嘉義市第38屆中小學科學展覽會
作品說明書

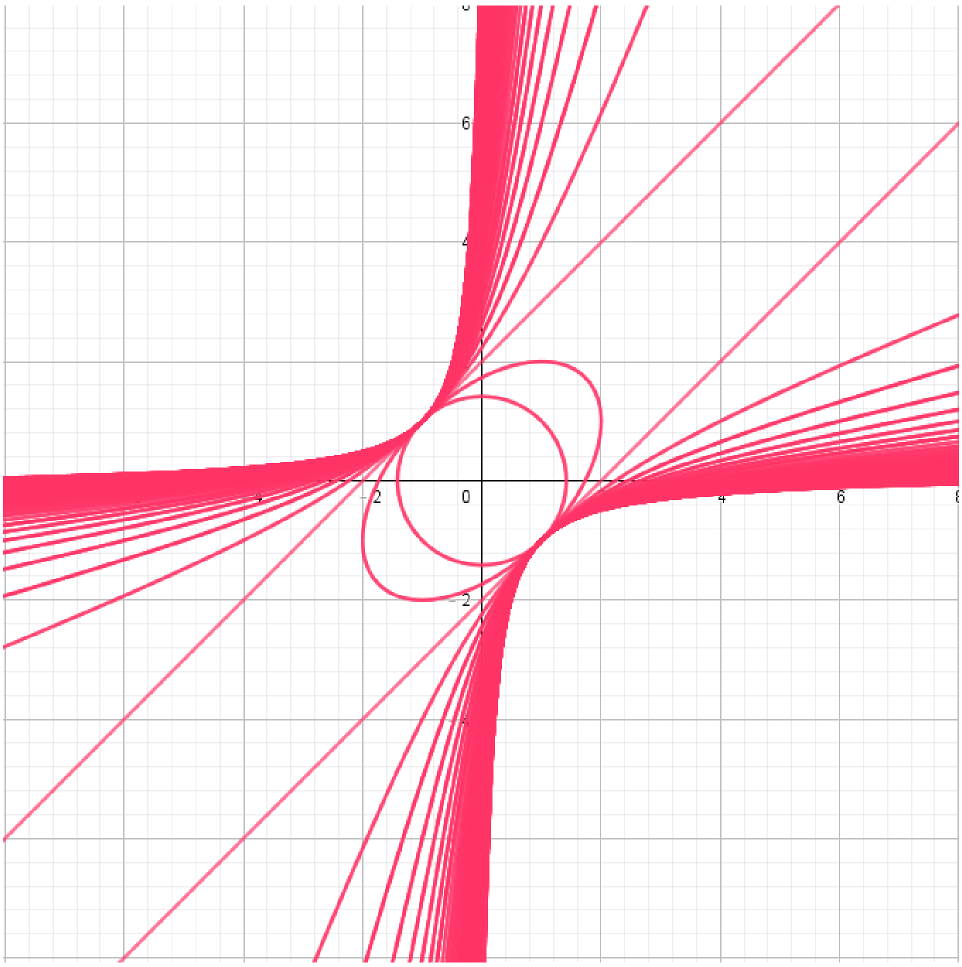
科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：互動 共好

關鍵詞：因數倍數、數列、二次曲線

編號：



摘要

本研究從一數學題目:「若x^2-5是y的倍數，y^2-5是x的倍數，找出符合題意的正整數對(x,y)」。

研究結果發現，這些正整數對(x,y)，形成一個奇數項的盧卡斯數列(Bisection of Lucas sequence)，我們找出其性質、遞迴式、一般項及二次曲線。

我們推廣延伸此問題，定義並建構一個新的遞迴式，找出其性質、二次曲線及一般式，並利用數學歸納法證明之。

研究的最後，我們透過 Excel 及 Geogebra 軟體，量化及驗證我們建構的遞迴式及二次曲線。

壹、研究動機

某一天，看到科學研習月刊的問題，如下:

> 小志和小定在抽上台報告的順序，一個抽到 4 號，另一個抽到 11 號。
>
> 小定說：「這兩個數字很有趣，你看，4^2-5 是 11 的倍數，而且 11^2-5 是 4 的倍數。
>
> 小志說：「你也想太多了吧？這種數應該非常多才對，一點都不奇怪啊。」
>
> 聰明的讀者，你可以找到多少組正整數 (a,b)，讓 a^2-5 是 b 的倍數，而且 b^2-5 是 a 的倍數？

在我的好奇心驅使之下，我便決心要將它的規律尋找出來，並以此做為科展的主題，我們將這個符合這個題目的數列定名為「**互動共好**」$\langle a_n \rangle$數列。

貳、研究目的

一、透過觀察計算，找出「互動共好」$\langle a_n \rangle$數列的規律。

二、透過文獻探討，了解「互動共好」$\langle a_n \rangle$數列的一般式。

三、尋找「互動共好」$\langle a_n \rangle$數列的性質、遞迴式及二次曲線方程式。

四、推廣「互動共好」$\langle a_n \rangle$數列的性質、遞迴式、二次曲線方程式及一般式。

五、呈現「互動共好」$\langle a_n \rangle$數列的幾何表現。

參、研究設備及器材

鉛筆、計算機、紙、Geogebra 繪圖軟體。

肆、研究過程

一、觀察、尋找「互動共好」數對的規律

首先，先將題目重新思考一次，找出符合題意的第一組正整數對$(4,11)$，緊接著，往前思考是否有比 4 更小的數字符合題意，找出$(1,4)$這組答案，緊接著思考是否有比 11 大的數字符合題意，憑藉著毅力找出$(11,29)$這組答案，並透過觀察及計算機找出符合題意的正整數對:

$x^2-5=y$ **的倍數** $y^2-5=x$ **的倍數**	**符合題意的數對**(x,y)， **其中**$0<x<y$，$x,y\in N$
$\begin{cases}1^2-5=4\times(-1)\\4^2-5=1\times11\end{cases}$	$(1,4)$
$\begin{cases}4^2-5=11\times1\\11^2-5=4\times29\end{cases}$	$(4,11)$
$\begin{cases}11^2-5=29\times4\\29^2-5=11\times76\end{cases}$	$(11,29)$
$\begin{cases}29^2-5=76\times11\\76^2-5=29\times199\end{cases}$	$(29,76)$
$\begin{cases}76^2-5=199\times29\\199^2-5=76\times521\end{cases}$	$(76,199)$

從上表中，我們似乎可以找到符合題意的正整數對形成一個數列$(1,4,11,29,76,199)$，我們在網路上搜尋資料，發現這個數列為盧卡斯數列的奇數項(Bisection of Lucas sequence)，也就是我們說的「互動共好」$\langle a_n\rangle$數列。

二、文獻探討

有了以上的結果之後，更具信心和興趣，我們進行文獻探討:

【費氏數列】

費氏(Fibonacci)數列定義和性質:

(一)、 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ （$n \geq 2$），$F_1 = 1$ ，$F_2 = 1$

(二)、 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

【盧卡斯數列】

盧卡斯(Lucas)數列定義和性質:

(一)、 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ （$n \geq 2$），$l_0 = 2$，$l_1 = 1$，$l_2 = 3$

(二)、 $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

(三)、 $L_{2n} = L_n \times F_n$

(四)、 $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

三、「互動共好」數列的性質

(一)、依照文獻探討，定義:「互動共好」這個數列$\langle a_n \rangle = (1,4,11,29,76,199,521,1364,.........)$

的一般式為: $\langle a_n \rangle = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}$ ，$n \ge 2, n \in N$

(二)

「互動共好」這個數列$\langle a_n \rangle = (1,4,11,29,76,199,521,1364,.........)$有以下性質:

性質 1: $a_n{}^2 - 5 = a_{n-1} \times a_{n+1}$ ， $n \ge 2, n \in N$

【證明】:

$$a_n{}^2 - 5 = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]^2 - 5 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2(2n-1)} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2(2n-1)} + 2\times(-1)^{2n-1} -5$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2(2n-1)} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2(2n-1)} -2-5 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2(2n-1)} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2(2n-1)} -7$$

$$a_{n-1} \times a_{n+1} = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-3} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-3}\right] \times \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} + (-1)^{2n-3} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4} + (-1)^{2n-3} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2}$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} + (-1)^{2n-3} \times \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4}\right]$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-2} + (-1)\times 7$$

