxed{13?}$ 、 $\boxed{23?}$ ，發現每個數字都用了 3 次，剩下 3 個問號，所以只剩下一個數字可用，就是 4。

3. 每張牌有 3 個圖案的情形，整理後如下表：

全部圖案編號 卡片編號	1	2	3	4	5	6	7
1	✓	✓	✓	✓			
2	✓	✓			✓	✓	
3	✓		✓		✓		✓
4	✓			✓		✓	✓
5		✓	✓			✓	✓
6		✓		✓	✓		✓
7			✓	✓	✓	✓	

(1) 卡牌內容：

每張牌 4 個圖案、每個圖案重複 4 次，共有 7 個圖案、共有 7 張牌。

(2) 發現 1：用「下填法」+「數獨法」。

(3) 發現 2：第一張牌用  $\boxed{1234}$ ，將它拆成  $\boxed{12??}$ 、 $\boxed{13??}$ 、 $\boxed{14??}$ 、 $\boxed{23??}$ 、 $\boxed{23??}$ ，發現每個數字都用了 4 次，剩下 12 個問號，所以還要填入 3 個數字，此部分我們稱為「下填法」。

(4) 發現 3：將 5、6、7 這三個數字填進入時，須考量到重覆性的問題，解題方式很類似數獨，因此我們稱「數獨法」。例如： $\boxed{12??}$  放入 5， $\boxed{13??}$  再放入 5 的話， $\boxed{125?}$  跟  $\boxed{135?}$  的最後一個數字一定要不同，只能放 6 跟 7，以此類推，一一將問號解開。

4. 每張牌有 4 個圖案的情形，整理後如下表：

全部圖案 編號 卡片編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	✓	✓	✓	✓	✓						
2	✓	✓				✓	✓	✓			
3	✓		✓			✓			✓	✓	
4	✓			✓			✓		✓		✓
5	✓				✓			✓		✓	✓
6		✓	✓				✓			✓	✓
7		✓		✓				✓	✓	✓	
8		✓			✓	✓			✓		✓
9			✓	✓		✓		✓			✓
10			✓		✓		✓	✓	✓		
11				✓	✓	✓	✓			✓	

(1) 卡牌內容：

每張牌 5 個圖案、每個圖案重複 5 次，共有 11 個圖案、共有 11 張牌

(2) 發現 1：用「下填法」+「數獨法」。

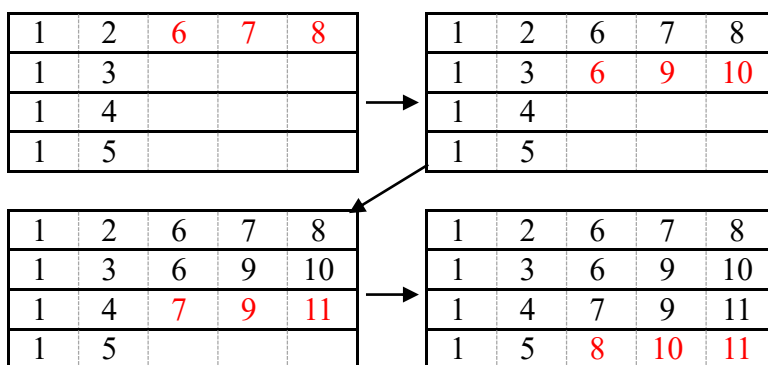
(3) 發現 2：與之前一樣第一張牌用  $\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5}$ ，再拆成  $\boxed{1\ 2}$ 、 $\boxed{1\ 3}$ 、 $\boxed{1\ 4}$ 、 $\boxed{1\ 5}$ 、 $\boxed{2\ 3}$ 、 $\boxed{2\ 4}$ 、 $\boxed{2\ 5}$ 、 $\boxed{3\ 4}$ 、 $\boxed{3\ 5}$ 、 $\boxed{4\ 5}$ 、，共 10 組。上面空白處，每張牌可填 3 個數字，共有  $3 \times 10 = 30$  個數字要填，每個數字重複 5 次，所以得出還有 6~11 這六個數字可以填。

接著使用下填法，開始往下填，先將  $\boxed{1\ 2}$ 、 $\boxed{1\ 3}$ 、 $\boxed{1\ 4}$ 、 $\boxed{1\ 5}$  的後面填滿，目前共需填 12 個數字，所以 6~11 各填 2 個。

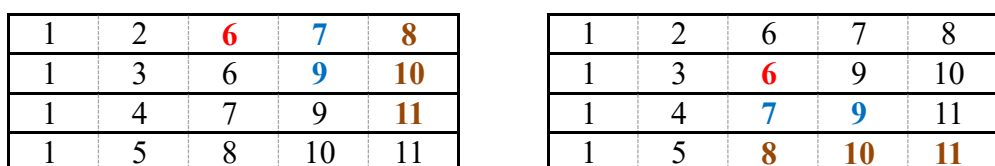
首先  $\boxed{1\ 2}$  配上 6.7.8，為  $\boxed{1\ 2\ 6\ 7\ 8}$ 。 $\boxed{1\ 3}$  必須要跟  $\boxed{1\ 2\ 6\ 7\ 8}$  有 2 個相同的數字，除了原本的 1 之外，我們再用 6，變成  $\boxed{1\ 3}$  配上 6.9.10，為  $\boxed{1\ 3\ 6\ 9\ 10}$ 。 $\boxed{1\ 4}$  要跟  $\boxed{1\ 2\ 6\ 7\ 8}$ 、 $\boxed{1\ 3\ 6\ 9\ 10}$  各有 2 個相同的數字，我們用 7 和 9，變成  $\boxed{1\ 4}$  配上 7.9.11，為  $\boxed{1\ 4\ 7\ 9\ 11}$ 。最後  $\boxed{1\ 5}$ ，要跟  $\boxed{1\ 2}$ 、 $\boxed{1\ 3}$ 、 $\boxed{1\ 4}$ 、各有 2 個相同的數字，我們用 8、10、11，變成  $\boxed{1\ 5}$  配上 8.10.11，為  $\boxed{1\ 5\ 8\ 10\ 11}$ 。

