

嘉義市第 38 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：面面面面俱到-四面體數獨

關鍵詞：四面體、數獨

編號：

面面面面俱到-四面體數獨

摘要

四面體數獨大幅降低立體數獨的難度，如果四面體四片三角磚的三個頂點數目在 0 到 3 之間，而四個頂點分別為 1 到 4，則本研究在探討此四面體數獨的解：

1. 四面體四個三角磚獨立互不相同，4 片三角磚總共可做出 18 種形式。
2. 每一組解都可以成為四面體數獨的題目，且大多不止一種拼組方式。

壹、 研究動機：

我們偶然從老師那裡拿到一個數獨二十面體 IcoSoKu 的數學玩具，這個玩具的樣子如下圖 1，這個解謎遊戲的玩法是可以將數字按扣及三角磚都卸下，再隨機放置數字按扣，然後再將周圍的黑點點數與按扣的數字相匹配，它的玩法是：



圖 1 數獨二十面體 IcoSoKu

1. 移除所有 20 個三角磚並將黃色釘子狀按扣放在球體上頂點的任何位置。
2. 在黃色按扣周圍將白色三角磚扣在球體上，使得按扣周圍的黑點點數總和等於顯示的數字。
3. 無論黃色釘如何排列，都可以找出 Icosoku 問題的解決。只需重新排列位置就可以再玩一次。

根據玩具官方網站的說法，「每個組合只會有一個解決方案」，但這個遊戲總計有 12 個頂點、20 個面，對小學生來說，求解非常地複雜，所以我們想簡化這個玩具，使它適合小學生來玩。

貳、 研究目的：

我們首先將立體形狀簡化成 4 面體，因此遊戲就成了四片三角磚與四個釘子狀按扣（數字），因此我們將求

1. 四面體數獨三角磚的點數配置。
2. 三角磚的點數配置的所有可能解。

參、 研究設備及器材：

- 一、立體骨架（構造四面體）。
- 二、三角形紙片。
- 三、電腦（excel 軟體分析與記錄）

肆、 研究過程或方法：

一、剖析四面體

為了求解與討論方便，我們將四面體展開，得到下圖 2，並分別將四面體的四個面命名為甲、乙、丙、丁，由圖 2 我們也可以看到每個釘子會有 3 個面，也就是 3 個面的點數和會等於釘子上的數目。

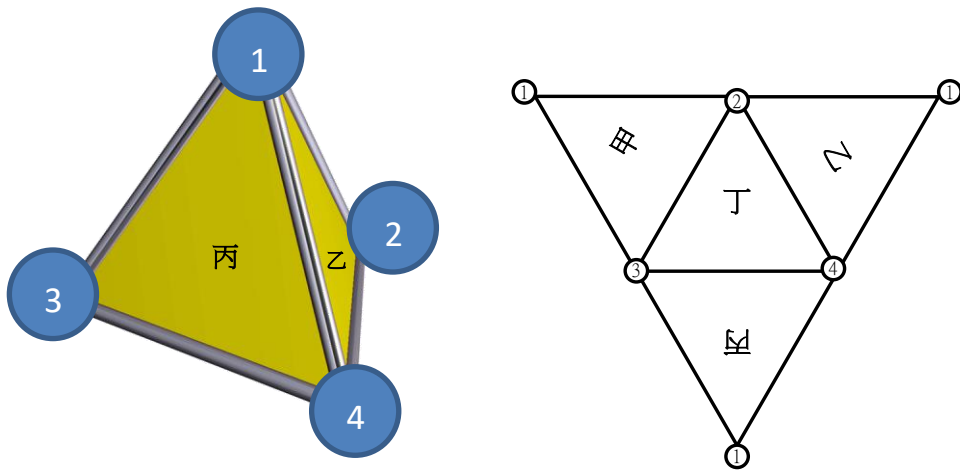


圖 2 四面體與其展開圖

二、四面體求解：

因為不管四個釘子狀按扣如何安裝，四面體經過空間的旋轉，都可以視為只有一種裝法，而四個釘子的點數分別為 1、2、3、4，所以四面體數獨沒有存在 20 面體每抽換一次釘子按扣就會有一種解的情形，而四片三角磚如果像 20 面體的三角磚一樣，上頭只有 0 到 3 的點數，那麼組合成四個釘子點數的組合有：

