嘉義市第38屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：在五邊形breaking—搶20的必勝策略

關 鍵 詞:最佳策略、對角線、多邊形

編　　號：

摘要

本文探討「在平面上給定正 N 邊形，畫出正 N 邊形的所有對角線，並在各個頂點上標示出 1,2,3,4……,n，將一硬幣置於某一頂點，現甲乙欲移動硬幣(甲先乙後接續輪流)，使得硬幣移動到的點累加頂點總數為 m，探討乙(後玩)必勝的數字。」，研究結果顯示奇數和偶數各自有不同的規律，接著用樹狀圖來突顯出該問題背後的數學結構。

壹、研究動機

在某次上網瀏覽網站，我們找到了戲說數學這個平台中的一個關於數學遊戲的文章。這個遊戲是搶 20，規則如下：「在平面上一個正五邊形，畫出正五邊形的所有對角線，並在各個頂點上標示出 1,2,3,4,5，先玩的甲拿出一枚拾圓硬幣，放置在五個頂點中的一個，後玩的乙必須將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點。接著甲同樣將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點，即硬幣不可以不移動的意思。依此規則，輪流移動硬幣。將移動到的頂點編號累加，當移動完硬幣後，頂點編號累加剛好為 20 者贏，放棄或超過 20 者輸。」問是甲還是乙會贏?這個遊戲激起我們的興趣，分析研究必勝的策略。

貳、研究器材與設備

紙、筆、黑板、筆記型電腦

參、研究目的與問題

我們將原題目敘述中的五邊形改寫為任意邊形為 N，得到以下問題描述：「在平面上給定正 N 邊形，畫出正 N 邊形的所有對角線，並在各個頂點上標示出 1,2,3,4……,n，現甲乙欲移動硬幣甲先乙後，使得硬幣移動到的點累加總數為 m。當給定任意 n 邊形，乙必定會贏的數字 m 是否有何規律?」

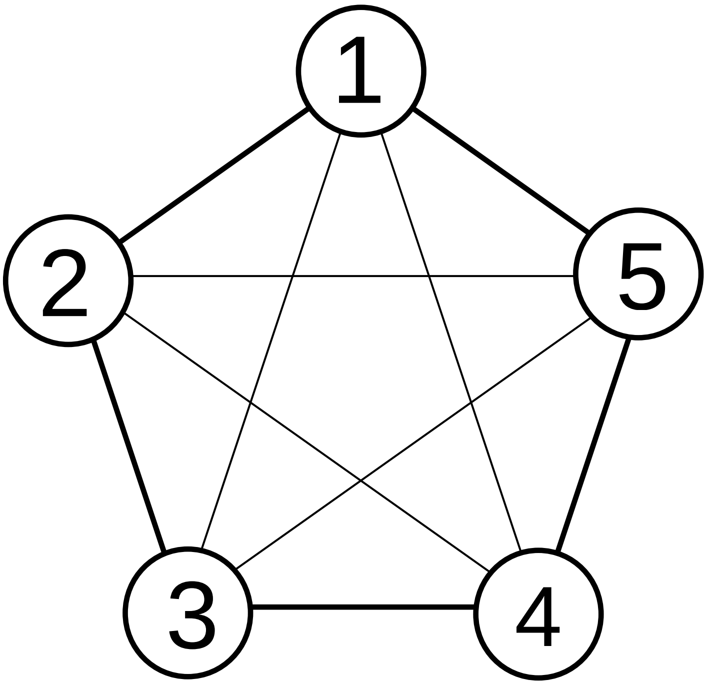
肆、研究過程或方法

名詞定義：m 為硬幣相加剛好等於的數

而因為我們要算乙必勝的數字，因此乙不一定必勝稱為甲勝

1、 規則：

在一個N邊形的N個頂點上分別標示1,2,⋯,n。甲,乙兩人,甲先在N個點中選一個點放一個硬幣,後放的乙必須將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點。接著甲也一樣將硬幣依著邊線或對角線，移動至其它編號的頂點(一定要出)頂點編號累加剛好為 m 者就贏了(超過m也算輸)。