下填法完成，很有規律性的排法讓這 4 張牌都剛好有 2 個相同的地方，

下表為下填法的步驟。



以上已完成下填法，下圖依照左右比較，會更清楚填入規則。



(4) 發現 3: 剩下的 、、、、、，  
用數獨法處理，刪除不適合的答案，留下剩下的答案。

(5) 完成「每張牌有 5 個圖案，隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同圖案」的情形。

5. **每張牌有 6 個圖案的情形**，整理後如下表：

全部圖案 編號 卡片編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	✓	✓	✓	✓	✓	✓										
2	✓	✓					✓	✓	✓	✓						
3	✓		✓				✓				✓	✓	✓			
4	✓			✓				✓			✓			✓	✓	
5	✓				✓				✓			✓		✓		✓
6	✓					✓				✓			✓		✓	✓
7		✓	✓				✓							✓	✓	✓
8		✓		✓				✓					✓	✓		✓
9		✓			✓				✓		✓		✓		✓	
10		✓				✓				✓	✓	✓		✓		
11			✓	✓					✓	✓	✓					✓
12			✓		✓			✓		✓		✓			✓	
13			✓			✓		✓	✓				✓	✓		
14				✓	✓		✓			✓			✓	✓		
15				✓		✓	✓		✓			✓			✓	
16					✓	✓	✓	✓			✓					✓

(1) 卡牌內容：

每張牌 6 個圖案、每個圖案重複 6 次，共有 16 個圖案、共有 16 張牌

(2) 發現 1：用「下填法」+「數獨法」。

(3) 發現 2：與之前一樣第一張牌用 ，再拆成 、、  
...、，共 15 組。使用「下填法」，將 7~16 這 10 個數字填入 、  
、...、 裡面。

(4) 發現 3：再用數獨法將 7~16 這 10 個數字填入 、、...、  
。

(5) 完成「每張牌有 6 個圖案，隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同圖案」的情形。

(二) 將「下填法+數獨法」的資料整理成表格，發現圖案數、出現次數、牌數...等資訊是有規律性的，也推導出其中  $n$  的公式。

- 我們利用「下填法」、「數獨法」等方法，找出每張牌有 2~6 種圖案時的情況，表格如下：

探討內容 用法	每張牌出現 的圖案數	每個圖案 出現次數	共有幾張牌	共有幾個圖案
X	2	2	2 $\curvearrowright$ +2	2 $\curvearrowright$ +2
X	3	3	4 $\curvearrowright$ +3	4 $\curvearrowright$ +3
下填法 + 數獨法	4	4	7 $\curvearrowright$ +4	7 $\curvearrowright$ +4
下填法 + 數獨法	5	5	11 $\curvearrowright$ +5	11 $\curvearrowright$ +5
下填法 + 數獨法	6	6	16 $\curvearrowright$ +6	16 $\curvearrowright$ +6
		$\vdots$		
下填法 + 數獨法	$n$	$n$	$1 + \frac{n(n-1)}{2}$	$1 + \frac{n(n-1)}{2}$

- 公式表格如下

每張牌的圖案數	$n$
每個圖案出現次數	$n$
共有幾張牌	$1 + \frac{n(n-1)}{2}$
共有幾個圖案	$1 + \frac{n(n-1)}{2}$

- 根據上述討論，若要設計更多圖案的卡牌，也是可以，因每張牌的圖案數 6 個時，可以有 16 張牌(用下填法與數獨法可驗證)，若要擴增至每張牌的圖案數 7 個時，可以有 22 張牌，擴增至每張牌的圖案數 8 個時，可以有 29 張牌。

(三) 探討「每張牌不同圖案數」的公式（使用下填法+融合法）。

- 我們發現將研究一的結果用「融合法」融合再一起，也能符合遊戲規則，並且能找到「隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同圖案」的情形。

2. **融合法 (2+2)**，整理後如下表：

1 2	+	4 5	=	1 2 4 5
1 3	+	4 6	=	1 3 4 6
2 3	+	5 6	=	2 3 5 6

(1) 卡牌內容：

每張牌 4 個圖案、每個圖案重複 2 次，共有 6 個圖案、共有 3 張牌

(2) 發現 1：將「研究一隨機抽取兩張牌，都剛好有 1 個相同的圖案」的情形重複做兩次，可以變成「隨機抽取兩張牌，都剛好有 2 個相同的圖案」。

(3) 發現 2：我們將最簡單的 1 2、1 3、2 3，重複改成 4 5 6 的組合，變成 4 5、4 6、5 6，再用「融合法」合併成 1 2 4 5、1 3 4 6、2 3 5 6，這三張牌。

(4) 完成「每張牌有 4 個圖案，隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同圖案」的情形。

3. **融合法 (3+3)**，整理後如下表：

1 2 3	+	8 9 10	=	1 2 3 8 9 10
1 4 5	+	8 11 12	=	1 4 5 8 11 12
1 6 7	+	8 13 14	=	1 6 7 8 13 14
2 4 6	+	9 11 13	=	2 4 6 9 11 13
2 5 7	+	9 12 14	=	2 5 7 9 12 14
3 4 6	+	10 11 14	=	3 4 6 10 11 14
3 5 7	+	10 12 13	=	3 5 7 10 12 13