- (一) 三個面的何等於釘子數目 1：與釘子 1 接觸的三個面，數字組合有一種【0，0，1】。
- (二) 三個面的何等於釘子數目 2：與釘子 2 接觸的三個面，數字組合有 2 種【0，0，2】、【0，1，1】。
- (三) 三個面的何等於釘子數目 3：與釘子 3 接觸的三個面，數字組合有 3 種【0，0，3】、【1，1，1】、【0，1，2】。
- (四) 三個面的何等於釘子數目 4：與釘子 4 接觸的三個面，數字組合有 3 種【0，2，3】、【0，2，2】、【1，1，2】。
- (五) 因為三角磚有卡榫，不能翻面裝在骨架上，所以每一片三角磚上頭的數字相同，但順時針與逆時針順序不同，如圖 3，將視為不同的解。

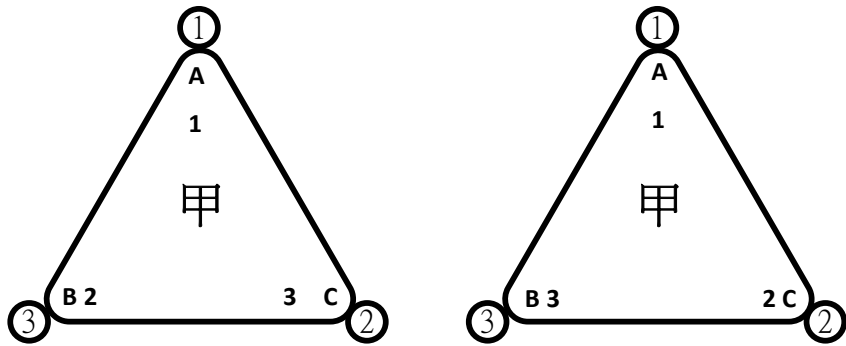


圖 3 數字相同，但數字有順時針與逆時針的差別，視為不同的解

(六) 考量翻轉的狀況，可將圖 2 的 4 片三角磚分別排出的情形如下圖 4。

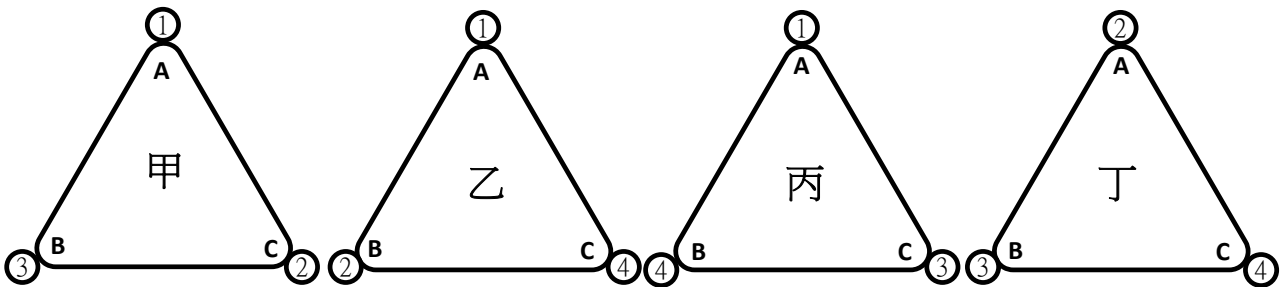


圖 4 四面體的 4 片三角磚

三、根據上述，每個釘子處會 $1 \times 2 \times 3 \times 3 = 18$ 種數字組合，每種數字組合分別又有 3 個面可以移轉，所以會有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 種磚塊的組合，我們整理出 4 片三角磚塊數字組合都不同的情形如下。

(一) 三角磚分別為 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 0)$ 、 $(0, 3, 3)$ 、 $(2, 0, 1)$ 的解如表 1：

表 1 三角磚分別為 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 0)$ 、 $(0, 3, 3)$ 、 $(2, 0, 1)$ 的解

