嘉義市第38屆中小學科學展覽會作品說明書

翻硬幣遊戲步數之探討與程式開發

網址 https://Scratch.mit.edu/projects/372447738/ (用 Chrome 打開)

介紹影片 https://youtu.be/cXX72nazzVE

科別：數學科

組別：國小組

關鍵詞：翻硬幣、等差公式、Scratch 程式

編號：

中 華 民 國 108 年 03 月 24 日

摘　要

本研究探討「IMO 的翻硬幣」的數學遊戲，遊戲規則一是「根據反面硬幣的數量 k，就第 k 個硬幣做翻面動作，直到全部翻成正面就結束。」我們從 1、2、3 個反面的情況開始分析，找出每增加一個反面時，增加的步數，推導出，如果有 r 個反面，位置在 x_1、x_2、…、x_r，總步數公式$=2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2$，也就是只要看一開始這一列的反面硬幣在第幾個位置，以及共有幾個反面硬幣數，就可以得到總步數。本研究也改變遊戲規則，自訂遊戲規則二是「看反面數量→翻到全反面」，結果發現，如果最後一個硬幣位置是正面時，則無解；是反面，則有解，總步數公式$=〔2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2〕-n$，其中 n 是總硬幣數。最後，我們用 Scratch 程式製作翻硬幣遊戲，讓大家可以線上玩。

壹、研究動機

我們從網路上看到科學月刊游森棚學者發表的「IMO 的翻硬幣」(https://www.scimonth.com.tw/tw/article/show.aspx?num=1853&root=2&page=1)（科學月刊 597 期 2019.09)，我們開始研究翻面動作的次數，原遊戲方法是「根據反面硬幣的數量 k，就第 k 個硬幣做翻面動作，直到全部翻成正面就結束。」我們發現有規律性，值得探討下去找出規則性，也想出不同的玩法，進一步探討能否完成翻面的成功性(有解或無解)。最後，我們想用 Scratch 程式設計發展成線上遊戲（我們做出的線上遊戲影片的介紹 https://youtu.be/cXX72nazzVE)，讓其他人可以玩這個翻硬幣遊戲。(教材相關性：五年級數學因數與倍數）

貳、研究目的

(一)數學主題

1.研究一：原遊戲規則，看反面硬幣數量→翻到全正面，探討步數的規則公式。

原遊戲規則： 把 n 枚硬幣排成一列，如果有 r 枚反面（●）朝上，從左邊數來第 r 枚硬幣要做翻面的動作，依此原則一直翻下去，直到所有的硬幣都是正面（○）朝上為止。

例如：「○●○」的情況，翻法如下，共翻面 3 次動作完成。

原始面	1	2	3	翻面動作
○●○	→ ●●○	→ ●○○	→ ○○○	
有 1 反面	左 1 翻面(正→反) 有 2 反面	左 2 翻面(正→反) 有 1 反面	左 1 翻面(正→反) 全正面(完成)	3

2.研究二：改變遊戲規則，探討有無解與步數公式。

嘗試改變遊戲規則，看反面數量 → 翻到全反面，初步發現有些情況有解，有些情況無解。

> 有解：可完成任務，例如：遊戲規則是翻到全正面，所有佈局盤面都能翻到全正面，稱為完成任務。
>
> 無解：出現無法進行下一步、或落入無限循環動作，某些佈局盤面無法完成遊戲規則的任務，稱為無解。

3.研究三：分析有解或無解，提出證明。

由研究一、二的結果，有些遊戲規則有解或無解，提出證明。

4.研究四：資訊化

以 Scratch 程式設計發展成線上遊戲 ，讓其他人有辦法認識翻硬幣這個遊戲。

我們由研究一的結果，應該可以找到正、反面在不同位置時的步數公式，因此各種佈局盤面是可以推算出來步數的。如果某一盤面佈局需要 x 步的動作，在程式上可以設定翻一個硬幣需要多少時間(設定 y 秒)，並且分成初階、進階及高階，初階的秒數設定長一點，高階秒數短一點，當全部翻成正面時，共花費的時間 $t = x \times y$ ，根據玩家的 t ，給予點數， t 越少，則點數越多。