二、找出五邊形後玩的人會贏的數字

(一)　乙一定會贏的數字為n＝7,13,20,26⋯⋯(5+2 的倍數或 5+2 的倍數+6)

n=6時，甲只需把硬幣放在3的位置，不管乙放到1,2，甲只要再把硬幣放回2,1就可。所以n=6也是先玩的甲會贏的數字。

n=7 時，甲不管把硬幣放在 2,3,4,5，乙只要分別將其放在 5,4,3,2 的位置即可，而當甲將硬幣放在 1 的位置，剩下的數字為 6，前面說過 6 是先玩的人會贏的數字，且先玩的人須先將硬幣移到 3 的位置。所以當乙將硬幣移到 3 的位置時也就確立了乙在 n=7 時是必勝的。

n=8, 9, 10, 11, 12 時，甲分別將硬幣放在 1, 2, 3, 4, 5 的位置，剩餘的數皆為 7。因此時甲變為後玩，所以他只需依照前面的做法就能贏得勝利。而當 n=13 時，若甲將硬幣放在 1, 2, 4, 5 的位置，乙可以把硬幣移到 5, 4, 2, 1，讓剩餘數字為 7，乙獲勝。如果甲一開始放硬幣在 3 的位置，剩餘數字為 10，乙無法將硬幣移到 3 這個位置，使剩餘數字為讓他絕對勝利的 7，但他可以把硬幣移到 5，令剩餘數字也是 5 並順勢擋住甲，最後也是乙勝，所以 13 是第二個乙必定獲勝的數字。

n=14, 15, 16, 17, 18 都是甲會必勝的數字。當 n=19 時，甲無法在第一次放置之後，讓剩餘數字為 13，但這並不代表甲會輸，甲可以將硬幣放置在編號 3 位置，剩餘數字為 16，此時乙被卡住，也無法移動，讓剩餘數字變成 13。

這時當乙移動到編號 1, 2 的位置時，甲只需移動到編號 2, 1 的位置，即可讓剩餘的數字為 13，甲勝；當乙移動到編號 4, 5 號 5, 4 的位置，即可讓剩餘的數字為 7，甲勝，故 n=19 時，甲會獲勝。

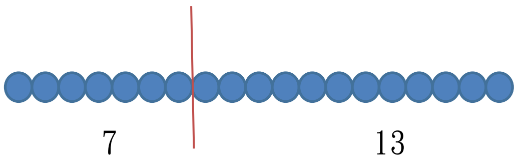
當 n=20 時，甲如果移動到 1，乙只要移動到 3 的位置，讓剩餘數字為 16，同時卡住甲，讓他無法移動硬幣到編號 3 的位置，讓剩餘數字為 13。如果甲移動到 2, 3, 4, 5 的位置時，乙隨之移動到 5, 4, 3, 2 的位置，就可以讓剩餘數字為 13。

n=21, 22, 23, 24, 25 都是甲會必勝的數字。當 n=26 時，甲如果移動到 1, 2, 4, 5，乙只要移動 5, 4, 2, 1 的位置，當甲移動到 3 的位置，乙雖然不能移動到 3 使剩餘 20，但是它移動到 5 的位置，甲就無法移動到 13，甲只能移動到:1, 2, 3, 4 的位置，乙就隨之移動到:4, 3, 2, 1，乙就能移動到 13 的位置，故 26 是乙必勝的數字。

當 n＝7, 13, 20, 26 是乙必勝的數字，此時有一個隱形的規律已然浮出檯面，就是

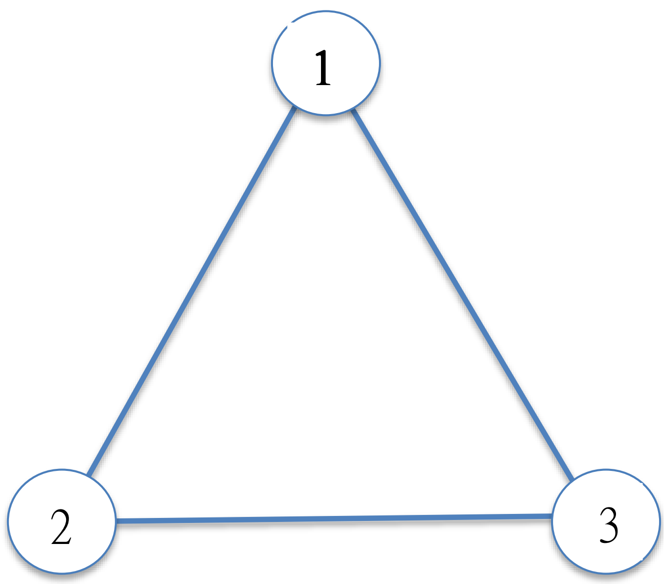
當 N＝7 ， 13 ， 20 ， 26 ……時，乙會必勝 。

7	13	20	26
13k＋7	13k	13k＋7	13k
(k＝0)	(k＝1)	(k＝1)	(k＝2)



