

嘉義市第 38 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：「因」為你「質」得-搶因數遊戲策略探討

關鍵詞：因數、倍數、質數

編號：

「因」為你「質」得-搶因數遊戲策略探討

摘要

搶因數遊戲完全是由「挑戰者」拿取的數字與順序來決定，這個遊戲的範圍在 40 之前我們發現：

1. 「挑戰者」要獲勝的取數策略：先拿最大的質數、找出數字範圍 $1/2$ 處以上的合數並列出它們除了 1 和自己外的所有因數、將合數的因數只剩下一個因數的先挑、挑選剩下兩個因數的合數，越大的數越優先挑。
2. 因為質數出現不規律的緣故，所以在遊戲範圍到 40 之前，我們無法找到一個固定的方法來表示最佳的取數策略，但仍找到方法來達到最佳取數策略。
3. 同步驟三，該合數剩下的因數越少越先拿。
4. 「挑戰者」和「關主」的分數有沒有固定的規律可尋，但因關主的分數較容易計算，所以雙方的最大分差可以從關主的分數反推。

壹、 研究動機：

五年級上學期數學課，當老師上到因倍數這個單元時，給我們玩了一個「搶因數」的遊戲，這個遊戲的規則如下：

1. 兩人對決，一人當「挑戰者」，一人當「關主」。
 2. 決定要玩的數字範圍，例如如要玩到 12，那就是玩 1 到 12 的所有數字。
 3. 「挑戰者」先拿數字，從 1 到 12 中任取一數後，「挑戰者」就算拿到這個數的分數，而這個數的所有因數就全部給「關主」。
- 例子：假設「挑戰者」拿走 6，那麼「挑戰者」拿到 6 分，6 的因數有 1, 2, 3 就是「關主」的，「關主」拿到 $1+2+3=6$ 分。
5. 被拿走的數不能再被拿走。
 6. 已經沒有因數的數字最後歸「關主」所有，也就是剩下來找不到因數的數，分數都是「關主」的。

這是個讓我們熟悉因數與倍數的遊戲，在老師不斷將遊戲的數字範圍變大時，也會發現拿取數的策略和比賽結果將會有所變化，因此我們興起研究這個遊戲的興趣，想要探究遊戲策略，以及如果以最好的策略拿取數字時，關主以及挑戰者的分數差距變化。

貳、 研究目的：

因為這個遊戲最重要的是「挑戰者」要如何拿取數字，「關主」一直都是被動的接收「挑戰者」取數的因數，因此我們想要探討遊戲範圍在數字 1 到 40 之間的：

- 一、 「挑戰者」要獲勝的取數策略。
- 二、 最佳的取數策略（「挑戰者」和「關主」的分數差距最大）。
- 三、 在最佳的取數策略下，「挑戰者」和「關主」的分數有沒有規律可尋。

參、 研究設備及器材：

- 一、數字撲克牌。
- 二、計算機。
- 三、電腦（excel 軟體分析與記錄）

肆、 研究過程或方法：

一、遊戲的玩法與變化

以遊戲範圍 1 到 10 為例，遊戲的其中一種玩法如下表：

表 1 搶因數數字 1 到 10 的玩法 01

挑戰者		關主
1、2、3、4、5、6、7、8、9、10		
第一次	2	1 （因為 2 的因數是 1）
第二次	6	3 （因為 1 和 2 第一次時已經被拿走）
第三次	10	5 （因為 1 和 2 第一次時已經被拿走）
第四次	都不能拿，因為 4、7、8、9 已經沒有因數	剩下：4、7、8、9 已經沒有因數，全部屬於關主的
總分	2+6+10=18	1+3+5+4+7+8+9=37

由表 1 我們可以知道上面的遊戲結果是由「關主」獲勝（37 比 18），而「挑戰者」取數的順序，將會決定比賽的結果，例如下表 2 的玩法：

表 2 搶因數數字 1 到 10 的玩法 02

挑戰者		關主
1、2、3、4、5、6、7、8、9、10		
第一次	7	1 （因為 7 的因數是 1）
第二次	8	2、4 （因為 8 的因數有 2 和 4）
第三次	10	5 （因為 10 的因數有 5）
第四次	9	3 （因為 9 的因數有 3）
第四次	剩下 6，但不能拿，因為 6 的因數前面都已經被拿走	剩下：6 已經沒有因數，屬於關主的
總分	7+8+9+10=34	1+2+3+4+5+6=21

由表 2 我們可以知道上面的遊戲結果將由「挑戰者」獲勝（34 比 21）。這是一個「挑戰者」可完全控制的遊戲，因此「挑戰者」該如何取數才能獲勝，甚至得到最多的分數，將是我們所要探討的。