(二)研究問題

以科學月刊 597 期的「IMO 的翻硬幣」遊戲為主題，探討翻面動作的規則性、改變遊戲規則及發展線上程式，研究項目如下：

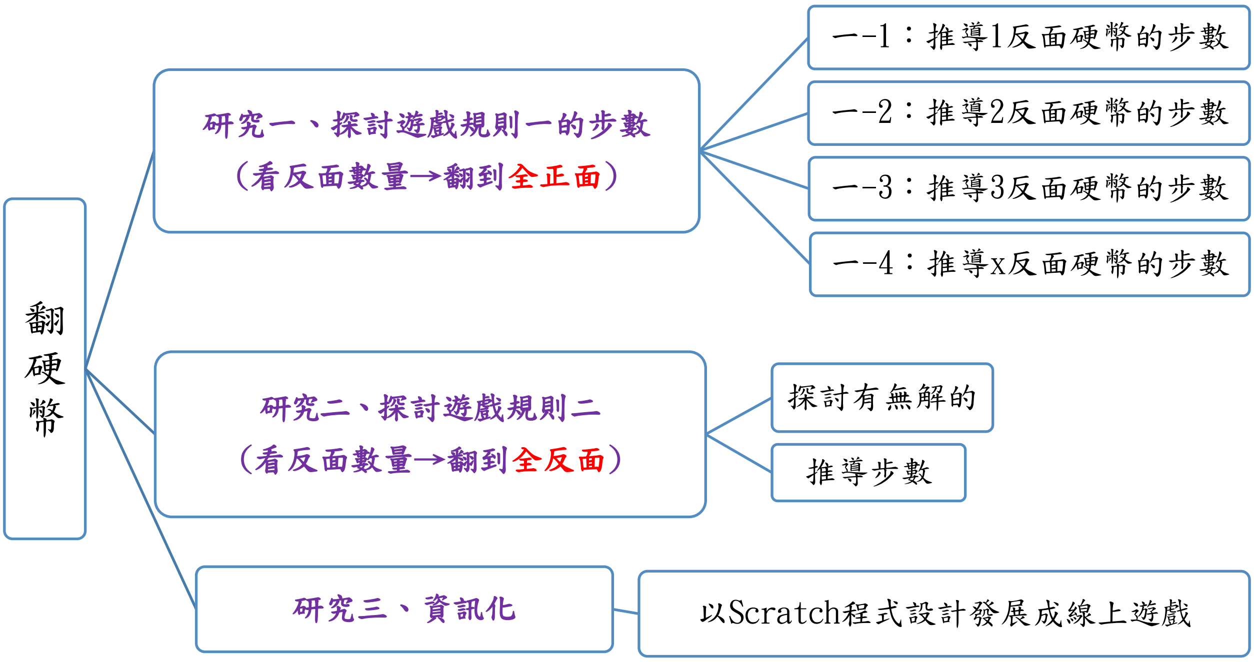


圖 1：研究項目圖

參、研究器材與設備

筆電、SCRATCH 軟體、磁鐵。

肆、文獻探討

一、科學月刊「IMO 的翻硬幣」

我們從網路上看到 2019 年 9 月 1 日科學月刊游森棚學者發表的「IMO 的翻硬幣」(https://www.scimonth.com.tw/tw/article/show.aspx?num=1853&root=2&page=1)，以此遊戲試玩，發現有規律性，值得探討下去。

差異處：根據本研究的翻面規則，雖然游教授有解答，但是那是用較高階的數學來呈現，我們想要將所有佈局盤面很完整的進行探討。

二、第 36 屆「翻來覆去乾坤轉—翻硬幣遊戲的新發現」全國科展作品

民國 85 年第 36 屆科展作品「翻來覆去乾坤轉—翻硬幣遊戲的新發現」，網址 https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/36/pdf/36s/195.pdf。

差異處：雖然名稱都是「翻硬幣」的遊戲，但翻面的規則與我們的不同，此作品的規則是：硬幣全部朝上，規定每一次翻動其中 y 個，則經過若干次翻動後，使全部的硬幣反面朝上。

伍、研究過程、結果與討論

一、遊戲規則與玩法

(一)名詞解釋

1. n：總硬幣數，例如圖 2 中全部有 5 個硬幣，即 n=5。

2. r：反面硬幣數，例如圖 2 中有 3 個反面，即 r=3。

3. x_i：代表第 i 個反面的位置。例如圖 2 中 x_1、x_2、x_3分別在第 2、4 、5 的位置。

4. P_i:代表在第 i 個位置的正面硬幣，

   例如圖 3 中的正面硬幣位置分別為 P_1、P_3、P_5、P_n。

5. P_i^j:代表在第 i 個位置的反面硬幣，它是第 j 個反面，

   例如圖 3 中的反面硬幣位置分別為P_2^1、P_4^2、P_i^j

6. A：每增加 1 個反面時，根據此反面硬幣的位置，它所增加的步數，

   例如圖 4：原 4 個硬幣是 8 步，

   右方增加 1 個硬幣在第 5 個位置，增加 9 步，A(5)=9。

6. **總步數**：硬幣翻到全正面(遊戲規則一)或全反面(遊戲規則二)的總步數，

   例如圖 4 中的第二列(n=5，r=3)，總步數=A(2)+A(4)+A(5)=18。

7. S_n^r：當總硬幣 n 個，其中反面有 r 個，S_n^r代表所有情況的組合。例如總硬幣 3 個，其中有 2 個反面的所有情況，代號設為$S_{n=3}^{r=2}$。

1 2 3 4 5 ○ ● ○ ● ● x_1 x_2 x_3	1 2 3 4 5 … i … n ○ ● ○ ● ○ … ● … ○ P_1 P_2^1 P_3 P_4^2 P_5 P_i^j … P_n
圖 2：範例 1	圖 3：範例 2

n=4，r=2 ○●○●→8 步 n=5，r=3 ○●○●●→18 步=8+9 步 A(5)=9	●●○→2 步 ●○●→4 步 ○●●→6 步
圖 4：範例 3 右方增加 1 個硬幣，多 9 步。	以上三種情況是的 整個組合 代號為$S_{n=3}^{r=2}$

(二)玩法

1.研究一：原遊戲規則，看反面硬幣數量→翻到全正面，探討步數的規則公式。

> 原遊戲規則：
>
> 把 n 枚硬幣排成一列，如果有 r 個反面（●）朝上，

從左邊數來第 r 個硬幣要做翻面的動作，
依此原則一直翻下去，直到所有的硬幣都是正面（○）朝上為止。

例如：「○●○」n=3，r=1 的情況，翻法如下，共翻面 3 步完成。

原始面	第 1 步	第 2 步	第 3 步
○●○	●●○	●○○	○○○
有 1 反面	左 1 翻面(正→反)	左 2 翻面(正→反)	左 1 翻面(正→反)
	有 2 反面	有 1 反面	全正面(完成)

2. 看反面數量→翻到全反面：

新遊戲規則：
把 n 枚硬幣排成一列，如果有 r 個反面（●）朝上，
從左邊數來第 r 個硬幣要做翻面的動作，
依此原則一直翻下去，直到所有的硬幣都是反面（●）朝上為止。

(1)有解

例如：「○○●」n=3，r=1 的情況，翻法如下，共翻面 2 步完成。

原始面	第 1 步	第 2 步
○○●	●○●	●●●
有 1 反面	左 1 翻面(正→反)	左 2 翻面(正→反)
	有 2 反面	全反面(完成)

(2)無解

「●●○」n=3，r=2 的情況，翻法如下，共翻面 2 步完成。

原始面	第 1 步	第 2 步
●●○	●○○	○○○
有 2 反面	左 2 翻面(反→正)	左 1 翻面(反→正)
	有 1 反面	全正面(無解)

二、研究一、原遊戲規則(看反面數量→翻到全正面)探討步數的規則公式

原遊戲規則：看反面數量→翻到全正面

(一)推導 1 反面硬幣的步數 (r=1)