(1) 卡牌內容：

每張牌 6 個圖案、每個圖案重複 3 次，共有 14 個圖案、共有 7 張牌

(2) 發現 1：將「研究一」的情形重複做兩次，可以變成「隨機抽取兩張牌，都剛好有 2 個相同的圖案」。

(3) 發現 2：我們將最簡單的 1 2 3、1 4 5、...、3 5 7 等 7 張牌，加上 8 9 10、8 11 12、...、10 11 14 等 7 張牌融合，會變成，1 2 3 8 9 10、1 4 5 8 11 12、...、3 5 7 10 12 13 等 7 張牌。



(4) 完成「每張牌有 6 個圖案，隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同圖案」的情形。

4. 融合法 (4+4)，整理後如下表：

1 2 3 4	+	14 15 16 17	=	1 2 3 4 14 15 16 17
1 5 6 7	+	14 18 19 20	=	1 5 6 7 14 18 19 20
1 8 9 10	+	14 21 22 23	=	1 8 9 10 14 21 22 23
1 11 12 13	+	14 24 25 26	=	1 11 12 13 14 24 25 26
2 5 8 11	+	15 18 21 24	=	2 5 8 11 15 18 21 24
2 6 9 12	+	15 19 22 25	=	2 6 9 12 15 19 22 25
2 7 10 13	+	15 20 23 26	=	2 7 10 13 15 20 23 26
3 5 10 12	+	16 18 23 25	=	3 5 10 12 16 18 23 25
3 6 8 13	+	16 19 21 26	=	3 6 8 13 16 19 21 26
3 7 9 11	+	16 20 22 24	=	3 7 9 11 16 20 22 24
4 5 9 13	+	17 18 22 26	=	4 5 9 13 17 18 22 26
4 6 10 11	+	17 19 23 24	=	4 6 10 11 17 19 23 24
4 7 8 12	+	17 20 21 25	=	4 7 8 12 17 20 21 25

(1) 卡牌內容：

每張牌 8 個圖案、每個圖案重複 4 次，共有 26 個圖案、共有 13 張牌

(2) 發現 1：將「研究一」的情形重複做兩次，可以變成「隨機抽取兩張牌，都剛好有 2 個相同的圖案」。

(3) 發現 2：與前述類似，將 1~13 拼成 13 張牌，再加上 14~26 拼成的 13 張牌，會變成每張牌有 8 個圖案的 8 張牌。

(5) 完成「每張牌有 8 個圖案，隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同圖案」的情形。

(四) 將「融合法」的資料整理成表格，發現圖案數、出現次數、牌數...等資訊是有規律性的，也推導出其中 n 的公式。

1. 我們利用「融合法」，找出每張牌有 4、6、8 種圖案時的情況，表格如下：

探討內容 用法	每張牌出現 的圖案數	每個圖案 出現次數	共有幾張牌	共有幾個圖案
融合法	4	2	$1+1 \times 2$ $=3$	$2[1+1 \times 2]$ $=2 \times 3$ $=6$
融合法	6	3	$1+2 \times 3$ $=7$	$2[1+2 \times 3]$ $=2 \times 7$ $=14$
融合法	8	4	$1+3 \times 4$ $=13$	$2[1+3 \times 4]$ $=2 \times 13$ $=26$
⋮				
融合法	n	$\frac{1}{2}n$	$1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times \frac{1}{2}n$	$2 \left[1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times \frac{1}{2}n\right]$

2. 公式表格如下

每張牌的圖案數	n
每個圖案出現次數	$\frac{1}{2}n$
共有幾張牌	$1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times \frac{1}{2}n$
共有幾個圖案	$2 \left[1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times \frac{1}{2}n\right]$

3. 根據上述討論，若要設計更多圖案的卡牌，也是可以，因每張牌的圖案數 8 個時，可以有 13 張牌(用融合法可驗證)，若要擴增至每張牌的圖案數 10 個時，可以有 21 張牌，擴增至每張牌的圖案數 12 個時，可以有 31 張牌。

### 三、 研究三：探討並設計「隨機抽取兩張牌，都有 3 個相同的圖案」的牌組及公式。

我們在研究一及研究二探討「隨機抽取兩張牌，有 1 個或 2 個相同的圖案」的情形及公式，我們想根據之前所想出來的方法，試著做做看「隨機抽取兩張牌，有 3 個相同的圖案」的結果，看能不能為牌組增加夠多的可能性。

#### (一) 使用方法

- 上述所使用的方法有「順序法+交錯法」、「順序法+替代法」、「下填法+數獨法」、「融合法」等方法。
- 但因順序法+交錯法以及順序法+替代法為隨機抽取兩張牌，都有 1 個相同的圖

案的情形，所以不適合用在這裡，因此我們用「下填法+數獨法」、「融合法」這兩種方法做嘗試。

3. 我們另外發現一種「固定法」，雖然現實遊戲不太可行，但還是列舉在下方。

(二) 探討「每張牌不同圖案數」的公式（使用下填法+數獨法）。

1. 一樣以數字代替圖案，從最少的每張牌有 4 個圖案開始做，慢慢找出其中的規律性。
2. **每張牌有 4 個圖案的情形**，整理後如下表：

全部圖案編號 卡片編號	1	2	3	4	5
1	✓	✓	✓	✓	
2	✓	✓	✓		✓
3	✓	✓		✓	✓
4	✓		✓	✓	✓
5		✓	✓	✓	✓

- (1) 卡牌內容：

每張牌 4 個圖案、每個圖案重複 4 次，共有 5 個圖案、共有 5 張牌。

- (2) 發現 1：一樣將第一張牌用  $\boxed{1\ 2\ 3\ 4}$ ，因為與  $\boxed{1\ 2\ 3\ 4}$  有 3 個相同的圖案，我們將它拆成  $\boxed{1\ 2\ 3\ ?}$ 、 $\boxed{1\ 2\ 4\ ?}$ 、 $\boxed{1\ 3\ 4\ ?}$ 、 $\boxed{2\ 3\ 4\ ?}$ ，發現每個數字都用了 4 次，剩下 4 個問號，所以只剩下一個數字可用，就是 5。這裡使用下填法即可完成。