當 n=5 時，公式為：第奇數位為 7+13k；第偶數位為 13k(k 皆為正整數)

二、找出三邊形後玩的人會贏的數字



(一)乙一定會贏的數字為 n＝4, 8, 12, 16……(3+1 的倍數)

n=4 甲放 2 卡乙的 2，剩下 2，甲只能放 1，乙不管放多少都會超過，甲獲勝。

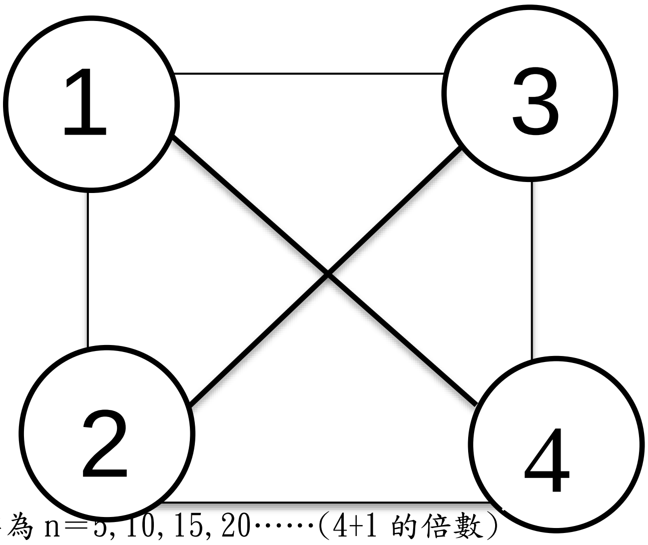
n=5，甲只能放 1，剩餘的數字為 4，4 是先的會贏的數字，因此當 n=5 乙必勝。

n=6～8，甲只要分別放 1,2,3 讓剩餘的數字為 5，5 是後玩會贏的數字，甲勝。

n=9 時，甲不管放多少都會使剩餘的數為 6,7,8，三個都是先的會贏的數字，因此乙必勝，以此類推。

當 n=3 時，公式為：k(3+1)(k 為正整數)

三、找出四邊形後玩的人會贏的數字



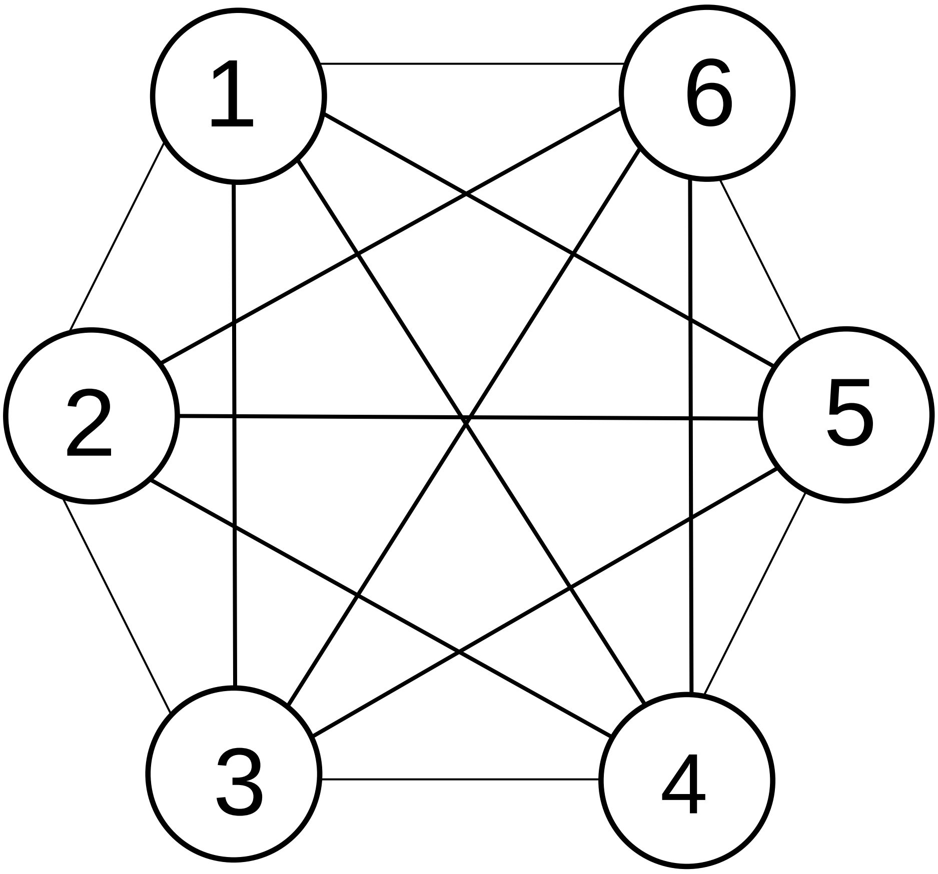
(一)乙一定會贏的數字為 n＝5,10,15,20……(4+1 的倍數)