1. n=3、4、5 的所有結果

<table>
<tr><th>n=3</th><th>n=4</th><th>n=5</th></tr>
<tr><td>●○○→1 步
○●○→3 步
○○●→5 步</td><td rowspan="2">●○○○→1 步
○●○○→3 步
○○●○→5 步
○○○●→7 步</td><td rowspan="3">●○○○○→1 步
○●○○○→3 步
○○●○○→5 步
○○○●○→7 步
○○○○●→9 步</td></tr>
<tr><td rowspan="2">總硬幣 3 個，有 1 反面的組合情況，代號設為$S_{n=3}^{r=1}$。</td></tr>
<tr><td>總硬幣 4 個，有 1 反面的組合情況，代號設為$S_{n=4}^{r=1}$。</td></tr>
</table>

由以上 n=3、4、5 的結果，我們看到 1 個反面時，位置每往右移動一格，就會增加 2 步，所以，想要推導出「1 個反面硬幣，這個反面硬幣在第 x 的位置時，全翻成正面的步數公式。」

2. 推導過程

位置每往右移動一格，就會增加 2 步，所以 d=2，我們先學會等差公式後，如果這 1 個反面的位置在 x_1，得到總步數=$1+2(x_1-1)=2x_1-1$。

3. 小結論：r=1 總步數=$2x_1-1$，x_1代表在從左邊數過來的位置。

如果是 1 個反面的情況，只要知道這個反面的位置，總步數=$2x_1-1$。

(二)2 個反面 r=2

1. n=3、4、5 的所有結果

<table>
<tr><td>n=3</td><td>●●○→2
●○●→4
○●●→6</td><td colspan="2"><組合 1>
總硬幣 3 個，其中有 2 個反面的組合情況，代號設為$S_{n=3}^{r=2}$。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n=4</td><td colspan="2">●●○ ○→2
●○● ○→4
○●● ○→6</td><td>●○○ ●→ 6 (6=1+5)
○●○ ●→ 8 (8=3+5)
○○● ●→ 10 (10=5+5)</td></tr>
<tr><td colspan="2"><組合 1>
右邊加 1 正面硬幣，
步數與$S_{n=3}^{r=2}$的**步數相同**。</td><td><組合 2>
右邊加 1 反面硬幣，
步數=$S_{n=3}^{r=2}$步數+5。此情況代號$S_{n=4}^{r=2}$。</td></tr>
</table>

n=5	●●○ ○○→2 ●○● ○○→4 ○●● ○○→6	●○○ ● ○→6 (6=1+5+0) ○●○ ● ○→8 (8=3+5+0) ○○● ● ○→10(10=5+5+0)	●○○○ ●→8 (8=1+7) ○●○○ ●→10(10=3+7) ○○●○ ●→12(12=5+7) ○○○● ●→14(14=7+7)
	<組合 1> 右邊**加 2 正面硬幣**， 步數與$S_{n=3}^{r=2}$的步數**相同**。	<組合 2> 右邊先**加 1 正再加 1 反面硬幣**， 步數=$S_{n=3}^{r=2}$步數+5+0。	<組合 3> 右邊**加 1 反面硬幣**， 步數=$S_{n=4}^{r=1}$步數+7

2. 討論

(1)**<u>在右方增加正面硬幣，不影響步數</u>**。

例如：

項目	n=3 的<組合 1> 代號 $S_{n=3}^{r=2}$	n=4 的<組合 1>	n=5 的<組合 1>
盤面	●●○→2 ●○●→4 ○●●→6	●●○ ○→2 ●○● ○→4 ○●● ○→6	●●○ ○○→2 ●○● ○○→4 ○●● ○○→6
說明	n=3 的<組合 1>，步數分別 2、4、6； n=4 的<組合 1>，步數也是 2、4、6； n=5 的<組合 1>，步數也是 2、4、6； 右方加正面，步數皆相同。		

(2)**<u>在右方增加 1 反面</u>**

問題：已有 1 反面，在 x_2位置要增加第 2 個反面時，步數會增加多少步呢?

分析：以右方「第 1 個反面」與「增加第 2 個反面」時，二者步數進行比較：

n=2	n=3	n=4	n=5
●●→2(1+1)	●○●→4(1+3) ○●●→6(3+3)	●○○●→6(1+5) ○●○●→8(3+5) ○○●●→10(5+5)	●○○○●→8(1+7) ○●○○●→10(3+7) ○○●○●→12(5+7) ○○○●●→14(7+7)
P_2^2加反面， 步數+1。	P_3^2加反面， 步數+3。	P_4^2加反面， 步數+5。	P_5^2加反面， 步數+7。