因此證明出: $a_n{}^2 - 5 = a_{n-1} \times a_{n+1}$ ， $n \ge 2, n \in N$

性質 2:

$$3a_n = a_{n-1} + a_{n+1}\text{，}\quad n \ge 2, n \in N$$

【證明】:

$$3a_n = 3\times\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$$

$$a_{n-1}+a_{n+1} = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-3} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-3}\right] + \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right]$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} \times \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right] + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} \times \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} \times 3 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} \times 3 = 3\times\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\right]$$

證明出:

$$3a_n = a_{n-1} + a_{n+1}\text{，}\quad n \ge 2, n \in N$$

(三)、「互動共好」數列的遞迴式

從性質 2: $3a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$，　$n \ge 2, n \in N$ ，我們可以改寫成遞迴式:

$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$ ，$n \ge 3, n \in N$ ，$a_1 = 1$ ，$a_2 = 4$

遞迴式:

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}\text{，}\ n \ge 3, n \in N\text{，}\ a_1 = 1\text{，}\ a_2 = 4$$

(四)、「互動共好」數列在幾何上的表現

無意當中，在 Geogebra 軟體中發現:

這個數列形成的數對，都在雙曲線 $x^2-3xy+y^2=5$ 上。

若數列定義: $a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$ ， $n\ge 3, n\in N$ ， $a_1=1$ ， $a_2=4$ 則 $(x,y)=(a_{n+1},a_n)$ $n\ge 1, n\in N$ ，在雙曲線 $x^2-3xy+y^2=5$ 上

【證明】:

利用數學歸納法

(1)n=1 時，

$(x,y)=(a_2,a_1)=(4,1)$

$4^2-3\times 4\times 1+1^2=5$ 成立

(2)假設 $n=k$ 時成立，

即 $(x,y)=(a_{k+1},a_k)$ 代入 $x^2-3xy+y^2=5$

得 $(a_{k+1})^2-3(a_{k+1})(a_k)+(a_k)^2=5$ 成立

(3)當 $n=k+1$ 時

$(x,y)=(a_{k+2},a_{k+1})$ 帶入 $x^2-3xy+y^2=5$ ，得

$(a_{k+2})^2-3(a_{k+2})(a_{k+1})+(a_{k+1})^2$ (因 $a_{k+2}=3a_{k+1}-a_k$)

$=(3a_{k+1}-a_k)^2-3(3a_{k+1}-a_k)(a_{k+1})+(a_{k+1})^2$

$=(9a_{k+1}^2-6a_{k+1}a_k+a_k^2)-(9a_{k+1}^2-3a_{k+1}a_k)+(a_{k+1})^2$

$=(a_{k+1})^2-3(a_{k+1})(a_k)+(a_k)^2=5$ ，依數學歸納法得證。

四、問題的推廣

做完以上討論之後，靠著我們的觀察力，我們發現:

若數列定義: $a_n=(\mathrm{p}-1)a_{n-1}-a_{n-2}$ ， $n\geq 3, n\in N$ ， $a_1=1$ ， $a_2=p$ ， $p\in N$ 則 $a_n^2-(p+1)=a_{n-1}\times a_{n+1}$

【證明】:

利用數學歸納法

(1) 當 $n=3$ 時，

$a_3=(p-1)\times p-1=p^2-p-1$ ， $a_1=1$ ， $a_2=p$

$a_2^2-(p+1)=p^2-p-1\ =a_3\times a_1$ 成立

(2) 假設當 $n=k$ 時成立，

即 $a_k=(p-1)a_{k-1}-a_{k-2}$ ， $a_{k-1}^2-(p+1)=a_k\times a_{k-2}$

即 $a_{k-2}=(p-1)a_{k-1}-a_k$

代入得

$a_{k-1}^2-(p+1)=a_k\times((p-1)a_{k-1}-a_k)$

$a_k^2=(p-1)a_ka_{k-1}-a_{k-1}^2+(p+1)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$