3. **每張牌有 5 個圖案的情形**，整理後如下表：

全部圖案 編號 卡片編號	1	2	3	4	5	6	7	8
1	✓	✓	✓	✓	✓			
2	✓	✓	✓			✓	✓	
3	✓	✓		✓		✓		✓
4	✓	✓			✓		✓	✓
5	✓		✓	✓			✓	✓
6	✓		✓		✓	✓		✓
7	✓			✓	✓	✓	✓	
8		✓	✓	✓				
9		✓	✓		✓			
10		✓		✓	✓			
11			✓	✓	✓			

(1) 卡牌內容：

無法設計出

(2) 發現 1：一樣將第一張牌用  $\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5}$ ，因為與  $\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5}$  需有 3 個相同的圖案，我們將它拆成編號 2~編號 11，我們利用數獨法，找出編號 2 編號 7 的答案，但是到編號 8 開始後，會發現怎麼樣都無法填入，因此我們確定此方法無法設計出。

(3) 發現 2：我們覺得如果再更改方法的細節，是有可能在設計出，我們未來有機會會再深入做研究。

(三) 探討「每張牌不同圖案數」的公式（融合法）。

1. 我們發現將研究一的結果「融合法」融合再一起，也能符合遊戲規則，並且能找到「隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同圖案」的情形。

2. **融合法 (2+2+2)**，整理後如下表：

$\boxed{1\ 2}$ + $\boxed{4\ 5}$ + $\boxed{7\ 8}$	=	$\boxed{1\ 2\ 4\ 5\ 7\ 8}$
$\boxed{1\ 3}$ + $\boxed{4\ 6}$ + $\boxed{7\ 9}$	=	$\boxed{1\ 3\ 4\ 6\ 7\ 9}$
$\boxed{2\ 3}$ + $\boxed{5\ 6}$ + $\boxed{8\ 9}$	=	$\boxed{2\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9}$

(1) 卡牌內容：

每張牌 6 個圖案、每個圖案重複 2 次，共有 9 個圖案、共有 3 張牌

(2) 發現 1：將「研究一隨機抽取兩張牌，都剛好有 1 個相同的圖案」的情形重複做三次，可以變成「隨機抽取兩張牌，都剛好有 3 個相同的圖案」。

(3) 發現 2：我們將最簡單的  $\boxed{1\ 2}$ 、 $\boxed{1\ 3}$ 、 $\boxed{2\ 3}$ ，重複改成 456、789 的組合，變成  $\boxed{4\ 5}$ 、 $\boxed{4\ 6}$ 、 $\boxed{5\ 6}$ 、 $\boxed{7\ 8}$ 、 $\boxed{7\ 9}$ 、 $\boxed{8\ 9}$ ，再用「融合法」合併成  $\boxed{1\ 2\ 4\ 5\ 7\ 8}$ 、 $\boxed{1\ 3\ 4\ 6\ 7\ 9}$ 、 $\boxed{2\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9}$ ，這三張牌。

(4) 完成「每張牌有 6 個圖案，隨機抽取兩張牌，都有三個相同圖案」的情形。

3. **融合法 (3+3+3)**，整理後如下表：

$\boxed{1\ 2\ 3}$ + $\boxed{8\ 9\ 10}$ + $\boxed{15\ 16\ 17}$	=	$\boxed{1\ 2\ 3\ 8\ 9\ 10\ 15\ 16\ 17}$
$\boxed{1\ 4\ 5}$ + $\boxed{8\ 11\ 12}$ + $\boxed{15\ 18\ 19}$	=	$\boxed{1\ 4\ 5\ 8\ 11\ 12\ 15\ 18\ 19}$

1 6 7	+	8 13 14	+	15 20 21	=	1 6 7 8 13 14 15 20 21
2 4 6	+	9 11 13	+	16 18 20	=	2 4 6 9 11 13 16 18 20
2 5 7	+	9 12 14	+	16 19 21	=	2 5 7 9 12 14 16 19 21
3 4 6	+	10 11 14	+	17 18 21	=	3 4 6 10 11 14 17 18 21
3 5 7	+	10 12 13	+	17 19 20	=	3 5 7 10 12 13 17 19 20

(1) 卡牌內容：

每張牌 9 個圖案、每個圖案重複 3 次，共有 21 個圖案、共有 7 張牌

(2) 發現 1：將「研究一」的情形重複做三次，可以變成「隨機抽取兩張牌，都剛好有 3 個相同的圖案」。

(3) 發現 2：我們將最簡單的  $\boxed{1\ 2\ 3}$ 、 $\boxed{1\ 4\ 5}$ 、...、 $\boxed{3\ 5\ 7}$  等 7 張牌，加上上表紅字組合、藍字組合等 21 張牌融合，會變成， $\boxed{1\ 2\ 3\ 8\ 9\ 10\ 15\ 16\ 17}$ 、 $\boxed{1\ 4\ 5\ 8\ 11\ 12\ 15\ 18\ 19}$ 、...、 $\boxed{3\ 5\ 7\ 10\ 12\ 13\ 17\ 19\ 20}$  等 7 張牌。

(4) 完成「每張牌有 9 個圖案，隨機抽取兩張牌，都有三個相同圖案」的情形。

4. 我們發現融合法其實可以無限做下去，因此不再繼續舉例。

(四) 將「融合法」的資料整理成表格，發現圖案數、出現次數、牌數...等資訊是有規律性的，也推導出其中  $n$  的公式。

1. 我們利用「融合法」，找出每張牌有 6、9、12 種圖案時的情況，表格如下：

探討內容 用法	每張牌出現 的圖案數	每個圖案 出現次數	共有幾張牌	共有幾個圖案
融合法	6	2	3	9
融合法	9	3	7	21
融合法	12	4	13	39
⋮				
融合法	$n$	$\frac{1}{3}n$	$1 + \left(\frac{1}{3}n - 1\right) \times \frac{1}{3}n$	$3 \left[1 + \left(\frac{1}{3}n - 1\right) \times \frac{1}{3}n\right]$