利用等差公式，條件是首項=1，公差 d=2，得到

在 x_2位置增加第 2 個反面時，增加的步數為 $A(x_2)=A_2+(x_2-2)d=1+2(x_2-2)=2x_2-3$。

3. 小結論：2 反面公式

(1)**<u>在右方增加正面硬幣，都不影響步數</u>**。

(2)**在 x_2 位置增加第 2 個反面，增加的步數 $A(x_2)=2x_2-3$。**

○ ○… ●…○ ●→增加 $2x_2-3$ 步

P_1 P_2 … $\boldsymbol{P^1_{x1}}$ $\boldsymbol{P^2_{x2}}$

(3)總步數

$r=2$，有 2 個反面，位置在 x_1、x_2，

由 p.7，1 反面步數是 $A(x_1)=2x_1-1$，

由以上推導得知，右方增加 1 個反面，在位置 x_2，增加的步數是 $A(x_2)=2x_2-3$，

$$A(x_1)+A(x_2)=(2x_1-1)+(2x_2-3)=2(x_1+x_2)-(1+3)=2(x_1+x_2)-4=2(x_1+x_2)-2^2$$

(三)3 個反面 r=3

1. n=3、4、5 的部份結果

<table>
<tr><td>n=3</td><td>●●●→3</td><td colspan="2"><組合 1>
總硬幣 3 個，其中有 3 個反面的組合情況，代號設為$S^{r=3}_{n=3}$。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n=4</td><td>●●● ○→3</td><td colspan="2">●●○ ●→5(2+3)
●○● ●→7(4+3)
○●● ●→9(6+3)</td></tr>
<tr><td><組合 1>
右邊加 1 正面硬幣，
步數與$S^{r=3}_{n=3}$的步數相同。</td><td colspan="2"><組合 2>
右邊加 1 反面硬幣，
步數=$S^{r=3}_{n=3}$步數+3。此情況代號$S^{r=3}_{n=4}$。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n=5</td><td>●●● ○○→3</td><td>●●○ ● ○→ 5(2+3+0)
●○● ● ○→ 7(4+3+0)
○●● ● ○→ 9(6+3+0)</td><td>●●○ ○ ●→7(2+5)
●○● ○ ●→9(4+5)
○●● ○ ●→11(6+5)</td></tr>
<tr><td><組合 1>
右邊加 2 正面硬幣，步數與$S^{r=2}_{n=3}$、$S^{r=2}_{n=4}$的步數相同。</td><td><組合 2>
右邊先加 1 正再加 1 反硬幣，
步數=$S^{r=2}_{n=3}$步數+3+0。</td><td><組合 3>
右邊先加 1 反再加正 1 硬幣，步數=$S^{r=1}_{n=4}$步數+0+5。</td></tr>
</table>

2. 討論

(1)**在右方增加正面硬幣，不影響步數**。

例如：

項目	n=3 的<組合 1> 代號$S^{r=3}_{n=3}$	n=4 的<組合 1>	n=5 的<組合 1>
盤面	●●●→3	●●● ○→3	●●● ○○→3
說明	n=3 的<組合 1>，步數是 3； n=4 的<組合 1>，步數是 3； n=5 的<組合 1>，步數是 3； 右方加正面，步數皆相同。		

(2)<u>**在右方增加 1 反面**</u>

已有 2 反面，在 x_3 位置要增加第 3 個反面時，步數會增加多少步呢?

分析：以右方「第 1、2 個反面」與「增加第 3 個反面」時，二者步數進行比較：

n=4	n=5	n=6
●●○●→5(2+3) ●○●●→7(4+3) ○●●●→9(6+3)	●●○○●→7(2+5) ●○●○●→9(4+5) ○●●○●→11(6+5)	●●○○○○●→9(2+7) ●○●○○○●→11(4+7) ○●●○○○●→13(6+7)
P_4^3加反面，步數+3。	P_5^3加反面，步數+5。	P_6^3加反面，步數+7。

利用 等差公式，條件是首項=2，公差 d=2，得到

第 x_3 個位置增加第 3 個反面硬幣，增加的步數為 $A(x_3)=2(x_3-3)+1=2x_3-5$。

3. 小結論：3 反面公式

(1)<u>**在右方增加正面硬幣，都不影響步數**</u>。

(2)<u>**在第 x_3 的位置增加第 3 個反面，增加的步數 $A(x_3)=2x_3-5$。**</u>

○ ○ ⋯ ●○●⋯○ ●→增加 $2x_3-5$ 步

P_1 P_2 $\boldsymbol{P_{x1}^1}$ $\boldsymbol{P_{x2}^2}$ $\boldsymbol{P_{x3}^3}$

(3)總步數

r=3，有 3 個反面，位置在 x_1、x_2、x_3，

由 p.7、8，第 1、2 反面步數是 $A(x_1)=2x_1-1$、$A(x_2)=2x_2-3$，

由以上推導得知，右方增加 1 個反面，在位置 x_3，增加的步數是 $A(x_3)=2x_3-5$，

$A(x_1)+A(x_2)+A(x_3)=(2x_1-1)+(2x_2-3)+(2x_3-5)=2(x_1+x_2+x_3)-(1+3+5)=2(x_1+x_2+x_3)-9$

$=2(x_1+x_2+x_3)-3^2$

(四)x 個反面 r=x

設現在有一列硬幣，總數 n 個，其中有 x 個反面，

P_1代表在第 1 個位置的硬幣、P_n代表在第 n 個位置的硬幣；

P_i^j:代表第 j 個反面在第 i 個位置。

範例：○○○●○○○○●○○○○● ⋯ ●⋯

P_1 P_4^1 P_8^2 P_{12}^3⋯ P_i^j ⋯

反面的位置分別在P_4^1、P_8^2、P_{12}^3、⋯、P_i^x。

問題:有 r 個反面的時候，總步數會是幾步呢?

由以上 r=1、2、3 的總步數(p.7、p.8、p.10)，整理如下：

r=1 時，只有 1 個反面，位置在 x_1，則總步數=$2(x_1)-1^2$。

r=2 時，有 2 個反面，位置在 x_1、x_2，則總步數=$2(x_1+x_2)-2^2$。

r=3 時，有 3 個反面，位置在 x_1、x_2、x_3，則總步數=$2(x_1+x_2+x_3)-3^2$。

以上，如果有 r 個反面，位置在 x_1、x_2、…、x_r，

則總步數=$2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2$。

3. 小結論：r 個反面公式

(1)**在右方增加正面硬幣，都不影響步數**。

(2)**在右方增加 1 個反面，這個反面的位置在第 x_r 個，增加的步數 $A(x_r)=2x_r-(2r-1)$。**

有 r 個反面，位置在 x_1、x_2、…、x_r，

每個反面的步數分別為 $A(x_1)$、$A(x_2)$、…、$A(x_r)$，

也就是 $(2x_1-1)$、$(2x_2-3)$、…、$2x_r-(2r-1)$，

(3)由每增加 1 個反面的步數，總步數推導如下：

$A(x_1)+A(x_2)+\cdots+A(x_r)$

$=(2x_1-1)+(2x_2-3)+\cdots+[2x_r-(2r-1)]$

$=2(x_1+x_2+\cdots+x_r)-[1+3+\cdots+(2r-1)]$

$=2(x_1+x_2+\cdots+x_r)-\left\{\frac{[1+(2r-1)]}{2}\times r\right\}$

$=2(x_1+x_2+\cdots+x_r)-r^2$

例：●○●○● 有 3 個反面，x_1、x_2、x_3 的位置分別在 1、3、5，r=3，

套入公式，總步數=$2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2$

$=2(1+3+5)-(1+3+5)=18-9=9$，我們操作後，翻面數完全正確。

綜合以上，有 r 個反面，位置在 x_1、x_2、…、x_r，則總步數=$2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2$。