二、遊戲分析與討論：

由上面的討論與遊戲我們可以知道，這個遊戲的結果完全是由「挑戰者」拿取的數字與順序來決定，並且會有下述狀況：

- (一) 「挑戰者」第一次拿取的是質數：當「挑戰者」第一次拿取的是質數時，「關主」只能拿數字 1，因此如果「挑戰者」拿的是最大的質數，這時「挑戰者」和「關主」的分數差將最大。
- (二) 「挑戰者」第一次拿取的是合數：當「挑戰者」第一次拿取的是合數時，「關主」將拿數字 1 和該合數的所有因數。
- (三) 綜合第一和第二點我們可以發現：數字 1 不管怎麼樣都會在第一次「挑戰者」拿完數字後被「關主」拿走，因為遊戲規則是：「已經沒有因數的數字最後歸關主所有」，而 1 又是所有數字的因數。這代表
 1. 如果「挑戰者」第一次拿取的是質數，「關主」至少可拿走遊戲數字範圍內「所有的質數減掉「挑戰者」第一次拿取的質數+1」的分數，而「挑戰者」為了得到勝利，勢必第一次拿取的質數一定是遊戲範圍內最大的質數。
 2. 如果「挑戰者」第一次拿取的是合數，「關主」則必定會拿取所有的質數再加上 1。
- (四) 我們由上述分析可以發現，「挑戰者」如果沒有拿到最大的質數，也就是一開始拿合數，那麼最大的質數將被「關主」拿走，一來一往分數相差很大，因此為了獲勝，第一次就該去拿最大的質數。
- (五) 以此前提，我們初步分析，在理想情況下，「關主」拿到的分數是「所有質數和減掉最大的質數+1」，「挑戰者」拿到的分數是「遊戲範圍內的數字總和減掉關主的分數」。以下分析 1 至 20 的數字內，理想的遊戲結果。
 1. 數字範圍 1-10 的理想遊戲狀況：

表 3 數字 1-10 的理想遊戲狀況分析

遊戲數字範圍	數字總和	範圍內的質數	最大的質數	關主分數	挑戰者分數	勝負分 (挑戰者—關主)
1	1			1	0	-1
1、2	3	2	2	1	2	1
1、2、3	6	2、3	3	1+2=3	3	0
1、2、3、4	10	2、3	3	1+2=3	7	4
1至5	15	2、3、5	5	1+2+3=6	9	3
1至6	21	2、3、5	5	1+2+3=6	15	9
1至7	28	2、3、5、7	7	1+2+3+5=11	17	6
1至8	36	2、3、5、7	7	1+2+3+5=11	25	14
1至9	45	2、3、5、7	7	1+2+3+5=11	34	20
1至10	55	2、3、5、7	7	1+2+3+5=11	44	33

2. 數字範圍 11-20 的理想遊戲狀況：

表 4 數字 11-20 的理想遊戲狀況分析

遊戲數字範圍	數字總和	範圍內的質數	最大的質數	關主分數	挑戰者分數	勝負分 (挑戰者—關主)
1 至 11	66	2、3、5、7、11	11	$1+2+3+5+7=18$	48	30
1 至 12	78	2、3、5、7、11	11	$1+2+3+5+7=18$	60	42
1 至 13	91	2、3、5、7、11、13	13	$1+2+3+5+7+11=29$	62	33
1 至 14	105	2、3、5、7、11、13	13	$1+2+3+5+7+11=29$	76	47
1 至 15	120	2、3、5、7、11、13	13	$1+2+3+5+7+11=29$	91	62
1 至 16	136	2、3、5、7、11、13	13	$1+2+3+5+7+11=29$	107	78
1 至 17	153	2、3、5、7、11、13、17	17	$1+2+3+5+7+11+13=42$	111	69
1 至 18	171	2、3、5、7、11、13、17	17	$1+2+3+5+7+11+13=42$	129	87
1 至 19	190	2、3、5、7、11、13、17、19	19	$1+2+3+5+7+11+13+17=59$	131	72
1 至 20	210	2、3、5、7、11、13、17、19	19	$1+2+3+5+7+11+13+17=59$	151	92
1 至 21	231	2、3、5、7、11、13、17、19	19	$1+2+3+5+7+11+13+17=59$	172	113
1 至 22	253	2、3、5、7、11、13、17、19	19	$1+2+3+5+7+11+13+17=59$	194	135
1 至 23	276	2、3、5、7、11、13、17、 19、23	23	$1+2+3+5+7+11+13+17+23$ $=82$	194	112
1 至 24	300	2、3、5、7、11、13、17、 19、23	23	$1+2+3+5+7+11+13+17+23$ $=82$	218	136
1 至 25	325	2、3、5、7、11、13、17、 19、23	23	$1+2+3+5+7+11+13+17+23$ $=82$	243	161