(3) 當 $n=k+1$ 時

$a_{k+1}=(p-1)a_k-a_{k-1}$

則 $a_k^2-(p+1)$ ((1)式代入)

$=(p-1)a_ka_{k-1}-a_{k-1}^2+(p+1)-(p+1)\ =(p-1)a_ka_{k-1}-a_{k-1}^2=\left[(p-1)a_k-a_{k-1}\right]\times a_{k-1}\ =a_{k+1}\times a_{k-1}$

依數學歸納法，得證。

在偶然的研究過程中，利用 GGB 發現，這個數列的數對可滿足特定雙曲線

若數列定義: $a_n=(\mathrm{p}-1)a_{n-1}-a_{n-2}$ ， $n\geq 3, n\in N$ ， $a_1=1$ ， $a_2=p$ ， $p\in N$ 則 $(x,y)=(a_{n+1},a_n)$ $n\geq 1, n\in N$ ，在雙曲線 $x^2-(\mathrm{p}-1)xy+y^2=(\mathrm{p}+1)$ 上

【證明】:

利用數學歸納法

(1)n=1 時，

$(x,y)=(a_2,a_1)=(\mathrm{p},1)$

$p^2-(\mathrm{p}-1)\times p\times 1+1^2=p+1$ 成立

(2)假設 $n=k$ 時成立，

即 $(x,y)=(a_{k+1},a_k)$ 代入 $x^2-(p-1)xy+y^2=p+1$

得 $(a_{k+1})^2-(p-1)(a_{k+1})(a_k)+(a_k)^2=p+1$ 成立

(3)當 $n=k+1$ 時

$(x,y)=(a_{k+2},a_{k+1})$ 帶入 $x^2-(p-1)xy+y^2=p+1$ ，得

$(a_{k+2})^2-(p-1)(a_{k+2})(a_{k+1})+(a_{k+1})^2$ (因 $a_{k+2}=(p-1)a_{k+1}-a_k$)

$=((p-1)a_{k+1}-a_k)^2-(p-1)((p-1)a_{k+1}-a_k)(a_{k+1})+(a_{k+1})^2$

$=((p-1)^2a_{k+1}^2-2(p-1)a_{k+1}a_k+a_k^2)-((p-1)^2a_{k+1}^2-(p-1)a_{k+1}a_k)+(a_{k+1})^2$

$=(a_{k+1})^2-(p-1)(a_{k+1})(a_k)+(a_k)^2=p+1$ ，依數學歸納法得證。

最後，我們將「互動共好」數列的一般式導出:

若數列定義: $a_n = (\mathrm{p}-1)a_{n-1} - a_{n-2}$ ， $n \geq 3$, $n \in N$ ， $a_1 = 1$ ， $a_2 = p$ ， $p \in N$

其一般式為:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{A^2-4}}\left[\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^{n-1}\left(A+1+\left(\frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2}\right)\right)-\left(\frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^{n-1}\left(A+1-\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}\right)\right)\right]$$

其中 $A = p-1$

【證明】:

詳見附錄。

五、幾何表現

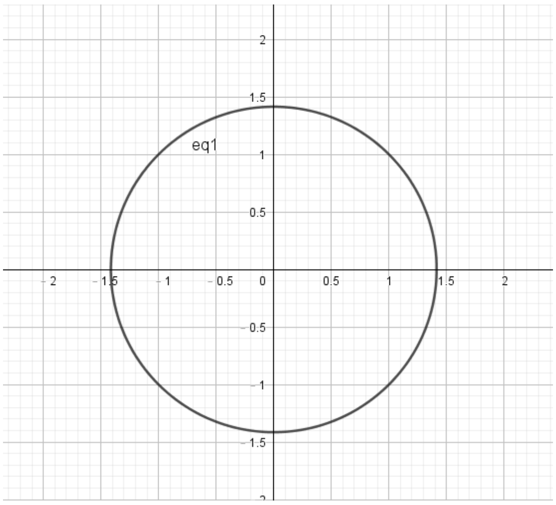
最後，我們把定義出來的數列，利用 Excel 計算出結果:

項數										
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	-1	1	5	11	19	29	41	55	71	89
4	-1	-1	7	29	71	139	239	377	559	791
5	1	-2	9	76	265	666	1393	2584	4401	7030
6	1	-1	11	199	989	3191	8119	17711	34649	62479
7	-1	1	13	521	3691	15289	47321	121393	272791	555281
8	-1	2	15	1364	13775	73254	275807	832040	2147679	4935050
9	1	1	17	3571	51409	350981	1607521	5702887	16908641	43860169
10	1	-1	19	9349	191861	1681651	9369319	39088169	133121449	389806471
11	-1	-2	21	24476	716035	8057274	54608393	267914296	1048062951	3464398070
12	-1	-1	23	64079	2672279	38604719	318281039	1836311903	8251382159	30789776159

最後，我們利用 GGB 來觀察了「互動共好」的數列

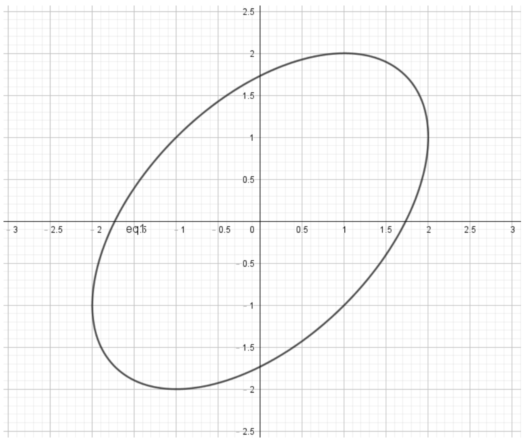
(一)、當 $a_1 = 1$ ， $a_2 = p = 1$時，

數列遞迴式為， $a_n = 0 \times a_{n-1} - a_{n-2}$ ，其二次曲線為: $x^2 + y^2 = 2$



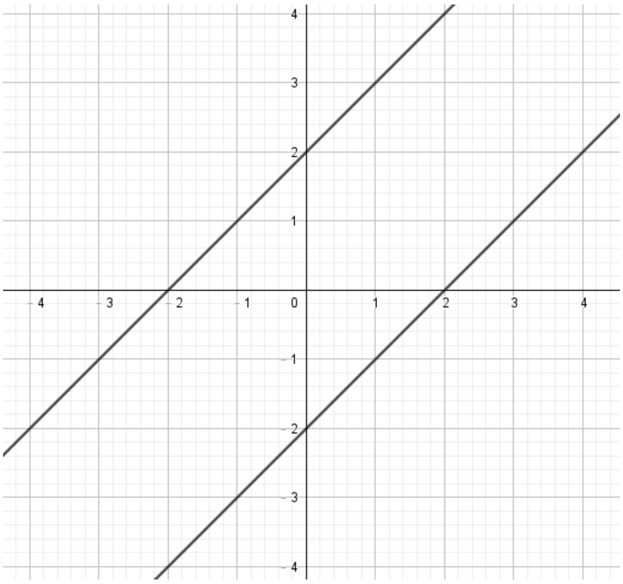
(二)、當 $a_1 = 1$ ， $a_2 = p = 2$時，

數列遞迴式為， $a_n = 1 \times a_{n-1} - a_{n-2}$ ，其二次曲線為: $x^2 - xy + y^2 = 3$



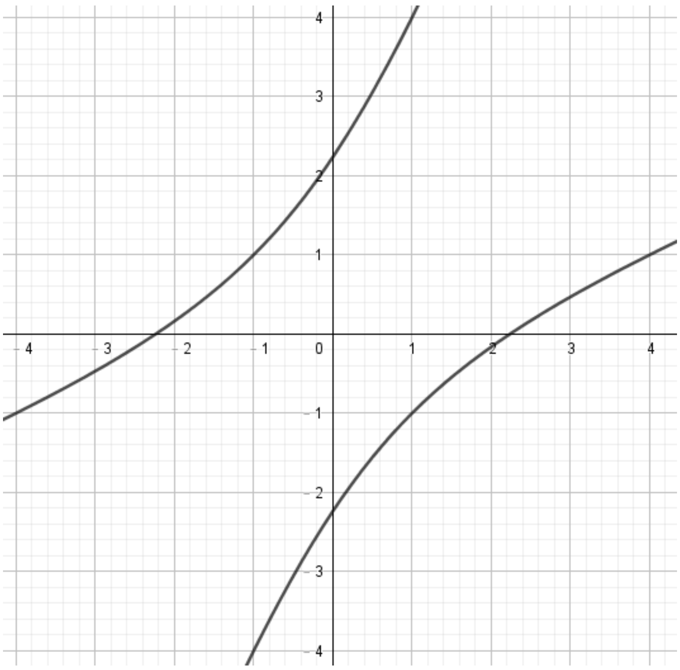
(三)、當 $a_1 = 1$，$a_2 = p = 3$ 時，

數列遞迴式為，$a_n = 2 \times a_{n-1} - a_{n-2}$ ，其二次曲線為: $x^2 - 2xy + y^2 = 4$

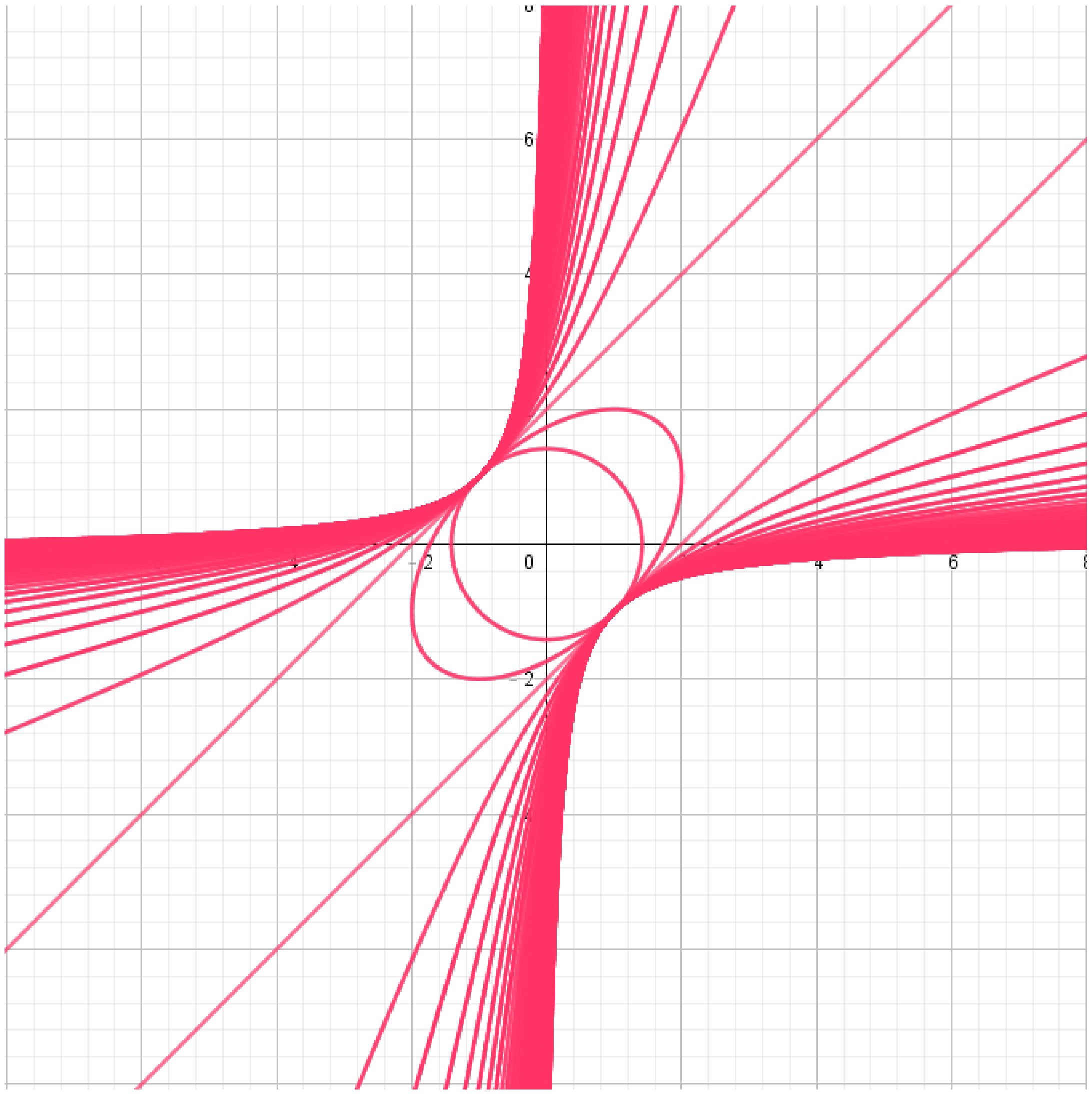


(四)、當 $a_1 = 1$，$a_2 = p = 4$ 時，