例：●○●○●，3 個反面 x_1、x_2、x_3 的位置分別在 1、3、5，r=3，

三、研究二、改變遊戲規則探討有無解與步數公式

原遊戲規則，看反面硬幣數量→翻到全反面，探討步數的規則公式，以及有無解。

新遊戲規則：

把 n 枚硬幣排成一列，如果有 r 枚反面（●）朝上，從左邊數來第 r 枚硬幣要做翻面的動作，依此原則一直翻下去，直到所有的硬幣都是反面（●）朝上為止。

(一)有無解的探討

1. 我們先以 1 個反面，而 n=3、4、5 的所有結果，整理如下：

<table>
<tr><td>n=3</td><td>●○○→x
○●○→x
○○●→2</td><td colspan="2"><組合 1>
總硬幣 3 個，其中有 1 個反面的組合情況，代號設為$S_{n=3}^{r=1}$。
最後一顆是反面→有解。
最後一顆是正面→無解。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n=4</td><td colspan="2">●○○ ○→x
○●○ ○→x
○○● ○→x</td><td>○○○ ●→3</td></tr>
<tr><td colspan="2"><組合 1>
右邊加 1 正面硬幣，因為最後一顆都是正面，出現步數→無解。</td><td><組合 2>
右邊加 1 反面硬幣，進行比較：
➢ ○○○ ●
原無解 變成有解→步數 3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n=5</td><td>●○○ ○○→x
○●○ ○○→x
○○● ○○→x</td><td>○○○ ● ○→x</td><td>○○○○ ●→4</td></tr>
<tr><td><組合 1>
右邊加 2 正面硬幣，
步數→無解。</td><td><組合 2>
右邊先加 1 反面再加 1 正面，
步數→無解。</td><td><組合 3>
右邊加 1 反面硬幣，進行比較：
➢ ○○○○ ●
原無解 變成有解→步數 4</td></tr>
</table>

2. 討論

(1)**<u>在右方增加正面硬幣，步數會變成無解</u>**

例如：

<table>
<tr><td>項目</td><td>n=3 的<組合 1> 代號$S_{n=3}^{r=3}$</td><td>n=4 的<組合 1></td><td>n=5 的<組合 1></td></tr>
<tr><td>盤面</td><td>●○○→x
○●○→x
○○●→2</td><td>●○○ ○→x
○●○ ○→x
○○● ○→x</td><td>●○○ ○○→x
○●○ ○○→x
○○● ○○→x</td></tr>
<tr><td>說明</td><td colspan="3">n=3 的<組合 1>，最後一顆是反面→有解，最後一顆是正面→無解。
n=4 的<組合 1>在右方加 1 正面(○)，n=5 的<組合 1>在右方加 2 正面(○○)，這二個組合步數都是x，所以「右方加正面，步數會變成無解。」</td></tr>
</table>

(2)**<u>有無解出現的情況</u>**

①由以上第(1)點的結果得知，<u>最後一個位置是正面時，則無解；是反面，則有解</u>。

②為什麼會無解?

設有 n 個硬幣，如果最後一個位置是正面，因為遊戲規則是「看反面數量，翻到全

反面」，不可能出現 n 個反面，所以第 n 個位置不可能去翻動，而它又是正面，所以，永遠不可能翻成反面，也就是無法翻到全反面，則無解。

例：○●○的情況，最後一個硬幣是正面，翻面流程如下

原始面	第 1 次翻面	第 2 次翻面	第 3 次翻面
○●○	→ ●●○	→ ●○○	→ ○○○
有 1 反面	左 1 翻面(正→反) 有 2 反面	左 2 翻面(正→反) 有 1 反面	左 1 翻面(正→反) 全正面(無解)

(二)總步數

1. 遊戲規則一與遊戲規則二的步數「差值」

我們將此二個遊戲規則中有解的情況下，討論二者之間的「差值」:

以「○●●」為例，翻法如下：

➢ **遊戲規則一**：看反面硬幣數量→翻到全正面，共翻面 6 次動作完成。

原始面	1	2	3
○●●	→ ○○●	→ ●○●	→ ●●●
有 2 反面	左 2 翻面(反→正) 有 1 反面	左 1 翻面(正→反) 有 2 反面	左 2 翻面(正→反) 有 3 反面

4		5		6	
→	●●○	→	●○○	→	○○○
左 3 翻面(反→正) 有 2 反面		左 2 翻面(反→正) 有 1 反面		左 1 翻面(反→正) 全正面(完成)	

➢ **遊戲規則二**：看反面硬幣數量→翻到全反面，共翻面 3 次動作完成。

原始面	1		2		3	
○●●	→	○○●	→	●○●	→	●●●
有 2 反面	左 2 翻面(反→正) 有 1 反面		左 1 翻面(正→反) 有 2 反面		左 2 翻面(正→反) 全反面(完成)	

遊戲規則一需要第 4、5、6 步驟，遊戲規則二不需要從全反面翻回全正面，所以會少 3 個步驟，也就是總硬幣的數量。

2. 小結論：x 個反面 r=x

在有解的情況下(最後一個硬幣一定是反面)，我們拿出研究一的總步數公式來進行比較，發現：

在遊戲規則一(翻到全正面)，我們玩的過程中發現，硬幣翻回全正面之前，會先歷經一次全反面，所以翻回全正面會多了一輪(總硬幣數的步數)，在此計為 n。

所以二個遊戲的差異是，遊戲規則二是翻到全反面就停止了，少了翻回全正面的步數(總硬幣數)，

所以遊戲規則二的總步數公式=〔$2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2$〕$-n$

例:○●●○● 有 3 個反面 x_1、x_2、x_3 的位置分別在 1、3、5，r=3，n=5，

套入公式，遊戲規則二的總步數公式=〔$2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2$〕$-n$

總步數公式=$2(2+3+5)-3^2-5$ = 6，我們操作後，翻面數完全正確。

四、研究三、資訊化

我們利用 Scratch 程式製作翻硬幣遊戲，讓這個遊戲可以成為線上遊戲。

介紹影片 https://youtu.be/cXX72nazzVE。

(一)本研究自創的翻硬幣 Scratch 遊戲的進入方法

網址 https://Scratch.mit.edu/projects/372447738/ (用 Chrome 打開)