三、檢驗數字 1 至 10 遊戲的最佳策略：

(一) 數字範圍 1-7 遊戲的最佳策略與討論：

表 5 數字 1-7 的最佳策略

遊戲數字範圍	挑戰者	關主	勝負分 (挑戰者—關主)
1	0	1	-1
1、2	2	1	$2 - 1 = 1$
1、2、3	3	1	$3 - (1+2) = 0$
	3	2 (已無因數)	
1、2、3、4	4	1	$(3+4) - (1+2) = 4$
	4	2	
1、2、3、4、5	5	1	$(5+4) - (1+2+3) = 3$
	4	2	
	4	3 (已無因數)	

1、2、3、4、5、6	5	1	$(5+4+6) - (1+2+3) = 9$
	4	2	
	6	3	
1、2、3、4、5、6、7	7	1	$(7+4+6) - (1+2+3+5) = 6$
	4	2	
	6	3 5 (已無因數)	

由上表以及表 3 可以知道，數字 1-7 的最佳遊戲策略與理想狀況是一致的，也就是「挑戰者」要獲勝的取數策略是：第一次拿取最大的質數，之後每次都只拿取只剩一個因數的合數，所以玩數字 1-6 和 1-7 時，「挑戰者」拿完最大的質數後（5 和 7），接下來應該拿取 4（只剩因數 2）而不是拿取 6（還有因數 2 和 3），因為如果先拿 6，那麼 4 就沒有剩下因數，就會成為「關主」的分數。

（二）數字範圍 8-11 遊戲的最佳策略與討論：

表 6 數字 8-11 的最佳策略

遊戲數字範圍	挑戰者	關主	勝負分 (挑戰者—關主)
1、2、3、4、5、6、7、 8	7	1	$(7+8+6) - (1+2+4+3+5) = 6$
	8	2、4	
		3	
	6	5 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9	7	1	$(7+9+6+8) - (1+3+2+4+5) = 15$
	9	3	
	6	2	
	8	4 5 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10	7	1	$(7+9+6+8+10) - (1+3+2+4+5) = 25$
	9	3	
	6	2	
	8	4	
	10	5	
1、2、3、4、5、6、7、8、 9、10、11	11	1	$(11+9+6+8+10) - (1+3+2+4+5+7) = 22$
	9	3	
	6	2	
	8	4	
	10	5 7 (已無因數)	

由表 6，我們發現從玩數字 8 到數字 11，這時已經無法讓「關主」只拿取最大的質數以外，剩下的所有質數和 1。「挑戰者」在玩數字 8 到數字 11 時，在最佳的玩法下，採取的策

略是每次都只**拿取只剩一個因數**的合數，都會比理想狀況多失掉「4」分。

分析數字 1-11 中的合數，它們的因數分別有：

4 的因數：~~1~~、~~2~~、**4**；6 的因數：~~1~~、~~2~~、~~3~~、~~6~~；

8 的因數：~~1~~、~~2~~、**4**、~~8~~；9 的因數有：~~1~~、~~3~~、~~9~~；10 的因數有：~~1~~、~~2~~、~~5~~、~~10~~。

我們將合數 4、6、8、9、10 的因數分別羅列出，各個合數刪除掉 1、質因數、還有自己後，發現只剩下數字 4。

(三) 數字範圍 12-15 遊戲的最佳策略與討論：

引用上述方法，我們持續分析各個合數刪除掉 1、質因數、還有自己後，發現只剩下數字 4、6：

12 的因數，刪除 1、質因數、還有自己：~~1~~、~~2~~、~~3~~、**4**、**6**、~~12~~。

14 的因數，刪除 1、質因數、還有自己：~~1~~、~~2~~、~~7~~、~~14~~。

15 的因數，刪除 1、質因數、還有自己：~~1~~、~~3~~、~~5~~、~~15~~。

表 7 數字 12-15 的最佳策略

遊戲數字範圍	挑戰者	關主	勝負分 (挑戰者—關主)
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12	11	1	$(11+9+8+10+12) - (1+3+5+2+4+6+7)$ $=22$
	9	3	
	10	5、2	
	8	4	
	12	6 7 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13	13	1	$(13+9+8+10+12) -$ $(1+3+5+2+4+6+7+11) = 13$
	9	3	
	10	5、2	
	8	4	
	12	6 7、11 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14	13	1	$(13+9+8+10+12+14) -$ $(1+3+5+2+4+6+7+11) = 27$
	9	3	
	10	5、2	
	8	4	
	12	6 7 14 11 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15	13	1	$(13+9+15+10+8+12+14) -$ $(1+3+5+2+4+6+7+11) = 42$
	9	3	
	15	5	
	10	2	
	8	4	
	12	6	
	14	7 11 (已無因數)	