n=5 時，甲放 1,2,3,4，則乙放 4,3,2,1 即可，所以 n=5 是乙會贏的數字。

n=6～10 時，甲放 1,2,3,4 可使剩餘的數字為 5，5 是後玩會贏的數字，因此 n=6~10 是甲贏的數字。

n=11，甲不管放多少，都會使剩餘的數字為 6~10，6~10 是先玩的會贏數字，n=11 時是乙必勝，以此類推。

當 n=4 時，公式為：k(4+1)(k 為正整數)



四、找出六邊形後玩的人會贏的數字

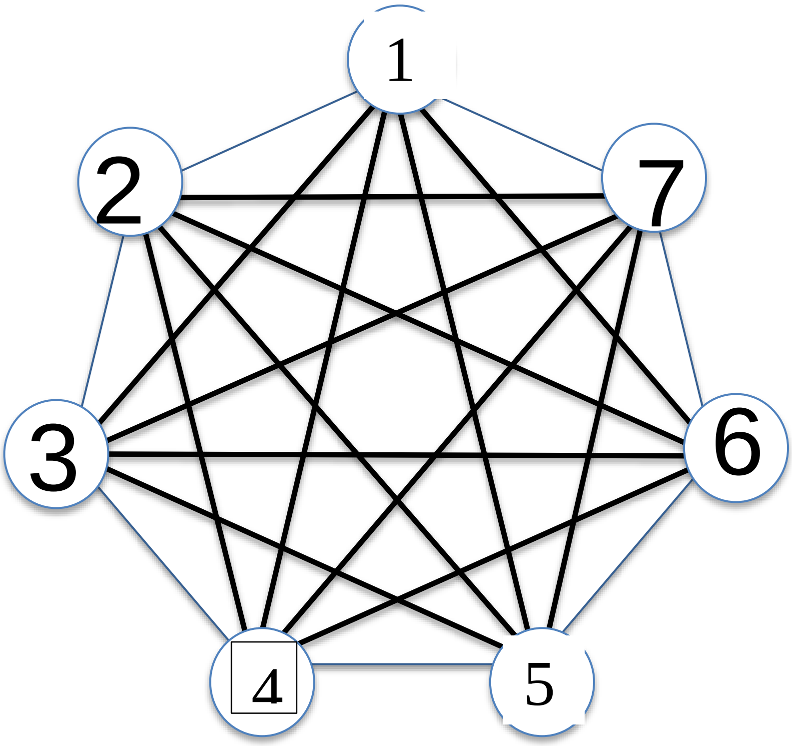
(一)乙必勝的數字為 N＝7,14,21,28……(6+1 的倍數)

n=7 甲如果放 1 的位置，那乙就可以移動到 3 的位置，卡住甲放 3，甲只能放 1,2，則乙放 2,1 即可，因此 n=7 是後玩的乙必贏的數。

n=8~13 甲分別放 1~6，就可將剩餘的數字剩於 7，7 是後贏的數字，所以當 n=8~13 時，甲勝。

n=14 甲放任何數字，都可使剩餘的數字為 8~13，8~13 皆是先的會贏的數字，因此 n=14 時是乙必勝的數字，以此類推。

當 n=6 時，公式為：k(6+1)(k 為正整數)