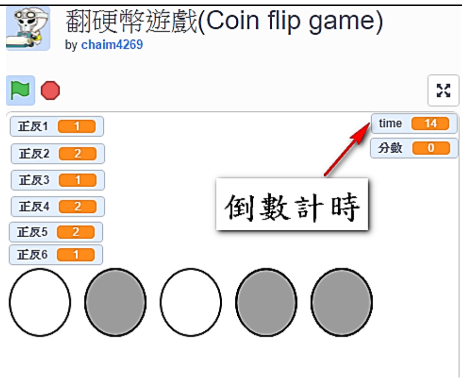
(請用 google chrome 系統，並複製連結)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>1. google 輸入「Scratch」，點選「Scratch」。</td>
<td>2. 在上方面搜尋「翻硬幣」，點選進入。</td>
</tr>
</table>

(二)**線上操作方法**：不需要成為會員也能操作。

1. 按一下灰色遊戲框，就會進入界面。

2. 選擇硬幣數，例如，輸入5，再按打勾。

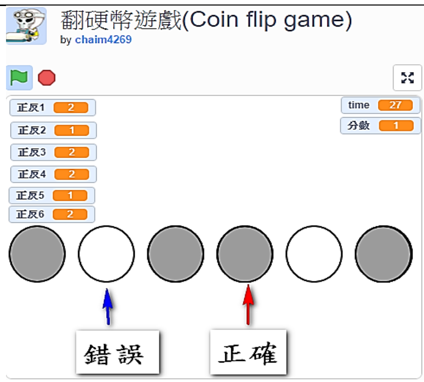


3. 自動跳出 n=5 的硬幣，

反面數與位置隨機出現，此次出現 4 個反面數。

倒數計時，在時間內完成可得分。

4. 會跳出新的頁面，可以再玩第 2 輪，再填入想玩的硬幣數，例如，輸入 6。



5. 如果按錯硬幣，頁面不會動，直到按到正面的位置才會跳出下一頁面。例如，反面硬幣數=1，要按第 1 個位置的硬幣才是正確的。

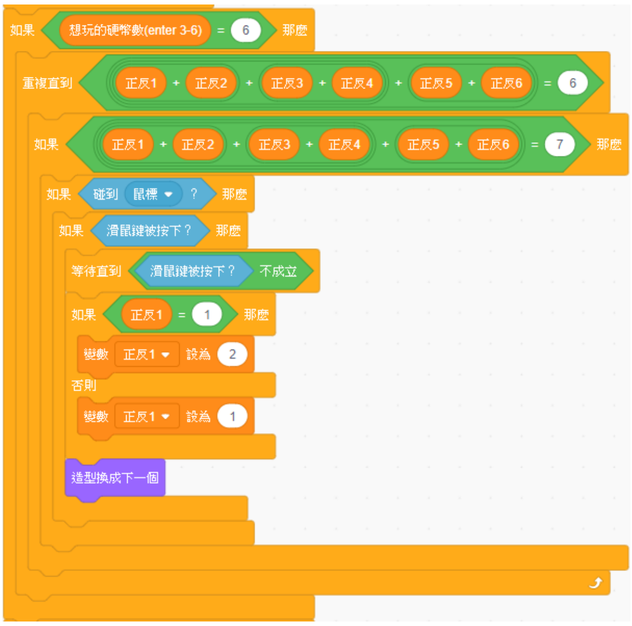
6. 必須在時間內完成，才算成功得分。

(三)程式設計細項說明

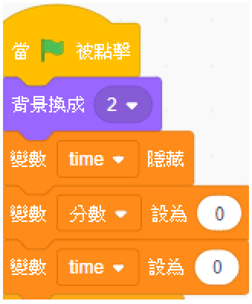
1. 隱藏程式：在開始和收到隱藏訊息時隱藏。

2. 正反面變數設定：一設為正面，二設為反面。

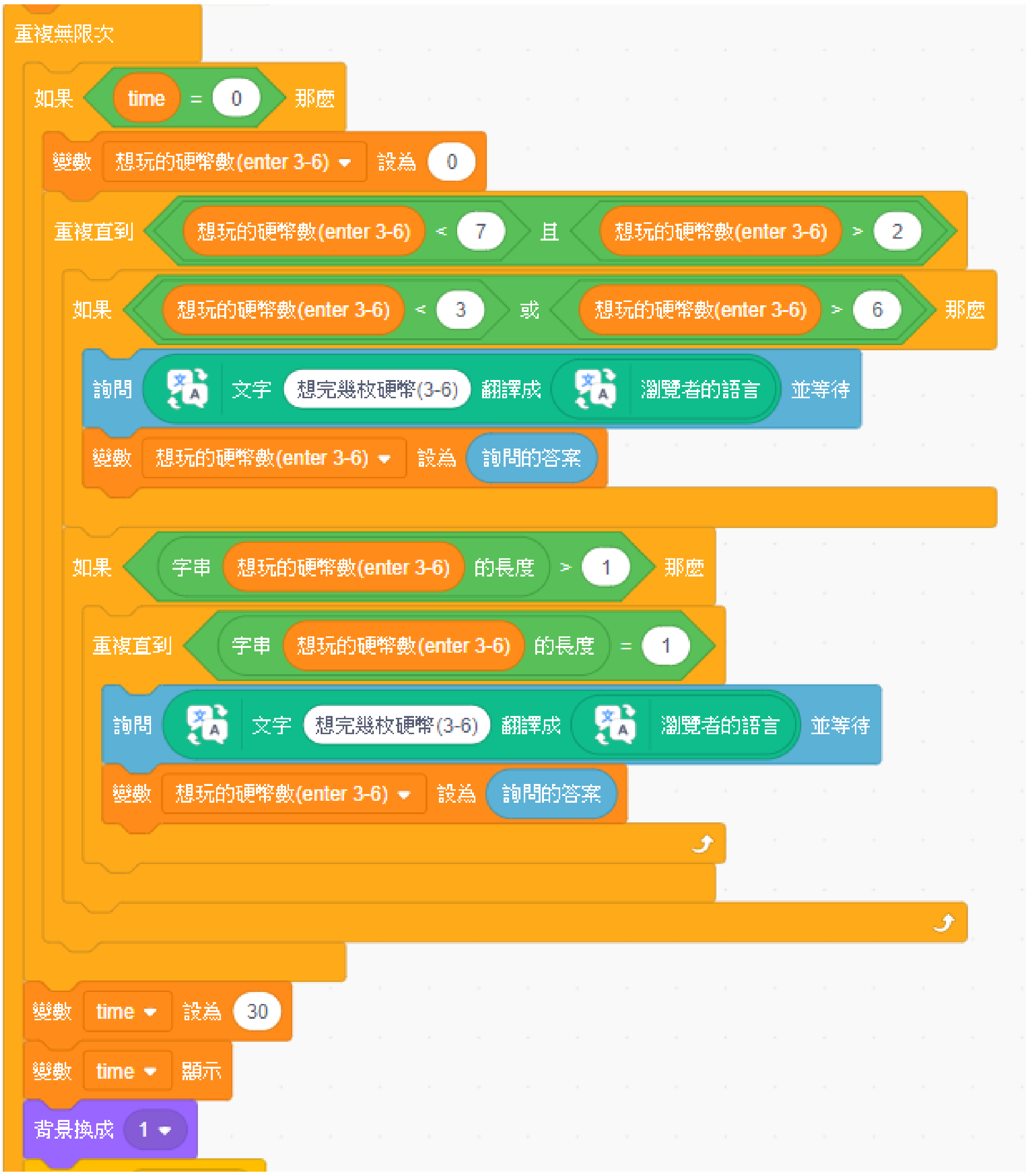
3. 成功條件：全部都是正面，所有變數都是 1



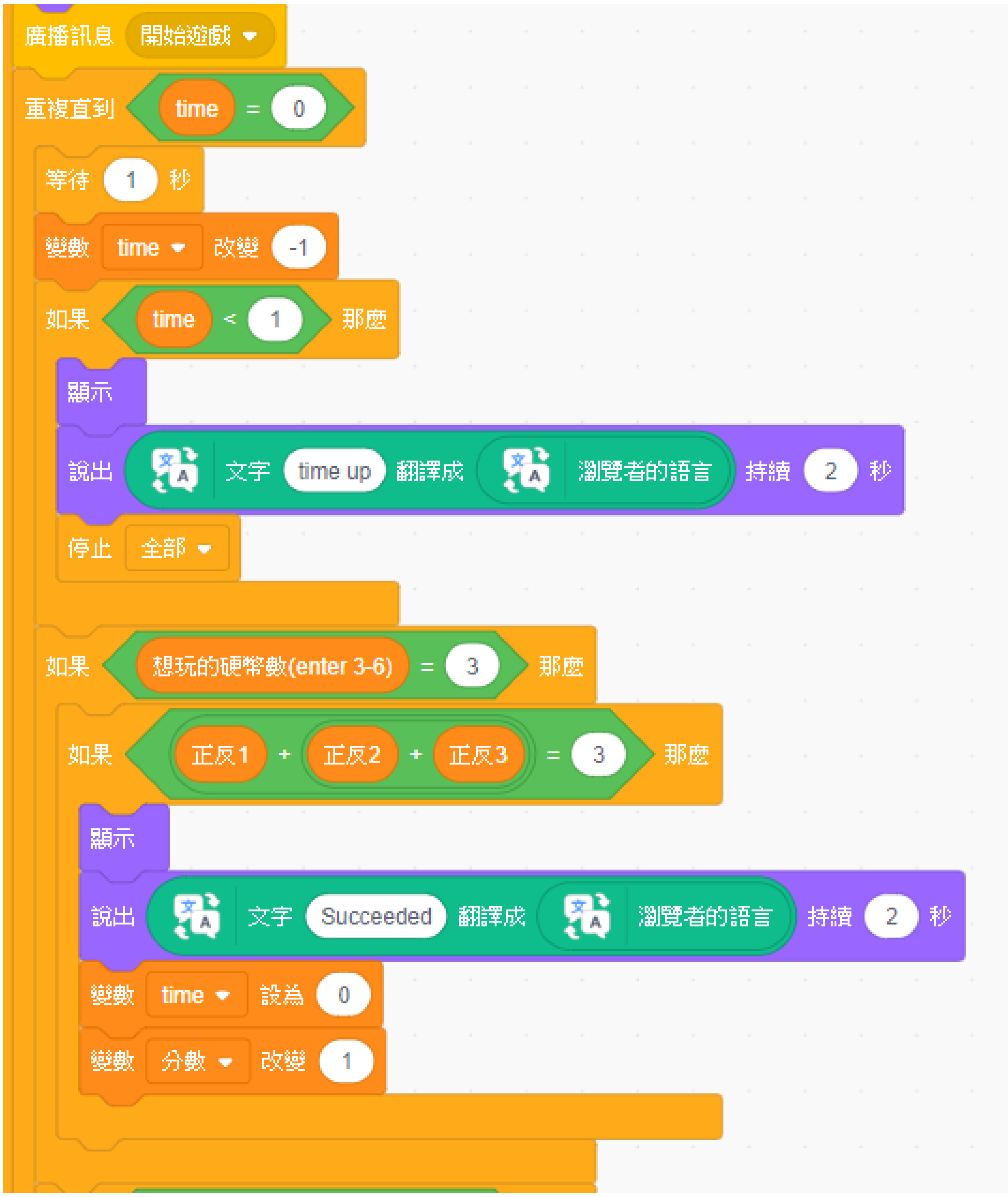
4. 計時程式



5. 詢問硬幣數及排除錯誤答案



6. 計時結束和成功的顯示程式



陸、結論

一、研究一、原遊戲規則(看反面數量→翻到全正面)探討步數的規則公式

(一)遊戲規則一：根據反面硬幣的數量 k，就第 k 個硬幣做翻面動作，直到全部翻成<u>**正面**</u>就結束。

(二)我們從 1、2、3 個反面的情況開始分析，找出每增加一個反面時，增加的步數，推導出，如果有 r 個反面，位置在 x_1、x_2、…、x_r，總步數公式$=2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2$，也就是只要看一開始這一列的反面硬幣在第幾個位置，以及共有幾個反面硬幣數，就可以得到總步數。