(四) 數字範圍 16-19 遊戲的最佳策略與討論：

引用上述方法，我們持續分析：

16 的因數，刪除 1、質因數、還有自己：1、2、4、8、16。

18 的因數，刪除 1、質因數、還有自己：1、2、3、6、9、18。

表 8 數字 16-19 的最佳策略

遊戲數字範圍	挑戰者	關主	勝負分 (挑戰者—關主)
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15、16	13	1	(13+9+15+10+14+16+12) — (1+3+5+2+7+8+4+6+11) = 42
	9	3	
	15	5	
	10	2	
	14	7	
	16	8、4	
	12	6 11 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15、16、17	17	1	(17+9+15+10+14+16+12) — (1+3+5+2+7+8+4+6+11) = 42
	9	3	
	15	5	
	10	2	
	14	7	
	16	8、4	
	12	6 11、13 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15、16、17、18	17	1	(17+9+15+10+14+18+12+16) — (1+3+5+2+7+6+4+8+11+13) = 51
	9	3	
	15	5	
	10	2	
	14	7	
	18	6	
	12	4	
	16	8 11、13 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15、16、17、18、 19	19	1	(19+9+15+10+14+18+12+16) — (1+3+5+2+7+6+4+8+11+13+17) = 36
	9	3	
	15	5	
	10	2	
	14	7	
	18	6	
	12	4	
	16	8 11、13、17 (已無因數)	

(五) 數字範圍 20-23 遊戲的最佳策略與討論：

引用上述方法，我們持續分析：

20 的因數，刪除 1、質因數、還有自己：1、2、5、**10**、20。

表 9 數字 20-23 的最佳策略

遊戲數字範圍	挑戰者	關主	勝負分 (挑戰者-關主)
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15、16、17、18、 19、20	19	1	$(19+15+10+14+20+12+16+18) -$ $(1+5+3+2+7+4+6+8+9+11+13+17) = 38$
	15	5、3	
	10	2	
	14	7	
	20	4	
	12	6	
	16	8	
	18	9	
		11、13、17 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15、16、17、18、 19、20、21	19	1	$(19+15+21+14+20+12+16+18) -$ $(1+5+3+7+2+4+10+6+8+9+11+13+17) = 39$
	15	5、3	
	21	7	
	14	2	
	20	4、10	
	12	6	
	16	8	
	18	9	
		11、13、17 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15、16、17、18、 19、20、21、22	19	1	$(19+15+21+14+20+12+16+18+22) -$ $(1+5+3+7+2+4+10+6+8+9+11+13+17) = 61$
	15	5、3	
	21	7	
	14	2	
	20	4、10	
	12	6	
	16	8	
	18	9	
	22	11	
		13、17 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、7、 8、9、10、11、12、13、 14、15、16、17、18、 19、20、21、22、23	23	1	$(23+15+21+14+20+12+16+18+22) -$ $(1+5+3+7+2+4+10+6+8+9+11+13+17+19)$ $= 46$
	15	5、3	
	21	7	
	14	2	
	20	4、10	
	12	6	
	16	8	
	18	9	
	22	11	
		13、17、19 (已無因數)	

(六) 範圍 24-25 遊戲的最佳策略與討論：

引用上述方法，我們持續分析：

24 的因數，刪除 1、質因數、還有自己：1、2、3、**4**、**6**、**8**、**12**、24。

25 的因數，刪除 1、質因數、還有自己：1、5、25

表 9 數字 24-25 的最佳策略

遊戲數字範圍	挑戰者	關主	勝負分 (挑戰者—關主)
1、2、3、4、5、6、 7、8、9、10、11、 12、13、14、15、16、 17、18、19、20、21、 22、23、24	23	1	$(23+15+21+14+20+24+16+18+22) -$ $(1+5+3+7+2+4+10+6+8+9+11+13+17+19+12)$ $=46$
	15	5、3	
	21	7	
	14	2	
	20	4、10	
	24	6	
	16	8	
	18	9	
	22	11 13、17、19、12 (已無因數)	
1、2、3、4、5、6、 7、8、9、10、11、 12、13、14、15、16、 17、18、19、20、21、 22、23、24、25	23	1	$(23+25+15+21+14+20+24+16+18+22) -$ $(1+5+3+7+2+4+10+6+8+9+11+13+17+19+12)$ $=71$
	25	5	
	15	3	
	21	7	
	14	2	
	20	4、10	
	24	6	
	16	8	
	18	9	
22	11 13、17、19、12 (已無因數)		