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	1	0	0	0	0	0	0	3	3	2	0	1
解 02	0	0	0	1	0	0	0	3	3	2	0	1
解 03	1	0	2	0	0	0	0	3	3	0	0	1
解 04	1	0	0	0	0	0	0	3	0	2	3	1
解 05	1	0	0	0	0	1	0	3	3	2	0	0
解 06	1	0	0	0	0	0	0	1	3	2	0	3

(二) 四片三角磚分別為 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 0)$ 、 $(0, 2, 0)$ 、 $(2, 3, 2)$ 的解如表 2：

表 2 三角磚分別為 $(1, 0, 0)$ 、 $(0, 0, 0)$ 、 $(0, 2, 0)$ 、 $(2, 3, 2)$ 的解

三角磚	四面體解			
	甲	乙	丙	丁

	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	1	0	0	0	0	0	0	2	0	2	3	2
解 02	0	0	0	1	0	0	0	2	0	2	3	2
解 03	1	0	2	0	0	0	0	2	0	0	3	2
解 04	1	3	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2
解 05	1	0	0	0	0	2	0	0	0	2	3	2

(三) 四片三角磚分別為(0, 0, 2)、(0, 0, 1)、(1, 1, 0)、(0, 3, 2)的解如表 3：

表 3 三角磚分別為(0, 0, 2)、(0, 0, 1)、(1, 1, 0)、(0, 3, 2)的解

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	2	0	0	1	1	1	0	0	3	2
解 02	1	0	2	0	0	1	0	1	0	0	3	2
解 03	0	0	2	0	0	1	1	1	0	0	3	2
解 04	0	0	0	0	2	1	1	1	0	0	3	2
解 05	0	0	0	0	0	1	1	1	0	2	3	2
解 06	0	0	2	0	0	1	1	1	0	0	3	2
解 07	0	0	2	0	0	1	1	1	3	0	0	2
解 08	0	3	2	0	0	1	1	1	0	0	0	2
解 09	0	0	2	0	0	1	1	2	0	0	3	1

(四) 四片三角磚分別為(0, 0, 0)、(0, 0, 3)、(1, 1, 1)、(2, 2, 0)的解如表 4：

表 4 三角磚分別為(0, 0, 0)、(0, 0, 3)、(1, 1, 1)、(2, 2, 0)的解

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	0	0	0	3	1	1	1	2	2	0
解 02	0	0	0	1	0	3	0	1	1	2	2	0
解 03	1	0	0	0	0	3	0	1	1	2	2	0
解 04	0	0	0	0	2	3	1	1	1	0	2	0
解 05	0	0	0	0	0	3	1	1	2	0	1	0
解 06	0	1	0	0	0	3	1	1	2	2	0	0
解 07	0	2	0	0	0	3	1	1	0	2	1	0
解 08	0	0	0	0	0	1	1	3	1	2	2	0
解 09	0	0	0	0	0	3	1	0	2	2	1	1
解 10	0	0	0	0	0	1	1	0	2	2	1	3

(五) 四片三角磚分別為(0, 2, 0)、(0, 0, 0)、(0, 2, 1)、(2, 0, 2)的解如表 5：

表 5 三角磚分別為(0, 2, 0)、(0, 0, 0)、(0, 2, 1)、(2, 0, 2)的解

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	2	0	0	0	0	0	2	1	2	0	2
解 02	0	2	0	1	0	0	0	2	1	2	0	2
解 03	0	2	2	0	0	0	1	2	2	2	1	2
解 04	0	2	0	0	0	2	1	0	2	2	1	2
解 05	0	0	0	0	0	2	1	0	1	2	2	2
解 06	0	2	0	0	0	0	1	2	1	2	0	2
解 07	0	2	0	0	2	2	1	2	1	0	0	0