二、研究二、探討遊戲規則二的步數

(一)遊戲規則二：根據反面硬幣的數量 k，就第 k 個硬幣做翻面動作，直到全部翻成**反面**就結束。

(二)如果最後一個硬幣位置是正面時，則無解；是反面，則有解。

(三)總步數公式=〔$2(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r)-r^2$〕－ n，其中 n 是總硬幣數。

三、研究三、以 Scratch 程式設計發展成線上遊戲

我們利用 Scratch 程式製作翻硬幣遊戲，讓這個遊戲可以成為線上遊戲。

遊戲連結 https://Scratch.mit.edu/projects/372447738/

影片介紹 https://youtu.be/cXX72nazzVE

柒、參考資料

游森棚(2019)。翻硬幣與青蛙跳。科學月刊，597 期，18-19。

戴育琮(1996)。翻來覆去乾坤轉─翻硬幣遊戲的新發現。全國第 36 屆科展作品，取自：https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/36/pdf/36s/195.pdf

捌、科展心得

A 同學

今年是我最後一次參加科展，主題是翻硬幣數學之探討，在研究過程中遇到很多的問題，但是都在我和組員一起的共同努力之下迎刃而解，這次科展中因為我會程式設計，所以由我負責主導及教組員程式，這也是讓我覺得最困難的部分是在修改程式的一直出現需要修改的問題，但是我不斷的研究並和同學討論，終於把問題慢慢解決掉了。

我最後的國小科展雖然過程一樣辛苦，最終成功的把這個研究報告完成了，也有很好的成果，讓我很有成就感，謝謝老師和組員的付出！

B 同學

去年的九月，我們開始研究「IMO 的翻硬幣」這份遊戲，我們非常深入的探討，希望可以研究出公式…。

我們先探討出遊戲規則:且用最初級的「模式」來擬訂規則:有二顆磁鐵(或三、四、五、六、七顆…)，總共翻一顆(數反面總數再從左邊數過來翻面)，不能違反規則(總共翻一顆)，最後要全正面。我們利用這個規則，把初級的模式改成全反面，再深入研究探討。

擬定出規則後，我們深入研究，等有了方向之後，我們把所有會發生的盤面拉出來，再利用棋子走向分析，我們開始找公式，先把它們中間有規律性的「差」拉出來，再找出它的