四、資料整理分析與討論

從表 5 到表 9，我們將「挑戰者」最佳取數的資料整理如下表 10：

表 10 數字 1-25 挑戰者的最佳取數整理

數字範圍	挑戰者可以拿當的數	關主拿到的數	數字範圍	挑戰者可以拿當的數	關主拿到的數
1		1	1 至 2	2	1
1 至 3	3	1、2	1 至 4	3、4	1、2
1 至 5	4、5	1、2、3	1 至 6	4、5、6	1、2、3
1 至 7	4、6、7	1、2、3、5	1 至 8	6、7、8	1、2、3、4、5
1 至 9	6、7、8、9	1、2、3、4、5	1 至 10	6、7、8、9、10	1、2、3、4、5
1 至 11	6、8、9、10、11	1、2、3、4、5、7	1 至 12	8、9、10、11、12	1、2、3、4、5、6、7
1 至 13	8、9、10、12、13	1、2、3、4、5、6、7、11	1 至 14	8、9、10、12、13、14	1、2、3、4、5、6、7、11
1 至 15	8、9、10、12、13、14、15	1、2、3、4、5、6、7、11	1 至 16	9、10、12、13、14、15、16	1、2、3、4、5、6、7、8、11
1 至 17	9、10、12、14、15、16、17	1、2、3、4、5、6、7、8、11、13	1 至 18	9、10、12、13、14、15、16、17、18	1、2、3、4、5、6、7、8、11、13
1 至 19	9、10、12、14、15、16、18、19	1、2、3、4、5、6、7、8、11、13、17	1 至 20	10、12、14、15、16、18、19、20	1、2、3、4、5、6、7、8、9、11、13、17
1 至 21	12、14、15、16、18、19、20、21	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、13、17	1 至 22	12、14、15、16、18、19、20、21、22	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、13、17
1 至 23	12、14、15、16、18、20、21、22、23	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、13、17、19	1 至 24	14、15、16、18、20、21、22、23、24	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、17、19
1 至 25	14、15、16、18、20、21、22、23、24、25	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、17、19	*遊戲範圍「1 至 18」、「1 至 20」，「挑戰者」拿到了遊戲數字範圍 1/2 處並且包含 1/2 以上所有的合數，其他遊戲範圍則至少拿到了遊戲數字範圍 1/2 處以上所有的合數。		

(一) 除了最大的質數外，所有的質數和 1 都屬於「關主」所有。

(二) 因為「挑戰者」只要取數，「關主」勢必就會拿到至少一個數（拿到它的因數），也就是取數的次數不會超過所有數字的一半，所以「挑戰者」如果能夠盡量拿到遊戲數字範圍 1/2 處（含 1/2）以上所有的合數，必定就是最佳的取數。

1. 上表左側，遊戲的數字範圍屬於奇數個數，「挑戰者」拿了最大的質數，也確實地拿

到了遊戲數字範圍 $1/2$ 處以上所有的合數。

2. 上表右側，遊戲的數字範圍屬於偶數個數，「挑戰者」拿了最大的質數外，在遊戲範圍「1 至 18」、「1 至 20」，「挑戰者」拿到了遊戲數字範圍 $1/2$ 處並且包含 $1/2$ 以上所有的合數，其他遊戲範圍則至少拿到了遊戲數字範圍 $1/2$ 處以上所有的合數。

(三) 為了瞭解如果遊戲範圍屬於偶數個數，何種狀況時，「挑戰者」會拿到遊戲範圍 $1/2$ 處的那個數，我們分別分析「1 至 18」（「挑戰者」拿到 9）和「1 至 20」（「挑戰者」拿到 10）遊戲範圍一半以上所有合數的因數（不列 1 和自己）如下表 11、表 12：

表 11 遊戲範圍「1 至 18」，大於等於 9 的合數因數（不列 1 和自己）分析

1	2	3	4	5	6	7	8	9 的因數： 3
10 的因數： 2、5	11	12 的因數： 2、3、4、6	13	14 的因數： 2、7	15 的因數： 3、5	16 的因數： 2、4、8	17	18 的因數： 2、3、6、9

表 12 遊戲範圍「1 至 20」，大於等於 10 的合數因數（不列 1 和自己）分析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 的因數： 2、5
11	12 的因數： 2、3、4、6	13	14 的因數： 2、7	15 的因數： 3、5	16 的因數： 2、4、8	17	18 的因數： 2、3、6、9	19	20 的因數： 2、4、5、10

