

嘉義市第 38 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：

關 鍵 詞：數列、比例

編 號：

摘要

本研究探討在 x 天的假期中，每 a 天中要念 b 天書，最勤勞與最懶惰者之最多差異天數，得到念書情形將以 a 天為基本循環單位，在假期天數 $x = an + c$ ， $\min(b, a - b) \leq c \leq \max(b, a - b)$ 時，能找到最多差異天數為 $\min(b, a - b)$ 。進而探討在兩個條件、三個條件... n 個條件均須滿足的狀況下，最小的循環單位與差異最大的情形，並獲得多限制條件的數列建構方式。

壹、研究動機

放假是學生在冗長的知識學習中最为期待的小確幸，但是假期學習失落是師長們最為擔心的一件事。我們在科學研習月刊「森棚教官的數學題」中，我們找到了名為「周休二日」的數學題目，題目敘述如下：「有一次放了三天的連假，老師叮嚀學生每連續兩天之中要剛好讀一天書。那麼最勤勞者與最偷懶者讀書天數最多可以差幾天？」這個題目激發了我們的好奇心，我們想要知道不同的放假天數與讀書天數之間的關係，於是我們希望能夠透過更多的方式來完整的詮釋這一個有趣的題目。

貳、研究目的

將原題目一般化後，我們要探討的題目為：

- 一、探討在 x 天的假期中，每 a 天中要念 b 天書，在滿足條件的最低程度下，最勤勞與最懶惰者之最多差異天數。
- 二、探討在 x 天的假期中，同時滿足(1)每 a_1 天中要念 b_1 天書、(2)每 a_2 天中要念 b_2 天書，在滿足條件的最低程度下，最勤勞與最懶惰者之最多差異天數。
- 三、探討在 x 天的假期中，同時滿足(1)每 a_1 天中要念 b_1 天書、(2)每 a_2 天中要念 b_2 天書、(3)每 a_3 天中要念 b_3 天書，在滿足條件的最低程度下，最勤勞與最懶惰者之最多差異天數。

參、研究設備及器材

計算紙、筆、小白板、彩色白板筆、MS Office、筆記型電腦

肆、研究過程與討論

一、名詞定義

(一). $\left\{\frac{b}{a}\right\}_x$: 在 x 天的假期中，每連續 a 天中要念 b 天書。

(二). $\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right\}_x$: 探討在 x 天的假期中，同時滿足(1)每 a_1 天中要念 b_1 天書、(2)每 a_2 天中要念 b_2 天書。

(三). 最大公切單位 $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right)$: 若 $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ ，則我們稱 $\left(\frac{b_1, b_2}{a_1, a_2}\right)$ 為最大公切單位。

$$\text{例如：}\left(\frac{3}{6}, \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{4}{12}, \frac{6}{18}\right) = \frac{2}{6}$$

二、研究一：

探討在 x 天的假期中，每 a 天中要念 b 天書，在滿足條件的最低程度下，最勤勞與最懶惰者之最多差異天數。

(一). 原題 $\left\{\frac{b}{a}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

1. $\left\{\frac{1}{2}\right\}_3$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXO	2	66.7%	1	33.3%
最少	XOX	1	33.3%		

2. $\left\{\frac{1}{2}\right\}_4$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXOX	2	50%	0	0%
最少	XOXO	2	50%		

3. $\left\{\frac{1}{2}\right\}_5$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXOXO	3	60%	1	20%
最少	XOXOX	2	40%		

4. $\left\{\frac{1}{2}\right\}_6$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXOXOX	3	50%	0	0%
最少	XOXOXO	3	50%		

5. $\left\{\frac{1}{2}\right\}_{2k-1}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXOX...XOXO	k	$\frac{k}{2k-1}$	1	$\frac{1}{2k-1}$
最少	XOXO...OXOX	$k-1$	$\frac{k-1}{2k-1}$		

6. $\left\{\frac{1}{2}\right\}_{2k}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXOX...OXOX	k	50%	0	0%
最少	XOXO...XOXO	k	50%		