2. 公式表格如下

每張牌的圖案數	$n$
每個圖案出現次數	$\frac{1}{3}n$
共有幾張牌	$1 + \left(\frac{1}{3}n - 1\right) \times \frac{1}{3}n$
共有幾個圖案	$3 \left[1 + \left(\frac{1}{3}n - 1\right) \times \frac{1}{3}n\right]$

3. 根據上述討論，若要設計更多圖案的卡牌也是可以，若要擴增至每張牌的圖案數 15 個時，可以有 21 張牌，擴增至每張牌的圖案數 18 個時，可以有 31 張牌。

(五) 探討「每張牌不同圖案數」的公式（使用固定法）。

1. 因研究三是要找出「隨機抽取兩張牌，都有三個相同圖案」的情形，因此我們固定每張牌都有相同的三個圖案，其餘圖案依序往下列出，可以設計出無限種的情形。以下舉例說明。

2. **固定法，每張牌有 4 個圖案的情形**，整理後如下表：

1 2 3 4	、	1 2 3 5	、	1 2 3 6	、	1 2 3 7	、	1 2 3 8	、	...	、	1 2 3 $m_4$
---------	---	---------	---	---------	---	---------	---	---------	---	-----	---	-------------

(1) 卡牌內容：

每張牌 4 個圖案，有 3 個圖案重複  $m_4-3$  次，其餘圖案只出現 1 次，共有  $m_4$  個圖案、共有  $m_4-3$  張牌

(2) 發現 1：圖案 1、2、3，在每張牌都有出現，其餘圖案只出現 1 次。

(3) 發現 2：因圖案數可以延伸到無限多種，因此我們將代號取為「 $m_4$ 」

(4) 發現 3：牌數可以延伸的無限張。

3. **固定法，每張牌有 5 個圖案的情形**，整理後如下表：

1 2 3 4 5	、	1 2 3 6 7	、	1 2 3 8 9	、	1 2 3 10 11	、	...	、	1 2 3 $m-1$ $m$
-----------	---	-----------	---	-----------	---	-------------	---	-----	---	-----------------

(1) 卡牌內容：

每張牌 5 個圖案，有 3 個圖案重複  $(m_5 - 3) \div 2$  次，其餘圖案只出現 1 次，共有  $m_5$  個圖案、共有  $(m_5 - 3) \div 2$  張牌

(2) 發現 1：同上

(3) 我們發現固定其實可以無限做下去，因此不再繼續舉例。

(六) 將「固定法」的資料整理成表格，發現圖案數、出現次數、牌數...等資訊是有規律性的，也推導出其中  $n$  的公式。

1. 我們利用「固定法」，找出每張牌有 4、5、6 種圖案時的情況，表格如下：

探討內容 用法	每張牌出現 的圖案數	每個圖案 出現次數	共有幾張牌	共有幾個 圖案
固定法	4	$(m_4 - 3)$ 或 1	$(m_4 - 3)$	$m_4$
固定法	5	$(m_5 - 3) \div 2$ 或 1	$(m_5 - 3) \div 2$	$m_5$
固定法	6	$(m_6 - 3) \div 3$ 或 1	$(m_6 - 3) \div 3$	$m_6$
⋮				
固定法	$n$	$(m_n - 3) \div (n - 3)$ 或 1	$(m_n - 3) \div (n - 3)$	$m_n$

2. 根據上述討論，若要設計更多圖案的卡牌也是可以。

**四、 研究四：將上述研究的牌組特性做整理，並延伸到「每張牌有  $n$  種圖案，隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案」的牌組及公式。**

研究一、二、三分別都有探討「每張牌有  $n$  種圖案，隨機抽取兩張牌，都有 1(或 2、3)個相同的圖案」的情形，有找到許多設計卡牌的「方法」，因此我們在研究四時做討論，利用上述方法做延伸，看能不能找到「每張牌有  $n$  種圖案，隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案」。

(一) 研究一的「順序法」、「交錯法」、「替代法」

1. 因為這些方法是用在隨機抽取兩張牌，都有 1 個相同圖案的情形，這邊較不適用，因此無法推論到，隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案， $n$  的公式在第 9 頁的表格有列出。

(二) 研究二、三的「下填法」、「數獨法」

1. 這些方法在研究二時可成功設計出隨機抽取兩張牌，都有 2 個相同的圖案。但在研究三時，就無法設計出隨機抽取兩張牌，都有 3 個相同的圖案的情形，因此也無法推論到，隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案， $n$  的公式在第 14 頁的表格有列出。

(三) 研究二、三的「融合法」

1. 在研究二跟三中都可以成功設計出， $n$  的公式在第 17 頁以及第 21 頁的表格有列出。也在過程中有發現，可以延伸到「隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案」的情形。以下用表格將公式做整理
2. 首先我們將「隨機抽取兩張牌，都有 2、3、4 個相同的圖案」的公式做整理，如下表，已經可以看出規律跟條件。