由表 5 到表 12 我們觀察與分析如下：

1. 遊戲範圍 $1/2$ 處的那個數如果是質數，那麼「挑戰者」將無法拿到該數，因為除了最大的質數，所有的質數都會屬於「關主」，所以此時「挑戰者」只能拿到遊戲數字範圍 $1/2$ 處不包含 $1/2$ 以上所有的合數。
2. 遊戲範圍 $1/2$ 處的那個數如果不是質數，要拿取時該數時必須不影響大於 $1/2$ 所有合數的拿取（因為該數是這些數裡頭最小的），並且應該以拿取比該數大的合數優先，也就是說，如果拿取該數會使得其他大於該數的合數沒有因數，那麼就該放棄拿取該數。

五、取數策略討論分析：

由表 5 到表 9，「挑戰者」要拿取數字範圍 $1/2$ 處（包含 $1/2$ ）以上所有的合數，要有最佳的取數結果，應依照下述步驟進行：

- (一) 將合數的因數除了 1 和自己以外的數找出。
- (二) 將合數的因數只剩下一個因數的先挑。
- (三) 挑選剩下兩個因數的合數（這些合數的因數必然有 2 或者 3），越大的數越優先挑。
- (四) 再挑走只剩下一個因數的合數。

- (五) 同步驟三，該合數剩下的因數越少越先拿。
- (六) 數字範圍 1/2 處數字的拿取如影響數字範圍 1/2 以上合數的拿取，則放棄取該數。
- (七) 以遊戲範圍 1 至 36 為例，利用上述步驟的取數順序與策略如下表：

表 13 遊戲範圍「1 至 36」，大於等於 18 的合數因數（不列 1 和自己）分析

數字	18 因數: 2、3、6、9	19 質數	20 因數: 2、4、5、 10	21 因數: 3、7	22 因數: 2、11	23 質數	24 因數: 2、3、4、6、 8、12
數字	25 因數: 5	26 因數: 2、13	27 因數: 3、9	28 因數: 2、4、7、 14	29 質數	30 因數: 2、3、5、6、 10、15	31 最大質數
數字	32 因數: 2、4、8、 16	33 因數: 3、11	34 因數: 2、17	35 因數: 5、7	36 因數: 2、3、4、6、 9、12、18		

參考表 13，「挑戰者」的取數順序如下：

1. 先拿最大質數 31，「關主」拿取 1。
2. 25 只剩下 5 這個因數，拿取 25，大於等於 18 的數中，把 5 的因數刪除（20、30、35 刪除因數 5），關主拿取 5。
3. 35 只剩因數 7，拿取 35，大於 18 等於的數中，把 7 的因數刪除（21、28、35 刪除因數 7），關主拿取 7。
4. 21 只剩因數 3，拿取 21，大於 18 等於的數中，把 3 的因數刪除（18、24、27、30、33、36 刪除因數 3），關主拿取 3。
5. 27 和 33 都只剩下一個因數，所以兩個都可以拿取，我們在此先拿取 27，大於 18 等於的數中，把 9 的因數刪除（18、36 刪除因數 9），關主拿取 9。
6. 拿取 33，，大於 18 等於的數中，把 9 的因數刪除（22 刪除因數 11），關主拿取 11。
7. 22 只剩下 2 這個因數，拿取 22，大於等於 18 的數中，把 2 的因數刪除（18、20、24、26、28、30、32、34、36 刪除因數 2），關主拿取 2。
8. 26 和 34 都只剩下一個因數，所以兩個都可以拿取，我們在此先拿取 34，大於 18 等於的數中，把 17 的因數刪除（沒有其他數有 17 這個因數），關主拿取 17。
9. 拿取 26，大於 18 等於的數中，把 13 的因數刪除（沒有其他數有 13 這個因數），關主拿取 13。
10. 雖然 18 剩下因數 6，但 18 應該越晚拿取對拿取其他較大數的影響較小，而 28 剩下因數 4 和 14，拿取 28，大於 18 等於的數中，把 4、14 的因數刪除（20、24、32、36 刪除因數 4），關主拿取 4、14。
11. 20 只剩下 10 這個因數，拿取 20，大於等於 18 的數中，把 10 的因數刪除（30 刪除因數 10），關主拿取 10。
12. 拿取 18，大於 18 等於的數中，把 6 的因數刪除（24、30、36 刪除因數 6），關主拿取 6。

13. 20 只剩下 15 這個因數，拿取 30，大於等於 18 的數中，把 15 的因數刪除（沒有其他數有 15 這個因數），關主拿取 15。
14. 36 只剩下 12 這個因數，拿取 36，大於等於 18 的數中，把 12 的因數刪除（24 刪除因數 12），關主拿取 12。
15. 24 只剩下 8 這個因數，拿取 24，大於等於 18 的數中，把 8 的因數刪除（32 刪除因數 8），關主拿取 8。
16. 拿取最後剩下的合數 32，因數 16 刪除。關主拿走 16 和剩下的質數（這些質數都大於 18）。