數列遞迴式為，$a_n = 3 \times a_{n-1} - a_{n-2}$ ，其二次曲線為: $x^2 - 3xy + y^2 = 5$



(五)最後我們把當 $a_1 = 1$，$a_2 = p = 1$ 到 100 的值統整為一個二次曲線圖形軌跡，形成下圖。



伍、結論

一、透過觀察及文獻探討知道，研究主題符合「互動共好」數列。

二、了解並證明「互動共好」數列的性質、一般式及二次曲線方程式。

三、推廣並證明「互動共好」數列的性質、一般式及二次曲線方程式。

四、利用電腦軟體將「互動共好」數列的性質量化及視覺化。

陸、未來展望

從沒有想過透過一個數學問題，竟然可以從中學習到許多的數學知識和體會數學之美，這個作品中，我們定義了數列遞迴式:

$a_n = (p-1)a_{n-1} - a_{n-2}$，$n \ge 3$，$n \in N$，$a_1 = 1$ ，$a_2 = p$ 透過的研究產生一些初步的成果，如將來有機會，可以再往更高階的遞迴式或者a_1起始值不同的數列來研究。

柒、參考文獻

1.游森棚(2017)。**互相牽制**。科學研習月刊，第 56 卷第 02 期，54。

2.徐瀝泉、王繼岳、陳漢冶。遞迴數列與不動點。引自:

https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d281/28109.pdf

捌、附錄:

簡易遞迴數列的解法，將它摘要如下:

$a_{n+1}=c_1a_n+c_2a_{n-1}$　(二階線性齊次遞迴數列)

遞迴關係式：$a_{n+1} = c_1a_n + c_2a_{n-1}$.......(*)，$n\geq 2$，其中 $c_2\neq 0$，一般項 a_n 的求法。

假設透過裂項的方法可將遞推式變形成為

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

的形式，那麼，$(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 就成為以 $a_2-\alpha a_1$ 為首項，β 為公比的等比數列。

比較 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n = 0$ 與 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1} =0$ 二式

得　　　$\alpha+\beta= c_1$　，$\alpha\beta= -c_2$

即 α,β 為二次方程式 $x^2=c_1x+c_2$ 的二個根，而這個式子稱為原遞推式的特徵方程式，α,β 稱為特徵根。

解二次方程式(特徵方程式)：$x^2=c_1x+c_2$ 的兩根為 α、β。

(1)若 α、β 為兩相異實數，則可以找到 A，B 使得 $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ 。

(2)若 α、β 為兩相等實數，則可以找到 A，B 使得 $a_n = (A + nB)\alpha^n$ 。

【證明】*(1) 若 α、β 為兩相異實數：*

(*)可化成 $\Rightarrow a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta a_{n-1}$，$\because \alpha+\beta= c_1$，$\alpha\beta=-c_2$

從上式可得：

$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$........... ①
$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})$........... ②

由① 利用累乘的方法可得：　$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1)$ .... ③

由② 利用累乘的方法可得： $a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$.............④

④ −③ $\Rightarrow(\alpha-\beta)a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)-\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$

$$\Rightarrow a_n=\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}+\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n=A\alpha^n+B\beta^n\text{，}A=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}\text{，}B=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\right)\text{。}$$