	隨機抽取兩張牌， 有 2 個相同的圖案			隨機抽取兩張牌， 有 3 個相同的圖案			隨機抽取兩張牌， 有 4 個相同的圖案			有 $x$ 個相 同的圖案
	圖出 現數	牌數	總圖 案數	圖出 現數	牌數	總圖 案數	圖出 現數	牌數	總圖 案數	
牌有 4 個圖	2	3	6							
牌有 5 個圖										
牌有 6 個圖	3	7	14	2	3	9				
牌有 7 個圖										
牌有 8 個圖	4	13	26				2	3	12	
牌有 9 個圖				3	7	21				
牌有 10 個 圖	5	21	42							
牌有 11 個 圖										
牌有 12 個 圖	6	31	62	4	13	39	3	7	28	
牌有 $n$ 個圖	$\frac{1}{2}n$	$\frac{1+}{2}(\frac{1}{2}n-1)$ $\times \frac{1}{2}n$	$2[1 + (\frac{1}{2}n-1) \times \frac{1}{2}n]$	$\frac{1}{3}n$	$\frac{1+}{3}(\frac{1}{3}n-1)$ $\times \frac{1}{3}n$	$3[1 + (\frac{1}{3}n-1) \times \frac{1}{3}n]$	$\frac{1}{4}n$	$\frac{1+}{4}(\frac{1}{4}n-1)$ $\times \frac{1}{4}n$	$4[1 + (\frac{1}{4}n-1) \times \frac{1}{4}n]$	



- 接著，我們將  $x$  的公式帶進來，完成「每張牌有  $n$  種圖案，隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案」的公式，如下表
- 這個公式是有條件的，例如  $x=2$  時， $x$  只能為 2 以外的 2 的倍數，因融合法是將前面的內容相加，因此為  $2+2$ 、 $3+3$ 、 $4+4$ 、...、 $x+x$ ，一定是 2 的倍數（且不能是 2）。相同的， $x=3$  時， $x$  只能為 3 以外的 3 的倍數，例如  $2+2+2$ 、 $3+3+3$ 、 $4+4+4$ 、...、 $x+x+x$ ，一定是 3 的倍數（且不能是 3）。

抽取 2 張牌，有 $x$ 個相同圖案	2	3	4	$x$
每張牌的圖案數	$n$ (且要為 2 以外的 2 的倍數)	$n$ (且要為 3 以外的 3 的倍數)	$n$ (且要為 4 以外的 4 的倍數)	$n$ (且要為 $x$ 以外的 $x$ 的倍數)
每個圖案出現次數	$\frac{1}{2}n$	$\frac{1}{3}n$	$\frac{1}{4}n$	$\frac{1}{x}n$
共有幾張牌	$1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times \frac{1}{2}n$	$1 + \left(\frac{1}{3}n - 1\right) \times \frac{1}{3}n$	$1 + \left(\frac{1}{4}n - 1\right) \times \frac{1}{4}n$	$1 + \left(\frac{1}{x}n - 1\right) \times \frac{1}{x}n$
共有幾個圖案	$2 \left[1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times \frac{1}{2}n\right]$	$3 \left[1 + \left(\frac{1}{3}n - 1\right) \times \frac{1}{3}n\right]$	$4 \left[1 + \left(\frac{1}{4}n - 1\right) \times \frac{1}{4}n\right]$	$x \left[1 + \left(\frac{1}{x}n - 1\right) \times \frac{1}{x}n\right]$

#### (四) 研究三的「固定法」

- 在研究三中可以成功設計出隨機抽取兩張牌，都有 3 個相同的圖案的情形， $n$  的公式在第 22 頁。也在過程中有發現，可以延伸到「隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案」的情形。以下用表格將公式做整理
- 首先我們將「隨機抽取兩張牌，都有 3、4 個相同的圖案」的公式做整理，如下表，已經可以看出規律跟條件。
- 因總圖案數可以延伸到無限多種，因此我們將同研究三將總圖案數的編碼為  $m$ ，但  $m$  後面的小字為了區分是「每張牌有  $n$  種圖案，隨機抽取兩張牌，都有  $x$  個相同的圖案」的  $n$  跟  $x$ ，第一碼為  $n$ 、第二碼為  $x$ 。例如「每張牌有 5 種圖案，隨機抽取兩張牌，都有 3 個相同的圖案」的  $m$  後面的小字為  $m_{53}$ 。

	隨機抽取兩張牌， 有 3 個相同的圖案			隨機抽取兩張牌， 有 4 個相同的圖案			有 x 個相 同的圖 案
	圖出現數	牌數	總圖 案數	圖出現數	牌數	總圖 案數	
牌有 4 個 圖	$(m_{43} - 3)$ 或 1	$(m_{43} - 3)$	$m_{43}$	$(m_{44} - 4)$ 或 1	$(m_{44} - 4)$	$m_{44}$	
牌有 5 個 圖	$(m_{53} - 3) \div 2$ 或 1	$(m_{53} - 3) \div 2$	$m_{53}$	$(m_{54} - 4) \div 2$ 或 1	$(m_{54} - 4) \div 2$	$m_{54}$	
牌有 6 個 圖	$(m_{63} - 3) \div 3$ 或 1	$(m_{63} - 3) \div 3$	$m_{63}$	$(m_{64} - 4) \div 3$ 或 1	$(m_{64} - 4) \div 3$	$m_{64}$	
牌有 7 個 圖	$(m_{73} - 3) \div 4$ 或 1	$(m_{73} - 3) \div 4$	$m_{73}$	$(m_{74} - 4) \div 4$ 或 1	$(m_{74} - 4) \div 4$	$m_{74}$	
牌有 n 個 圖	$(m_{n3} - 3) \div (n - 3)$ 或 1	$(m_{n3} - 3) \div (n - 3)$	$m_{n3}$	$(m_{n4} - 4) \div (n - 3)$ 或 1	$(m_{n4} - 4) \div (n - 3)$	$m_{n4}$	