五、找出七邊形後玩的人會贏的數字

(一)乙一定會贏的數字為 n＝9, 17, 26……(17 的倍數或 17 的倍數+9)

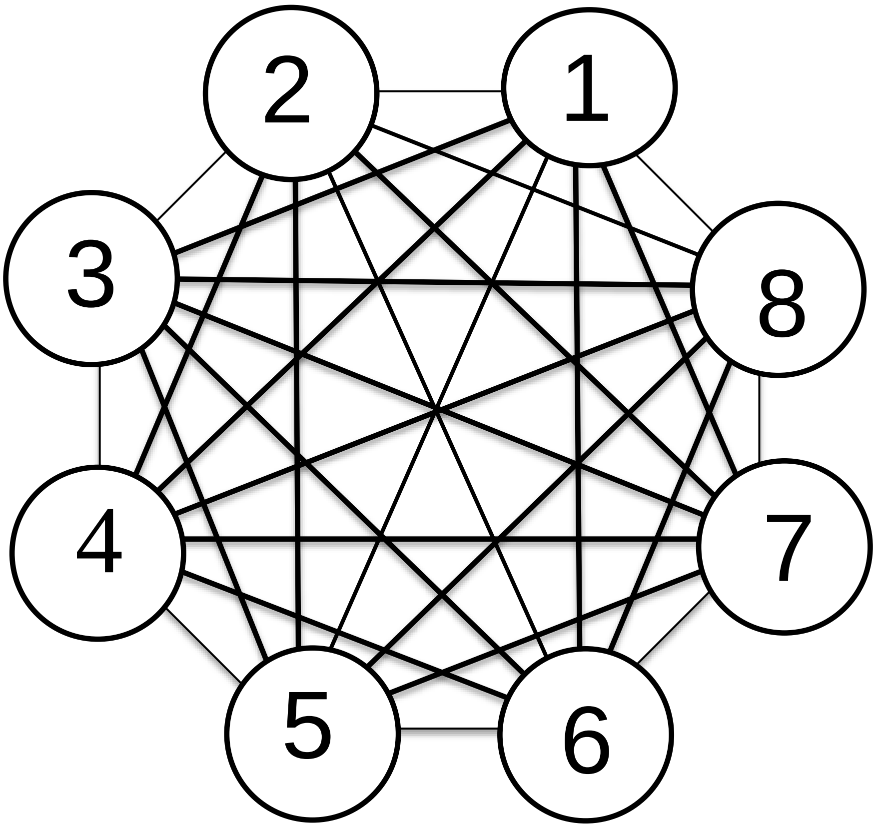
n=8 時甲放 4 卡住乙的 4，乙再放 2 卡住甲，剩餘的數字為 2，甲不能放 2，因此他放 1，而乙不管放多少都超過，所以 n=8 也是先玩的甲會贏的數字。

n=9 時甲不管放 2~7，乙只要再放 7~2 就可，而當甲放 1 時，剩餘的數字為 8，8 是先玩會贏的數字，而此時先玩的是乙，所以 n=9 是後玩的乙必勝的數字。

n=10～16 時，甲只要依序放 1~7，讓剩餘的數字是 9，9 是後玩會贏的數字，且這時的甲是後玩的，因此當 n=10~16 時，甲必勝。

n=17 時當甲放 1, 2, 3, 5, 6, 7，讓剩餘的數字為 16, 15, 14, 12, 11, 10 皆是先玩會贏的數字，而當甲放 4 時，會卡住乙放 4，所以乙要放 2 卡住甲放到 2，甲只能放 1，剩餘的數字為 10，而乙只可以放 5 來擋住甲，甲放 1, 2, 3, 4，而乙放到 4, 3, 2, 1 就贏了，所以當 n=17 時，乙必勝，以此類推。

n=7 的公式為：第奇數位為 9+17k；第偶數位為 17k(k 皆為正整數)