(八) 我們利用上述步驟且第四點的的整理，持續分析 1 至 26 並且持續到 50 之間的最佳取數結果如表 14。

表 14 1 至 26 並且持續到 50 之間的最佳取數結果

遊戲數字範圍	挑戰者	關主	說明
1 至 26	14、15、16、18、20、21、22、 23、24、25、26 數字總和：224	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、17、19 數字總和：127	13 是質數，被 關主拿走
1 至 27	14、15、16、18、20、21、22、 23、24、25、26、27 數字總和：251	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、17、19 數字總和：127	13 是質數， 被關主拿走
1 至 28	14、15、16、18、20、21、22、 23、24、25、26、27、28 數字總和：279	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、17、19 數字總和：127	14 被挑戰者 挑走
1 至 29	14、15、16、18、20、21、22、 24、25、26、27、28、29 數字總和：285	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、17、19、23 數字總和：150	14 被挑戰者 挑走
1 至 30	15、16、18、20、21、22、24、 25、26、27、28、29、30 數字總和：301	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、14、17、19、23 數字總和：164	15 被挑戰者 挑走
1 至 31	15、16、18、20、21、22、24、 25、26、27、28、30、31 數字總和：303	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、14、17、19、23、 29 數字總和：193	15 被挑戰者 挑走
1 至 32	15、18、20、21、22、24、25、 26、27、28、30、31、32 數字總和：319	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、14、16、17、19、 23、29 數字總和：209	16 被關主拿 走，但挑戰者 拿走 15
1 至 33	15、18、20、21、22、24、25、 26、27、28、30、31、32、33 數字總和：352	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、14、16、17、19、 23、29 數字總和：209	16 被關主拿 走，但挑戰者 拿走 15
1 至 34	15、18、20、21、22、24、25、 26、27、28、30、31、32、33、	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、 11、12、13、14、15、16、17、	17 是質數，被

	34 數字總和：386	19、23、29 數字總和：209	關主拿走，但挑戰者拿走 15
1 至 35	18、20、21、22、24、25、26、27、28、30、31、32、33、34、35 數字總和：406	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、19、23、29 數字總和：224	
1 至 36	18、20、21、22、24、25、26、27、28、30、31、32、33、34、35、36 數字總和：442	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、19、23、29 數字總和：224	18 被挑戰者挑走
1 至 37	18、20、21、22、24、25、26、27、28、30、32、33、34、35、36、37 數字總和：448	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、19、23、29、31 數字總和：255	18 被挑戰者挑走
1 至 38	18、20、21、22、24、25、26、27、28、30、32、33、34、35、36、37、38 數字總和：486	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、19、23、29、31 數字總和：255	19 是質數，被關主拿走
1 至 39	18、20、21、24、25、26、27、28、30、32、33、34、35、36、37、38、39 數字總和：503	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、22、23、29、31 數字總和：277	20 被挑戰者挑走，但失去 22
1 至 40	20、21、24、25、26、27、28、30、32、33、34、35、36、37、38、39、40 數字總和：525	1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、22、23、29、31 數字總和：295	20 被挑戰者挑走，但失去 22

從表 14 我們可以發現，我們原本在前面歸納的「挑戰者」**「 $1/2$ 處（包含 $1/2$ ）以上所有的合數，會有最佳的取數結果」**，在遊戲範圍到 28 之後又有了變化，這時挑戰者有時會拿到數字範圍 $1/2$ 處以下的第一個合數，且有可能犧牲數字範圍 $1/2$ 處以上的一個合數（要考慮和關主的分差最大），顯示這個遊戲的歸納有一定的難度，因為遊戲本身的結果被質數的出現影響很大，而質數的出現非常沒有規律。

伍、 研究結果：

一、 「挑戰者」要獲勝的取數策略：

如果從數字範圍 $1/2$ 處以上的合數開始拿，且考慮到以下原則，則「挑戰者」必獲勝：

- (一) 先拿最大的質數。
- (二) 找出數字範圍 $1/2$ 處以上的合數，並列出它們除了 1 和自己外的所有因數。
- (三) 將合數的因數只剩下一個因數的先挑。
- (四) 挑選剩下兩個因數的合數（這些合數的因數必然有 2 或者 3），越大的數越優先挑。
- (五) 再挑走只剩下一個因數的合數。