4. 接著，我們將 x 的公式帶進來，完成「每張牌有 n 種圖案，隨機抽取兩張牌，都有 x 個相同的圖案」的公式，如下表

抽取 2 張牌，有 x 個相同圖案	3	4	x
每張牌的圖案數	n	n	n
每個圖案出現次數	$(m_{n3} - 3) \div (n - 3)$ 或 1	$(m_{n4} - 4) \div (n - 3)$ 或 1	$(m_{nx} - x) \div (n - 3)$ 或 1
共有幾張牌	$(m_{n3} - 3) \div (n - 3)$	$(m_{n4} - 4) \div (n - 3)$	$(m_{nx} - x) \div (n - 3)$
共有幾個圖案	$m_{n3}$	$m_{n4}$	$m_{nx}$

## 五、 研究五：運用上述研究資料設計新卡牌，並改編玩法利用 3D 列印印出實物。

### (一) 改編遊戲

在研究多寶桌遊的過程中，我們一直在思考，可不可以將遊戲改變的更有趣一點，我們想到的方法有 3 種。

1. 第一種「改變遊戲方法」，但原卡牌規則就已經提供 5 種遊戲方法。
2. 第二種「改變卡牌圖案」，桌游公司及網路上已有不同版本的圖案，如恐龍版、海洋世界版...等。
3. 第三種「增加新配件」，因這學期老師有我們到自造中心操作 3D 列印，我們很想將 3D 列印的元素加入哆寶桌游，所以我們做了些小改變。
4. 改變 1：將圖案設計成實體，原本 2D 平面的圖案，變成了 3D 立體的實物。
5. 改變 2：原卡牌規則為先指出相同圖案或喊出相同圖案的名字，我們改為先拿到相同圖案的實體物，增加遊戲的趣味性。

### (二) 統整研究資料

1. 為了達到以上改編，我們統整了研究一到研究四的資料，想做出合適的哆寶桌游，看看哪些組合牌數不會太多也不會太少、圖案數也不會太多或太少。整理如下表：

版本 資料項目	原版本	版本 1	版本 2	版本 3	版本 4
抽取 2 張牌，有？個相同圖案	1	1	2	2	3
每張牌的圖案數	8	6	6	8	9
每個圖案出現次數	6~8	6	6	16	3
共有幾張牌	55	31	16	26	7
共有幾個圖案	57	31	16	13	21

2. 我們列出以上 4 個版本，我們決定以版本 1 為主，設計出 31 個 3D 列印實物後，再將卡牌數增減，延伸至版本 2、3、4。讓遊戲有不同難易度，除了增加遊戲的趣味之外，也可讓更多人參與遊戲。

(三) 利用 Tinkercad 線上建模網站設計 3D 列印圖案，並印出 3D 列印實物

1. 我們利用 Tinkercad 線上建模網站設計出簡單圖形，如下圖。
2. 將圖案鑲入在扁圓柱體上，變成像是象棋外型的中空設計，如下圖。
3. 3D 列印圖形設計好後，我們用基本色灰色列印出實物，再將實物中空的部分塞入「輕質黏土」，以便改變顏色，如下圖。

	
操作 Tinkercad 線上建模網站	將輕質黏土填入 3D 實物中
	
像是象棋外型的中空設計	汽車實物－（紅色）

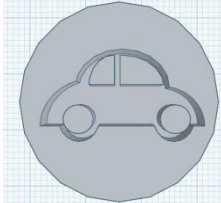
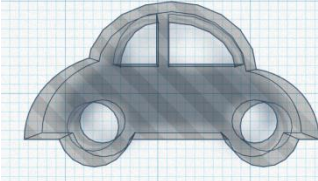
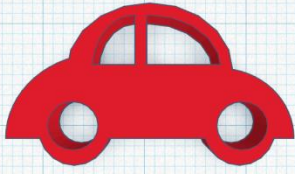
4. 共設計出以下 31 個 3D 實物，如下圖。

編號.名稱	1. 汽車	2.電話	3.紅心	4.方塊	5.弓箭	
實物本人						
實物名稱	6.閃電	7.月亮	8.太陽	9.星星	10.十字	
實物本人						
實物名稱	11.鑽石	12.雲朵	13.雨傘	14.寶劍	15.剪刀	
實物本人						
實物名稱	16.五葉	17.樹木	18.小草	19.房子	20.三角	
實物本人						

實物名稱	21.花朵	22.問號	23.驚嘆	24.打叉	25.打勾	
實物本人						
實物名稱	26.手機	27.音符	28.黑桃	29.梅花	30.鬍子	31.齒輪
實物本人						

(四) 設計卡牌、印出卡牌並裁切。

1. 我們利用 Tinkercad 中所設計的圖案，將顏色調整為上面所對應的顏色（例如汽車是紅色），在圖案截圖成 31 個圖檔。

		
汽車的中空圖案	汽車（透明色）	汽車實物（上紅色）

2. 利用 PowerPoint 編排，調整位置、大小。
3. 利用 PowerPoint 設計卡牌封面，分別代表版本 1~版本 4。
4. 將卡牌用後紙印出，並裁切。

	
利用 PowerPoint 編排卡牌	裁切卡牌

## 伍、 討論

在研究過程中，我們發現一些有趣的問題，並加以討論如下。

一、我們做的哆寶與原版哆寶的差異。

(一) 若跟原版哆寶一樣，「每張牌有 8 個圖案，隨機抽取兩張牌，有 1 個相同圖案」的情形為例，會發現。

1. 原版哆寶：每牌 8 圖、每圖重複 6~8 次、共有 57 個圖案、共有 55 張牌。
2. 自創哆寶：每牌 8 圖、每圖重複 8 次、共有 57 個圖案、共有 57 張牌。
3. 由上述可發現，原版哆寶並沒有將所有圖案、卡牌數做到淋漓盡致，只設計出 55 張牌，若完整用完所有的圖案，可設計出 57 張牌。

(二) 「隨機抽取兩張牌，有 2 個相同圖案」可行嗎？

1. 從我們的研究中可發現，是做得出來的，只是圖案的設計必須更謹慎，才可以讓每一張牌都符合條件。
2. 但因規則是指出或喊出相同圖案的名字，我們將她更改為拿出相同圖案的實物，因此利用 3D 列印設計 30 幾種實物，用以搭配新玩法與規則。