六、找出八邊形後玩的人會贏的數字

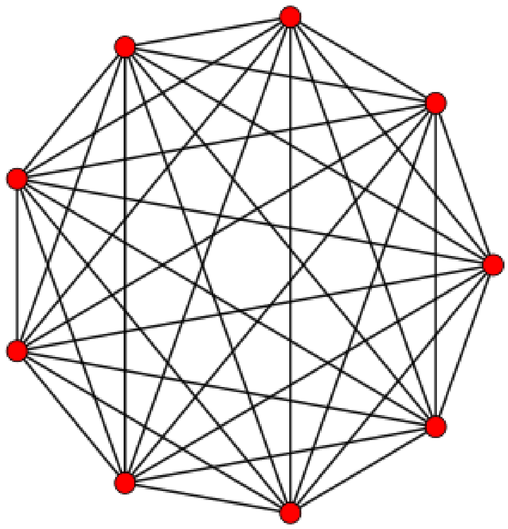
(一)乙一定會贏的數字為 n=9, 18, 27……(8+1 的倍數)

n=9 時，甲不管放 1~8，乙只要放回 8~1 即可，因此當 n=9 時，後玩的乙必勝。

n=10~17 時，甲分別將數字放到 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1，可使剩餘的數字為 9，而前面說 9 是後玩會贏的數字，此時甲便是後玩，因此甲必勝。

n=18 時，甲不管放多少，都會使剩餘的數字為 10~17，而 10~17 是先玩會贏的數字，現在先玩的是乙，所以當 n=18 時，乙必勝，以此類推。

當 n=8 時，公式為：k(8+1)(k 為正整數)



七、找出九邊形後玩的人會贏的數字

(一)乙一定會贏的數字為 n=11, 22, 33……(22 的倍數或 22 的倍數+11)

n=10 時，甲放 5 卡剩下的數字，當乙放 1, 2, 3, 4 時，甲只要放回 4, 3, 2, 1 即可，因此. n=10 的時候為甲贏。

n=11 當甲放 2~9 時，乙分別放回 9~2 就贏了，而如果甲放 1，剩餘的數字為 10，前面說 10 是先玩會贏的數字，因此 n=11 可讓後玩的乙獲勝。

n=12~20 當甲分別放 1~9 時可使剩餘的數字為 11，前面說 11 是先玩會贏的數字，因此當 n=12~20 時先玩的甲會贏。

n=21，甲放 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 會使剩餘的數字分別為 20, 19, 18, 17, 15, 14, 13, 12 而前面說這些數先玩的會贏，但如果甲放 5，剩餘的數字為 16，雖然前面說 16 是先玩的會贏，但必須是在第一步放 5 條件才成立，可是現在 5 被卡住了，乙如果放 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9，會使剩餘的數字分別為 15, 14, 13, 12, 10, 9, 8, 7，而這些數都是先玩會贏的數字，甲勝。

n=22 甲放 1~9 會讓剩餘的數字為 13~21，因這些數字皆是先玩的會贏，所以當時是先玩的乙獲勝。

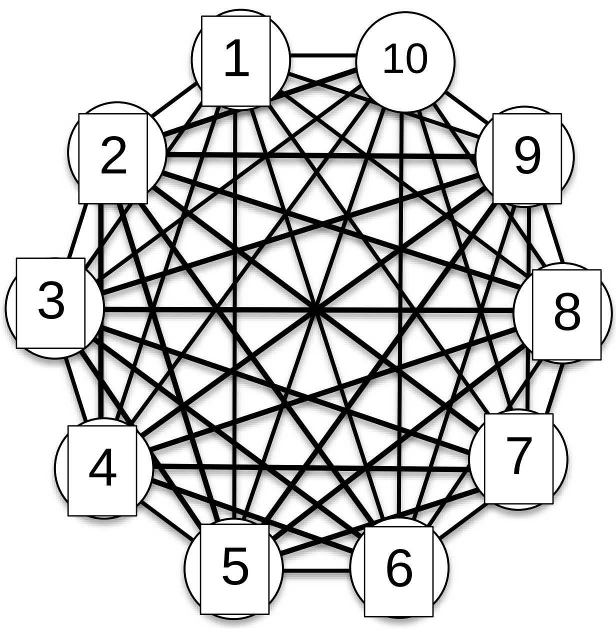
n=23~31 當甲分別放 1~9 可使剩餘的數字為 22，而前面說 22 是後玩的會贏的數字，因