(二). $\left\{\frac{b}{a}\right\} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

1. $\left\{\frac{1}{3}\right\}_3$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXX	1	33.3%	0	0%
最少	XXO	1	33.3%		

2. $\left\{\frac{1}{3}\right\}_4$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	Oxxo	2	50%	1	25%
最少	Xxox	1	25%		

3. $\left\{\frac{1}{3}\right\}_5$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	Oxxox	2	40%	1	20%
最少	Xxoxx	1	20%		

4. $\left\{\frac{1}{3}\right\}_6$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXOXX	2	33.3%	0	0%
最少	XOXXO	2	33.3%		

5. $\left\{\frac{1}{3}\right\}_{3k}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXX...OXX	k	33.3%	0	0%
最少	XXO...XXO	k	33.3%		

6. $\left\{\frac{1}{3}\right\}_{3k+1}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXX...OXXO	k+1	$\frac{(k+1)}{3k+1}$	1	$\frac{1}{3k+1}$
最少	XXO...XXOX	k	$\frac{k}{3k+1}$		

7. $\left\{\frac{1}{3}\right\}_{3k+2}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXX...OXXOX	k+1	$\frac{k+1}{3k+2}$	1	$\frac{1}{3k+1}$
最少	XXO...XXOXX	k	$\frac{k}{3k+2}$		

(三). $\left\{\frac{b}{a}\right\} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

1. $\left\{\frac{2}{3}\right\}_3$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OOX	2	66.7%	0	0%
最少	XOO	2	66.7%		

$$2. \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}_4$$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	ooxo	3	75%	1	25%
最少	xoox	2	50%		

$$3. \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}_5$$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	ooxoo	4	80%	1	20%
最少	xooxo	3	60%		

$$4. \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}_6$$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	ooxoox	4	66.7%	0	0%
最少	xooxoo	4	66.7%		

$$5. \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{3k}$$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	oox...oox	$2k$	66.7%	0	0%
最少	xoo...xoo	$2k$	66.7%		

$$6. \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{3k+1}$$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	oox...ooxo	$2k + 1$	$\frac{2k + 1}{3k + 1}$	1	$\frac{1}{3k + 1}$
最少	xoo...xoox	$2k$	$\frac{2k}{3k + 1}$		

$$7. \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\}_{3k+2}$$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	oox...ooxoo	$2k + 2$	$\frac{2k + 2}{3k + 1}$	1	$\frac{1}{3k + 1}$
最少	xoo...xooxo	$2k + 1$	$\frac{2k + 1}{3k + 1}$		

(四). $\left\{\frac{b}{a}\right\} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

1. $\left\{\frac{1}{4}\right\}_4$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXX	1	25%	0	0%
最少	XXXO	1	25%		

2. $\left\{\frac{1}{4}\right\}_5$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXXO	2	40%	1	20%
最少	XXXOX	1	20%		

3. $\left\{\frac{1}{4}\right\}_6$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXXOX	2	33.3%	1	16.7%
最少	XXXOXX	1	16.7%		

4. $\left\{\frac{1}{4}\right\}_7$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXXOXX	2	28.6%	1	14.3%
最少	XXXOXXX	1	14.3%		

5. $\left\{\frac{1}{4}\right\}_{4k}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXX...OXXX	k	25%	0	0%
最少	XXXO...XXXO	k	25%		

6. $\left\{\frac{1}{4}\right\}_{4k+1}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXX...OXXXO	$k + 1$	$\frac{k + 1}{4k + 1}$	1	$\frac{1}{4k + 1}$
最少	XXXO...XXXOX	k	$\frac{k}{4k + 1}$		

7. $\left\{\frac{1}{4}\right\}_{4k+2}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXX...OXXXOX	$k + 1$	$\frac{k + 1}{4k + 2}$	1	$\frac{1}{4k + 2}$
最少	XXXO...XXXOXX	k	$\frac{k}{4k + 2}$		