## 二、順序法與下填法比較

我們在研究一使用的順序法，以及研究二使用的下填法其實很類似，分別用於隨機抽取兩張牌，有 1 個相同圖案以及 2 個相同圖案的時候。順序法排頭皆為 1，依序將所有可用的代號填入，如下圖；下填法排頭也皆為 1，利用兩兩相同的條件，依序將可用的代號填入，如下圖。

<table border="1"> <tr><td>1</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>1</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr> <tr><td>1</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> <tr><td>1</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td></tr> <tr><td>1</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td>35</td><td>36</td><td>37</td></tr> <tr><td>1</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td><td>42</td><td>42</td><td>43</td></tr> </table>	1	8	9	10	11	12	13	1	14	15	16	17	18	19	1	20	21	22	23	24	25	1	26	27	28	29	30	31	1	32	33	34	35	36	37	1	38	39	40	42	42	43	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>9</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>10</td><td>13</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table> <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>7</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>8</td><td>11</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>9</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>10</td><td>13</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	7	8	9	10	1	3	7	11	12	13	1	4	8	11	14	15	1	5	9	12	14	16	1	6	10	13	15	16	1	2	7	8	9	10	1	3	7	11	12	13	1	4	8	11	14	15	1	5	9	12	14	16	1	6	10	13	15	16
1	8	9	10	11	12	13																																																																																																	
1	14	15	16	17	18	19																																																																																																	
1	20	21	22	23	24	25																																																																																																	
1	26	27	28	29	30	31																																																																																																	
1	32	33	34	35	36	37																																																																																																	
1	38	39	40	42	42	43																																																																																																	
1	2	7	8	9	10																																																																																																		
1	3	7	11	12	13																																																																																																		
1	4	8	11	14	15																																																																																																		
1	5	9	12	14	16																																																																																																		
1	6	10	13	15	16																																																																																																		
1	2	7	8	9	10																																																																																																		
1	3	7	11	12	13																																																																																																		
1	4	8	11	14	15																																																																																																		
1	5	9	12	14	16																																																																																																		
1	6	10	13	15	16																																																																																																		
順序法	下填法(上下圖比較更清楚)																																																																																																						

因此我們可以說兩個方法是有相關的，而下填法是順序法的升級版，升級後使這種方法運用更廣，甚至可用到研究三的設計。

## 三、融合法的優缺點

融合法可以用到「隨機抽取兩張牌，有 x 個相同圖案」的情形，以下比較優缺點：

- (一) 優點
  1. 使用廣泛，可延伸至 x 種圖案。
  2. 用融合法設計圖案很簡單，只需相同的模式，重複幾倍即可。
- (二) 缺點
  1. 設計大量的圖，但只能產出少量的牌數，如隨機抽取兩張牌，有 4 個相同的圖案，總圖案數是牌卡數的 4 倍，意思是若設計出 28 個圖案，也只能產出 7 張牌而已。
  2. 每張牌的圖案數有限制，因是融合「隨機抽取兩張牌，有 1 個相同圖案」的原理概念來設計，所以設計出來的圖案數都是要以某數的倍數來設計，如「隨機抽取兩張牌，有 2 個相同圖案」，則圖案數要 2 的倍數；「隨機抽取兩張牌，有 3 個相同圖案」，則圖案數要 3 的倍數；「隨機抽取兩張牌，有 x 個相同圖案」，則圖案數要 x 的倍數。

## 四、固定法其實不可行

固定法雖然好做，且限制很少，每張牌只需要固定圖案重複，其他就一直填入不同的圖案即可。但這是一款訓練眼力、觀察力、敏銳度的遊戲，若每次把牌翻出來，都拿出（或喊出、指出）某圖案，則遊戲會很無趣。

## 陸、 結論

- 一、研究原哆寶桌游的設計原理，利用「順序法、替代法、交錯法」找出「每張牌有  $n$  圖案，隨機抽取兩張牌，有 1 個相同圖案」的設計原理，並找出卡牌公式(第 9 頁)。
- 二、延伸至「每張牌有  $n$  圖案，隨機抽取兩張牌，有 2 或 3 個相同圖案」的情形，利用「下填法、數獨法、融合法、固定法」找出設計原理，並找出卡牌公式(下+數法第 14 頁)、(融合法第 17、21 頁)、(固定法第 22 頁)。
- 三、延伸至「每張牌有  $n$  圖案，隨機抽取兩張牌，有  $x$  個相同圖案」的情形，利用「融合法、固定法」及上述資料找出找出卡牌公式(第 24 頁)、(第 25 頁)。
- 四、利用研究成果，改變哆寶玩法，再利用 Tinkercad 線上建模網站設計 3D 列印圖案，並印出 31 種 3D 列印實物，設計出 4 種版本的哆寶遊戲。

## 柒、 未來展望

- 一、希望之後能學習電腦程式，將相關規律性用電腦輔助，增加計算的便利性及正確性，也能討論更多組合數的組合。
- 二、研究三的方法僅討論出融合法及固定法，希望可以找出更多種方法，增加遊戲的豐富度及趣味性。
- 三、希望可以增加「每張牌有  $n$  圖案，隨機抽取兩張牌，有 1 或 2 個相同圖案」的情形，意思是任兩張牌可能會有 1 或 2 種相同圖案的設計。

## 捌、 參考資料

- 一、 南一書局企業股份有限公司(2018)。第 12 冊國小數學單元二怎樣解題(一)。
- 二、 南一書局企業股份有限公司(2018)。第 12 冊國小數學單元六怎樣解題(二)。
- 三、 【新天鵝堡桌遊】嗒寶(就是你!)中文版 Dobble( Spot It)