此在當時是後玩的甲勝。

n=32 時，甲分別放 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 可讓剩下的數為 31, 30, 29, 28, 26, 25, 24, 23 而這些數都是先玩會贏的數，乙會贏，而甲如果放 5 可以讓乙搶不到 22，但如果乙放 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9，甲就移動到 4, 3, 2, 1, 5, 9, 7，就可以搶到必勝點，如果乙移動到 8，甲就移動到 4，乙移動到 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，甲都可以移動到 11 或 0，如果乙移動到 2，甲只要移動到 1，乙就會被卡死，無法移動到 11 的位置，故 n=32 時甲會獲勝。

n=33 時，甲移動到 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，乙只要移動 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 都可以移動到 22，甲如果移動到 1，乙只要移動到 5 就可以將甲卡住，使的甲無法移動到 22，故 n=33 時乙會獲勝。

當 n=9 的公式為：第奇數位為 11+22k；第偶數位為 22k(k 皆為正整數)



八、找出十邊形後玩的人會贏的數字

(一) 乙一定會贏的數字為 n=11, 22, 32……(11 的倍數)

當 n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 時，甲可以在一 開始就搶完，當 n=11 時，甲不管移動到哪裡乙都可以移動到對應的位置獲勝。

當 n=12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 時，甲都可以在第二輪搶到而獲勝，當 n=22 時，甲不管移動到哪裡乙都可以移動到對應的數字，依此類推。

當 n=10 時，乙必勝數字的公式為：k(10+1)(k 為正整數)

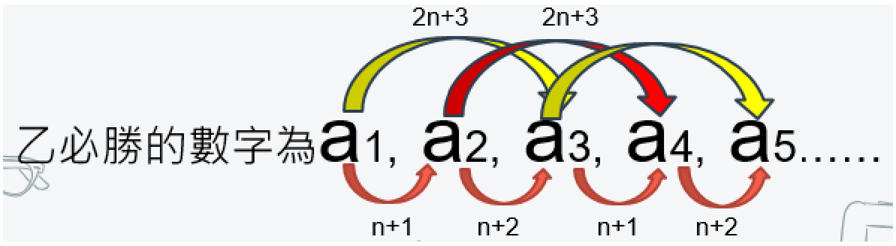
九、找出的 n 邊形乙必勝數字和其規律

n 邊形	乙必勝數字	規律
3 邊形	4, 8, 12, 16...	(n+1)k
4 邊形	5, 10, 15, 20...	(n+1)k
5 邊形	7, 13, 20, 26...	第奇數個為 n+2+13k 第偶數個為 13k
6 邊形	7, 14, 21, 28...	(n+1)k
7 邊形	9, 17, 26, 34...	第奇數個為 n+2+17k 第偶數個為 17k
8 邊形	9, 18, 27, 36...	(n+1)k
9 邊形	11, 22, 33, 44...	第奇數個為 n+2+22k 第偶數個為 22k
10 邊形	11, 22, 33, 44...	(n+1)k

伍、研究結果與討論

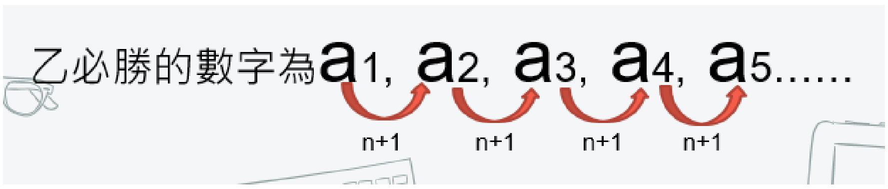
從找出五邊形後玩的人必勝的數字，推展到 n 邊形後玩的人必贏的數字。我們發現乙(後玩的人)必贏的數字在 n 邊形有三種狀況。

1.(n+1)/2 為奇數時，第一個乙會贏的數字是 n+2 且與下一個數的間隔為 n+1，但第二個乙必勝的數字與第三個數間隔是 n+1，到了與第四個間隔又回到 n+2 也就是說當(n+1)/2 為奇數時，每三個數的間隔為 2n+3。如圖一。