(六) 四片三角磚分別為(0, 0, 0)、(0, 0, 1)、(1, 1, 2)、(2, 1, 2)的解如表 6：

表 6 三角磚分別為(0, 0, 0)、(0, 0, 1)、(1, 1, 2)、(2, 1, 2)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	1	2
解 02	0	0	0	1	0	1	0	1	2	2	1	2
解 03	1	0	0	0	0	1	0	1	2	2	1	2
解 04	0	1	0	0	0	0	1	2	2	2	0	2
解 05	0	2	2	0	0	1	1	2	1	0	0	1
解 06	1	0	1	0	2	1	0	2	2	0	1	1
解 07	0	2	0	1	2	1	0	1	0	0	1	1
解 08	1	0	1	0	0	2	0	1	1	2	1	2

(七) 四片三角磚分別為(1, 1, 2)、(0, 0, 0)、(0, 1, 1)、(0, 1, 3)的解如表 7：

表 7 三角磚分別為(1, 1, 2)、(0, 0, 0)、(0, 1, 1)、(0, 1, 3)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	1	1	2	0	0	0	0	1	1	0	1	3
解 02	0	1	2	1	0	0	0	1	1	0	1	3
解 03	0	1	2	0	0	0	1	1	1	0	1	3
解 04	0	1	0	1	2	0	0	1	1	0	1	3
解 05	0	1	0	0	0	0	1	1	1	2	1	3
解 06	1	1	0	0	0	0	0	3	1	2	1	1
解 07	1	1	0	0	0	1	0	3	1	2	1	0
解 08	1	1	0	0	0	3	0	0	1	2	1	1

(八) 四片三角磚分別為(0, 1, 0)、(0, 0, 2)、(1, 2, 1)、(0, 1, 2)的解如表 8：

表 8 三角磚分別為(0, 1, 0)、(0, 0, 2)、(1, 2, 1)、(0, 1, 2)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	1	0	0	0	2	1	2	1	0	1	2
解 02	0	1	0	1	2	0	0	2	1	0	1	2
解 03	1	1	0	0	2	0	0	2	1	0	1	2
解 04	0	1	0	0	0	2	1	2	1	0	1	2
解 05	0	1	0	0	0	0	1	2	1	2	1	2
解 06	0	1	2	0	0	0	1	2	1	0	1	2
解 07	0	1	0	0	2	0	1	2	1	0	1	2
解 08	0	1	0	0	2	0	1	2	1	0	1	2
解 09	0	1	0	0	2	2	1	0	1	0	1	2
解 10	0	1	0	0	2	2	1	2	1	0	1	0

(九) 四片三角磚分別為(0, 1, 0)、(0, 0, 2)、(1, 1, 1)、(0, 1, 1)的解如表 9：

表 9 三角磚分別為(0, 1, 0)、(0, 0, 2)、(1, 1, 1)、(0, 1, 1)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	1	0	0	0	2	1	1	1	0	1	1
解 02	0	1	0	1	2	1	0	1	1	0	1	2
解 03	0	1	0	0	2	1	1	2	1	0	1	1

(十) 四片三角磚分別為(0, 0, 1)、(0, 1, 1)、(1, 3, 0)、(0, 3, 0)的解如表 10：

表 10 三角磚分別為(0, 0, 1)、(0, 1, 1)、(1, 3, 0)、(0, 3, 0)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	1	0	1	1	1	3	0	0	3	0
解 02	0	0	1	0	1	1	1	3	0	0	3	0
解 03	0	0	1	0	1	1	1	3	3	0	0	0
解 04	0	3	1	0	1	1	1	3	0	0	0	0
解 05	1	3	2	0	1	2	1	2	0	0	3	0
解 06	1	3	2	0	1	1	1	3	0	0	3	0

(十一) 四片三角磚分別為(0, 0, 0)、(0, 1, 0)、(1, 2, 0)、(1, 3, 2)的解如表 11：

表 11 三角磚分別為(0, 0, 0)、(0, 1, 0)、(1, 2, 0)、(1, 3, 2)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	0	0	1	0	1	2	0	1	3	2
解 02	0	0	0	1	1	0	0	2	0	1	3	2
解 03	0	0	1	0	0	0	1	2	0	1	3	2
解 04	0	0	1	0	0	0	1	2	0	1	3	2
解 05	0	0	1	1	1	0	0	2	0	1	0	2
解 06	0	0	0	0	1	0	1	2	3	1	0	2
解 07	0	0	0	0	1	2	1	2	3	1	0	0
解 08	0	0	0	1	1	2	1	0	3	1	0	2