規律性，之後，利用等差公式，將公式一步步的推導出來，雖然再翻到全反面時曾經一度迷失方向…。

我已經練到有辦法將數學想法寫下來、表達出來，數學的想法要寫成文章真的不是很容易，雖然我常常打字打了一堆，最後，還要不斷地精簡再精簡，甚至整段刪掉不用了(研究二原本是摸擬研究一的寫法，後來整個改掉)，這個過程有點心疼，但是我和組員們一起努力，經過多次的研究和討論，終於抽絲剝繭，找到了個個研究的步數公式。

C 同學

在做數學科展的過程中，我學到如何製作報告、了解如何計算數學公式，還有如何操作 Scratch 程式，在這麼多的新知識中，我最有興趣的是在各式各樣的棋面中，找出規律。一開始，我對數學公式十分面生，一開始算起來的答案，和真實的答案離的十分遙遠。後來經過討論後，我終於了解了，公差(d)、反面數(r)和棋數(n)等，數學代碼。分配工作時，因為學長比較熟悉 Scratch 程式，所以他負責製作 Scratch，而我和其他同學負責製作其他的步數和海報的製作。

參加科展後，我覺得我對數學公式越來越熟悉，希望在比賽時能得一個好成績!

D 同學

今年上四年級，我最期待的事情就是參加科展。剛開始分組時，我選了數學組，裡面的學長都很善良，都會教我我看不懂的題目或公式，我是因為這些學長，才能上這一組，不然現在我可能還在想公式呢！不只是學長們，連老師都很有耐心，會耐心陪我們推導公式，也會解釋我看不懂的東西，在剛開始的時候，我完全是靠著學長和老師呢！

一段時間後，老師叫我們開始打報告，這時候，「學長超人們」又出現了！我想不出來要怎麼打的時候，學長教我要打什麼地方，利用什麼方式打，他們甚至還幫我打了一些呢！

漸漸的，我開始了解自己的作品，報告也可以自己打了！這全都是學長的功勞，沒有他們，我就不能走到這一步。如果今天，這件做品能得獎，全都是託他們的福！

E 同學

在去年九月底，我參加第一次數學科展，讓我既興奮又緊張，但在其他組員的幫忙下，我終於慢慢進入狀況，這次我們的主題是「翻硬幣」遊戲，在好奇心的驅使下，我和隊員們決定一探究竟，雖然過程辛苦，但仍無法推倒我們的意志，在隊員們共同努力下，我們將問題迎刃而解。

在過程中，我們不僅學到了團隊合作的重要，還學到了解決問題的方法。

感謝其他隊員不厭其煩的教導，讓我更上一層，感謝隊員們共同努力，完成這份報告，讓我們日後能光榮站在場上。

謝謝你們!繼續加油喔!