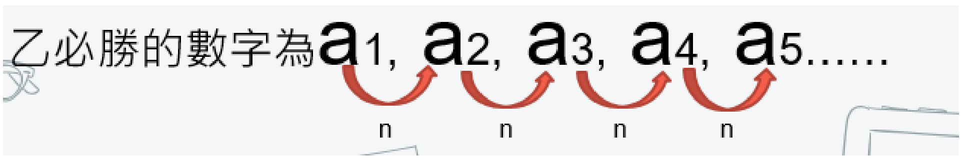
圖一

2.n+1 為 2 的奇數次方時，第一個乙會贏的數是 n+2 且與下個數的間隔為 n+1。如圖二。



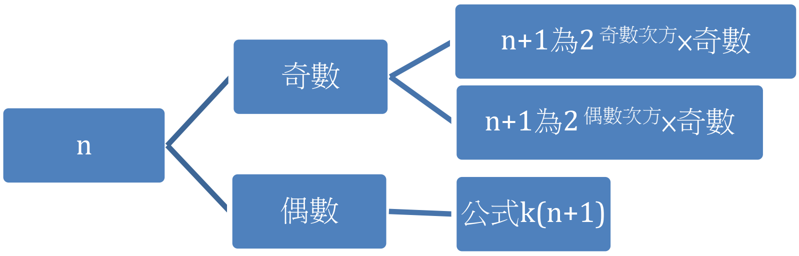
圖二

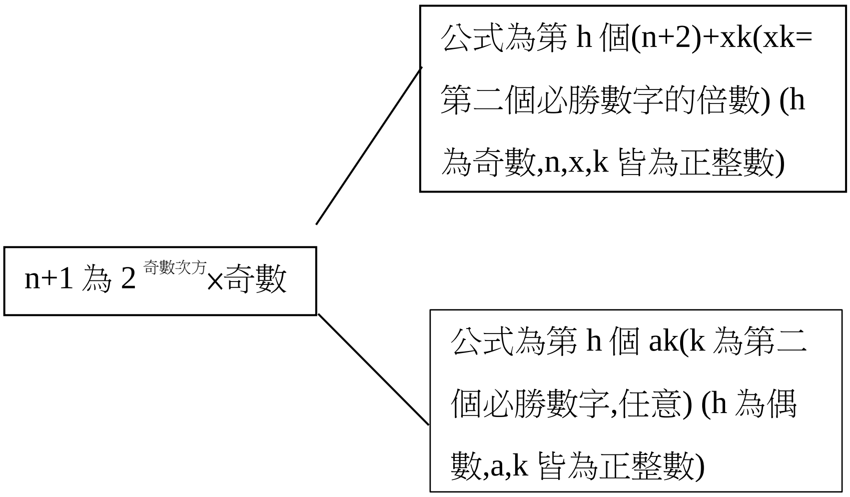
3.n 為上述兩條件以外的數時，乙必勝的數字是 n+1 的倍數。如圖三。

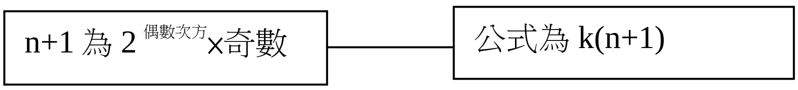


圖三

乙的必勝數字的規律分為以下三種:







陸、未來展望

目前我們找到任意 n 邊形，乙必勝數字的規則。但這只是在一開始所設定的規則下玩這個遊戲，未來我們會往更改遊戲規則，像是增加遊戲人數、改動 n 邊形上的數字，而非僅是從 1 數到 n。

柒、參考資料

1. 許志農(2014)戲說數學

http://pisa.math.ntnu.edu.tw/attachments/article/1090/41%20saymathsgame.pdf

2.第 47 屆中小學科學展覽會國小組數學科「撿石頭」

https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/47/elementary/080407.pdf

3. 嘉義市第 32 屆中小學科學展覽會國小組「先下手為強—「搶數」遊戲探討」

http://case.cy.edu.tw/mediafile/4220012/knowledge/391/2824/3357/2014-12-13-11-3-29-nf1.pdf

4. 第 39 屆中小學科學展覽會國小組數學科「誰是最後贏家」

http:///C:/Users/User/AppData/Local/Packages/Microsoft.MicrosoftEdge_8wekyb3d8bbwe/TempState/Downloads/pta_9959_6041379_75344%20(1).pdf