8. $\left\{\frac{1}{4}\right\}_{4k+3}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXX...OXXXOXX	$k + 1$	$\frac{k + 1}{4k + 3}$	1	$\frac{1}{4k + 3}$
最少	XXXO...XXXOXXX	k	$\frac{k}{4k + 3}$		

(五). $\left\{\frac{b}{a}\right\} = \left\{\frac{2}{4}\right\}$

1. $\left\{\frac{2}{4}\right\}_4$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXX	2	50%	0	0%
最少	XXOO	2	50%		

2. $\left\{\frac{2}{4}\right\}_5$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXO	3	60%	1	20%
最少	XXOOX	2	40%		

3. $\left\{\frac{2}{4}\right\}_6$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OXXOO	4	66.7%	2	33.3%
最少	XXOXX	2	33.3%		

4. $\left\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right\}_7$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OOXXOOX	4	57.1%	1	14.3%
最少	XXOOXXO	3	42.8%		

5. $\left\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right\}_{4k}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OOXX...OOXX	$2k$	50%	0	0%
最少	XXOO...XXOO	$2k$	50%		

6. $\left\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right\}_{4k+1}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OOXX...OOXXO	$2k + 1$	$\frac{2k + 1}{4k + 1}$	1	$\frac{1}{4k + 1}$
最少	XXOO...XXOOX	$2k$	$\frac{2k}{4k + 1}$		

7. $\left\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right\}_{4k+2}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OOXX...OOXXOO	$2k + 2$	$\frac{2k + 2}{4k + 2}$	2	$\frac{2}{4k + 2}$
最少	XXOO...XXOOXX	$2k$	$\frac{2k}{4k + 2}$		

8. $\left\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right\}_{4k+3}$

	過程	念書天數	念書比例	相差天數	相差比例
最多	OOXX...OOXXOOX	$2k + 2$	$\frac{2k + 2}{4k + 3}$	1	$\frac{1}{4k + 3}$
最少	XXOO...XXOOXXO	$2k + 1$	$\frac{2k + 1}{4k + 3}$		

(六). 研究一討論

從討論以上幾個例子的過程中，我們發現：

1. 最勤勞的念書方式為先念 b 天，再休息 $a - b$ 天；最懶惰的念書方式為休息 $a - b$ 天，再念 b 天。
2. 顯然，當 x 越大，兩者相差比例越小。因此在滿足老師要求的條件下，越長的假期差異越小。
3. $\left\{\frac{b}{a}\right\}_x$ 有循環性，且最小的循環單位為 a 。

【證明】

假設數列 $\{d_1, d_2, d_3, \dots, d_a, d_{a+1}, \dots, d_x\}$ 為 x 天中的念書方式，其中有唸書的那天為1，沒唸書的那天為0。

$$\text{則 } d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_a = b = d_2 + d_3 + \dots + d_{a+1},$$

$$\text{且 } d_{a+1} + d_{a+2} + d_{a+3} + \dots + d_{2a} = b = d_{a+2} + d_{a+3} + \dots + d_{2a+1} \text{ 且}$$

$$\text{可知 } d_1 = d_{a+1} = d_{2a+1} = d_{3a+1} \dots$$

$$\text{同理 } d_2 = d_{a+2} = d_{2a+2} = d_{3a+2} \dots \quad d_c = d_{a+c} = d_{2a+c} = d_{3a+c} \dots$$

其中 c 為正整數

因此 $(a, b)_x$ 必有循環性，且最小的循環單位為 a 。

4. 設 c 為小於 a 的非負整數， n 是非負整數。

在假期天數 $x = an + c$ ， $\min(b, a - b) \leq c \leq \max(b, a - b)$ 時，能找到最多差異天數為 $\min(b, a - b)$ 。