這裡的 A、B 為待定的常數與 a_1、a_0 有關。

反之，$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$ 亦滿足(*)式，其中 A、B 為任意常數

直接計算 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=(A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1})-c_1(A\alpha^n+B\beta^n)-c_2(A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1})$

$$=A\alpha^{n-1}(\alpha^2-c_1\alpha-c_2)+B\beta^{n-1}(\beta^2-c_1\beta-c_2)=0$$

故得證。

(2)若 α、β 為兩相等實數

由① $a_{n+1}-\alpha a_n=\alpha(a_n-\alpha a_{n-1})$ 利用累乘的方法可得：

$$\alpha^{n-1}a_2-\alpha^n a_1=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

而由
$$\left.\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha a_n&=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\\ \alpha a_n-\alpha^2a_{n-1}&=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\\ \alpha^2a_{n-1}-\alpha^3a_{n-2}&=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\\ &\vdots\\ \alpha^{n-1}a_2-\alpha^n a_1&=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\end{aligned}\right]\text{累加起來}$$

$\Rightarrow$得 $a_{n+1}-\alpha^n a_1=n\cdot\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$.....⑤

由⑤ $a_{n+1}=\alpha^n a_1+\left(\frac{a_2}{\alpha}-a_2\right)n\alpha^n=(A+nB)\alpha^n$。$A=a_1$，$B=\left(\frac{a_2}{\alpha}-a_2\right)$

反之，對於任意的實數 A,B，$a_n=(A+nB)\alpha^n$ 亦滿足(*)。

因為 $\alpha=\beta$，$\alpha+\beta=c_1$，$\alpha\beta=-c_2\Rightarrow c_1=2\alpha$，$c_2=-\alpha^2$

直接計算

$$a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=[A+(n+1)B]\alpha^{n+1}-c_1(A+nB)\alpha^n-c_2[A+(n-1)B]\alpha^{n-1}$$

$$=A(\alpha^{n+1}-c_1\alpha^n-c_2\alpha^{n-1})+Bn(\alpha^{n+1}-c_1\alpha^n-c_2\alpha^{n-1})+B(\alpha^{n+1}+c_2\alpha^{n-1})$$

$$=A\cdot 0+Bn\cdot 0+B\alpha^{n-1}(\alpha^2-\alpha^2)=0$$

故得證。

看到這篇文章後，我將我的數列的數值代進去得到

$(p-1)a_{n+1}-a_n=a_{n+2}$ 一樣將它變形為

$\Rightarrow a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ 與 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=0$

將兩式去做比較可得到 $\Rightarrow \alpha+\beta=(p-1)$ ， $\alpha\beta=1$

解出α跟β可得到

$\Rightarrow \alpha=\dfrac{(p-1)+\sqrt{p^2-2p-3}}{2}=\dfrac{A+\sqrt{B}}{2}$ $\beta=\dfrac{(p-1)-\sqrt{p^2-2p-3}}{2}=\dfrac{A-\sqrt{B}}{2}$

(其中 A=$(p-1)$、B=p^2-2p-3 ，又$B=A^2-4$)

$\alpha-\beta=\sqrt{p^2-2p-3}=\sqrt{B}=\sqrt{A^2-4}$ =

之後將它代回已經化簡後的這一式

$$a_n=\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}+\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$$

將α跟β、a_1和a_2代進去可得到

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\sqrt{A^2-4}}\left[\left(\frac{A+\sqrt{B}}{2}\right)^{n-1}\left(p-\frac{A-\sqrt{B}}{2}\right)-\left(\frac{A-\sqrt{B}}{2}\right)^{n-1}\left(p-\frac{A+\sqrt{B}}{2}\right)\right]$$

=

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{A^2-4}}\left[\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^{n-1}\left(A+1+\left(\frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2}\right)\right)-\left(\frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^{n-1}\left(A+1-\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}\right)\right)\right]$$

之後將數字代進去驗證看看，確定前幾項無誤，這個就是$a_n=(\mathrm{p}-1)a_{n-1}-a_{n-2}$ ，

$n\geq 3, n\in N$ ， $a_1=1$ ， $a_2=p$ ， $p\in N$ 的一般項。