(十二) 四片三角磚分別為(0, 0, 1)、(0, 1, 2)、(1, 1, 0)、(1, 3, 1)的解如表 12：

表 12 三角磚分別為(0, 0, 1)、(0, 1, 2)、(1, 1, 0)、(1, 3, 1)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	1	0	1	2	1	1	0	0	3	1
解 02	1	0	1	0	1	2	0	1	0	0	3	1
解 03	1	0	1	0	1	2	0	1	0	0	3	1
解 04	1	0	1	0	0	2	0	1	0	1	3	1
解 05	1	0	1	0	0	2	0	1	0	1	3	1
解 06	1	3	1	0	0	2	0	1	0	1	0	1
解 07	1	0	1	0	0	1	0	1	3	1	0	1

(十三) 四片三角磚分別為(0, 0, 0)、(1, 0, 1)、(1, 1, 1)、(1, 2, 3)的解如表 13：

表 13 三角磚分別為(0, 0, 0)、(1, 0, 1)、(1, 1, 1)、(1, 2, 3)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	2	3
解 02	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	2	3
解 03	0	2	0	0	1	0	1	1	1	1	0	3
解 04	0	0	0	0	1	0	1	1	2	1	1	3
解 05	0	0	0	0	1	1	1	3	1	1	2	0

解 06	0	0	0	0	1	3	1	1	1	1	2	0
解 07	0	0	0	0	1	3	1	0	1	1	2	1
解 08	0	0	0	0	1	0	1	3	1	1	2	1

(十四) 四片三角磚分別為(0, 0, 0)、(0, 1, 0)、(1, 2, 1)、(1, 2, 2)的解如表 14：

表 14 三角磚分別為(0, 0, 0)、(0, 1, 0)、(1, 2, 1)、(1, 2, 2)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	0	0	1	0	1	2	1	1	2	2
解 02	0	0	0	1	1	0	0	2	1	1	2	2
解 03	1	0	1	0	1	0	0	2	1	0	2	2
解 04	0	0	1	0	0	0	1	2	1	1	2	2
解 05	0	1	1	0	1	0	1	2	2	0	0	2
解 06	0	2	0	0	1	0	1	2	1	1	0	2
解 07	0	0	0	0	1	0	1	2	2	1	1	2
解 08	0	2	0	0	1	0	1	2	0	1	1	2
解 09	0	1	0	1	1	0	0	2	0	1	2	2

(十五) 四片三角磚分別為(0, 0, 1)、(0, 1, 2)、(1, 2, 1)、(0, 2, 0)的解如表 15：

表 15 三角磚分別為(0, 0, 1)、(0, 1, 2)、(1, 2, 1)、(0, 2, 0)的解：

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	0	1	0	1	2	1	2	1	0	2	0
解 02	0	0	1	1	1	2	0	2	1	0	2	0
解 03	1	0	1	0	0	2	0	0	1	0	2	2
解 04	1	0	1	0	1	2	0	0	1	0	2	2
解 05	1	2	1	0	1	2	0	0	1	0	0	2
解 06	1	1	1	0	1	2	0	0	0	0	2	2
解 07	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	2	2
解 08	1	1	1	0	1	2	0	0	0	0	2	2

(十六) 四片三角磚分別為(1, 1, 1)、(0, 1, 0)、(0, 1, 1)、(0, 1, 3)的解如表 16：

表 16 三角磚分別為(1, 1, 1)、(0, 1, 0)、(0, 1, 1)、(0, 1, 3)的解

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	3
解 02	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	3
解 03	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	3
解 04	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	3
解 05	1	0	1	0	0	3	0	0	0	1	1	1
解 06	1	1	1	0	0	1	0	1	3	0	1	1
解 07	1	1	1	0	1	0	0	3	1	0	1	1