(六) 同步驟三，該合數剩下的因數越少越先拿。

二、 是否存在最佳的取數策略：

因為質數出現不規律的緣故，所以在遊戲範圍到 40 之前，我們無法找到一個固定的方法來表示最佳的取數策略（雙方分數差距最大），但取數的原則仍然可以整理如下：

(一) 先拿最大的質數。

(二) 找出數字範圍 $1/2$ （包含 $1/2$ ）鄰近的 1 至 2 個合數，並列出它們除了 1 和自己外的所有因數。

(三) 找出數字範圍 $1/2$ 處以上的合數，並列出它們除了 1 和自己外的所有因數。

(四) 將合數的因數只剩下一個因數的先挑。

(五) 挑選剩下兩個因數的合數（這些合數的因數必然有 2 或者 3），越大的數越優先挑。

(六) 再挑走只剩下一個因數的合數。

(七) 同步驟三，該合數剩下的因數越少越先拿。

(八) 數字範圍 $1/2$ （包含 $1/2$ ）鄰近的 1 至 2 個合數的拿取如影響數字範圍 $1/2$ 以上合數的拿取，且無法達到「挑戰者」與「關主」分差極大化，則放棄取該數。

三、 從在最佳的取數策略下，「挑戰者」和「關主」的分數有沒有固定的規律可尋，但因為關主的分數較容易計算，所以雙方的最大分差可以從關主的分數反推。

整理數字範圍到 40 之前的最佳取數結果如下表 15：

表 15 數字範圍到 40 之前的最佳取數結果整理

數字範圍	關主拿取數字	數字範圍	關主拿取數字
1	1	1 至 2	1
1 至 3	<u>1</u> 、2	1 至 4	<u>1</u> 、2
1 至 5	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、3	1 至 6	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u>
1 至 7	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、5	1 至 8	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、5
1 至 9	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、5	1 至 10	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、5
1 至 11	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、7	1 至 12	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、7
1 至 13	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、7、11	1 至 14	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、11
1 至 15	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、11	1 至 16	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、11
1 至 17	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、11、13	1 至 18	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、11、13
1 至 19	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、11、13、17	1 至 20	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、11、13、17
1 至 21	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、11、13、17	1 至 22	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、13、 17
1 至 23	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、13、17、 19	1 至 24	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、17、19
1 至 25	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、13、 17、19	1 至 26	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、17、19
1 至 27	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 <u>13</u> 、 17、19	1 至 28	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、17、19
1 至 29	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 <u>13</u> 、 17、19、23	1 至 30	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、14、17、19、23
1 至 31	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 <u>13</u> 、 14、17、19、23、29	1 至 32	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、14、16、17、19、23、29
1 至 33	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 <u>13</u> 、 14、16、17、19、23、29	1 至 34	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、14、15、16、17、19、23、29
1 至 35	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 <u>13</u> 、 14、15、16、17、19、23、29	1 至 36	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、14、15、16、17、19、23、29
1 至 37	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 <u>13</u> 、 14、15、16、17、19、23、29、31	1 至 38	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、14、15、16、17、19、23、29、31
1 至 39	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 <u>13</u> 、 14、15、16、17、18、19、22、23、29、31	1 至 40	<u>1</u> 、 <u>2</u> 、 <u>3</u> 、 <u>4</u> 、 <u>5</u> 、 <u>6</u> 、 <u>7</u> 、 <u>8</u> 、 <u>9</u> 、 <u>10</u> 、 <u>11</u> 、 <u>12</u> 、 13、14、15、16、17、18、19、22、23、29、 31

由上表可以發現，有部分數字（深色塗黑格子），關主的得分可以簡單地用：

偶數：1 加到遊戲範圍的一半處+（除了最大質數外，大於等於遊戲範圍一半的質數）

奇數：1 加到遊戲範圍的一半以下處+（除了最大質數外，大於遊戲範圍一半的質數）

陸、 討論與結論

- 一、 數字 40 以下的遊戲策略因為因數的複雜化與質數的並不規則的出現，所以要無法找到規律的計算分數方法。
- 二、 設法找這個遊戲的規律讓我們吃足苦頭，但是這是個很好訓練察覺因倍數的遊戲。
- 三、 如果只是要獲勝（得分比關主多），而不是要找到最大分差，先拿最大質數，然後從遊戲範圍一半以上的合數開始拿，「挑戰者」絕對可以藉由這個方法獲得勝利。

柒、 參考資料及其他

1. 搶錢大作戰。線上檢索日期：2019 年 11 月 10 日。網址：
<http://163.26.175.3/sles/d01-j2.html>。
2. 稅收遊戲的最佳策略探討。線上檢索日期：2018 年 12 月 01 日。網址：
<https://reurl.cc/Njraex>