(十七) 四片三角磚分別為(0, 1, 0)、(1, 1, 0)、(0, 2, 1)、(1, 1, 2)的解如表 17：

表 17 三角磚分別為(0, 1, 0)、(1, 1, 0)、(0, 2, 1)、(1, 1, 2)的解

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	0	1	0	1	1	0	0	2	1	1	1	2
解 02	0	2	1	1	2	0	0	2	1	1	1	2
解 03	0	1	0	0	0	0	1	1	2	0	1	2
解 04	0	1	0	0	0	0	1	2	1	2	1	2
解 05	0	1	0	1	0	0	0	2	0	1	1	2
解 06	0	1	0	1	0	2	1	0	1	1	1	2

(十八) 四片三角磚分別為(1, 1, 1)、(0, 0, 1)、(0, 1, 1)、(1, 1, 2)的解如表 18：

表 18 三角磚分別為(1, 1, 1)、(0, 0, 1)、(0, 1, 1)、(1, 1, 2)的解

三角磚	四面體解											
	甲			乙			丙			丁		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
解 01	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	2

伍、 研究結果：

一、 四面體三角磚的點數配置（4片三角磚塊數字組合都不同的情形）與解的數量整理如下表 19：

表 19 三角磚的點數配置與解的數量結果整理

編號	三角磚點數	解的數量	編號	三角磚點數	解的數量
1	(1, 0, 0) (0, 0, 0) (0, 3, 3) (2, 0, 1)	6 種拼法	2	(1, 0, 0) (0, 0, 0) (0, 2, 0) (2, 3, 2)	5 種拼法
3	(0, 0, 2) (0, 0, 1) (1, 1, 0) (0, 3, 2)	9 種拼法	4	(0, 0, 0) (0, 0, 3) (1, 1, 1) (2, 2, 0)	10 種拼法
5	(0, 2, 0) (0, 0, 0) (0, 2, 1) (2, 0, 2)	7 種拼法	6	(0, 0, 0) (0, 0, 1) (1, 1, 2) (2, 1, 2)	8 種拼法
7	(1, 1, 2) (0, 0, 0) (0, 1, 1) (0, 1, 3)	8 種拼法	8	(0, 1, 0) (0, 0, 2) (1, 2, 1) (0, 1, 2)	10 種拼法
9	(0, 1, 0) (0, 0, 2) (1, 1, 1) (0, 1, 1)	3 種拼法	10	(0, 0, 1) (0, 1, 1) (1, 3, 0) (0, 3, 0)	6 種拼法
11	(0, 0, 0) (0, 1, 0) (1, 2, 0) (1, 3, 2)	8 種拼法	12	(0, 0, 1) (0, 1, 2) (1, 1, 0) (1, 3, 1)	7 種拼法
13	(0, 0, 0) (1, 0, 1) (1, 1, 1) (1, 2, 3)	8 種拼法	14	(0, 0, 0) (0, 1, 0) (1, 2, 1) (1, 2, 2)	9 種拼法

15	(0, 0, 1) (0, 1, 2) (1, 2, 1) (0, 2, 0)	8 種拼法	16	(1, 1, 1) (0, 1, 0) (0, 1, 1) (0, 1, 3)	7 種拼法
17	(0, 1, 0) (1, 1, 0) (0, 2, 1) (1, 1, 2)	6 種拼法	18	(1, 1, 1) (0, 0, 1) (0, 1, 1) (1, 1, 2)	1 種拼法

陸、 討論與結論

- 一、 因為四面體旋轉後，不管四個釘子狀按扣如何安裝，經過空間的旋轉，都可以視為只有一種裝法，因此四面體數獨只要考量四個面的點數配置就可求解。
- 二、 如果將玩具設計成八面體，此時的變化將比四面體多很多，可以留待有興趣的同學繼續研究，並且探討四面體解和八面體解的關係，然後或可推導出 20 面體的解法概念，因目前找得到 20 面體的解法，都是用電腦演算來解。
- 三、 有興趣的同學也可以繼續研究允許 4 片三角磚塊數字組合有不同的情形。

柒、 參考資料及其他

1. 四面體。線上檢索日期：2019 年 11 月 10 日。網址：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%9B%E9%9D%A2%E9%AB%94>。
2. 數獨二十面體 IcoSoKu。線上檢索日期：2018 年 10 月 12 日。網址：
https://www.ostbiz.com/products/recent_toys-icosoku_toys/