【證明】

最多差異天數發生於勤勞者連續念 b 日時，或懶惰者連續休息 $a - b$ 日時

若 $b \geq c \geq a - b$ ，

$$\begin{aligned} \text{最勤勞者：} d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_c &= d_1 + d_2 + \dots + d_{a-b} + \dots + d_c \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 = c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最懶惰者：} d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_c &= d_1 + d_2 + \dots + d_{a-b} + \dots + d_c \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + 1 + 1 + \dots + 1 = c - (a - b) \end{aligned}$$

因此差異為 $c - [c - (a - b)] = a - b$ 為與 c 無關的定值

同理若 $a - b \geq c \geq b$ ，

$$\begin{aligned} \text{最勤勞者：} d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_c &= d_1 + d_2 + \dots + d_b + \dots + d_c \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 + 0 + \dots + 0 = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最懶惰者：} d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_c &= d_1 + d_2 + \dots + d_b + \dots + d_c \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

因此差異為 $b - 0 = b$ 為與 c 無關的定值

所以只要 c 介於 $a - b$ 、 b 之間， $\left\{\frac{b}{a}\right\}_x$ 的最大差異值為 $\min(b, a - b)$ 。得證

三、研究二

探討在 x 天的假期中，同時滿足條件 A：每 a_1 天中要念 b_1 天書、與條件 B：每 a_2 天中要念 b_2 天書，最勤勞與最懶惰者之最多差異天數。

不失一般性，我們將分為(一) $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ 與 (二) $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ 來討論。

(一). $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$

1. 若 $a_1 = a_2$ ，則 $b_1 = b_2$ ，同研究一。

2. 若 $a_2 > a_1$

例 1 : $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}\right\}$

(1). $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}\right\}_4$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOX	2	0	2
最少	XOXO	2		

(2). $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}\right\}_5$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXO	3	1	2
最少	XOXOX	2		

(3). $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}\right\}_6$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXOX	3	0	2
最少	XOXOXO	3		

(4). $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}\right\}_{2k}$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOX...OX	k	0	2
最少	XOXO...XO	k		

$$(5). \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4} \right\}_{2k+1}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOX...OXO	$k + 1$	1	2
最少	XOXO...XOX	k		

$$\text{例 2 : } \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \right\}$$

$$(1). \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \right\}_6$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXOX	3	0	2
最少	XOXOXO	3		

$$(2). \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \right\}_7$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXOXO	4	1	2
最少	XOXOXOX	3		

$$(3). \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \right\}_8$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXOXOX	4	0	2
最少	XOXOXOXO	4		

$$(4). \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \right\}_{2k}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOX...OX	k	0	2
最少	XOXO...XO	k		

$$(5). \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \right\}_{2k+1}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOX...OXO	$k + 1$	1	2
最少	XOXO...XOX	k		

研究二-(一) 討論： $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ ，且 $a_2 > a_1$

經過以上幾個例子，我們在研究二-(一)發現：

在兩個限制條件比例相同的狀況下，過程與兩個分數的最大公切單位 $(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2})$ 相同。

故結果將與一個限制條件下之 $(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2})$ 等價。

【證明】：設 $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{q}{p}$ ，其中 $(p, q) = 1$ 且 $a_1 = mp$ 、 $b_1 = mq$ 、 $a_2 = np$ 、 $b_2 = nq$

$$\text{則} \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} \right) = \frac{(m,n)q}{(m,n)p}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{a_1} = b_1 \dots \textcircled{1}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{a_2} = b_2 \dots \textcircled{2}$$

兩式相減得：

$$d_{a_1+1} + d_{a_1+2} + d_{a_1+3} + \dots + d_{a_2} = b_2 - b_1 \dots \textcircled{3}$$

$$\text{即} d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{a_1-a_2} = b_2 - b_1 \dots \textcircled{4}$$

$$(m, n)p|a_2 - a_1 \text{、} (m, n)q|b_2 - b_1$$

由輾轉相除法原理運算，可得

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{(m,n)p} = (m, n)q \quad \text{得證。}$$

(二). $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$

在這個項目中，我們發現隨著可連續休息天數 $a - b$ 的不同，而有不一樣的結果，因此我們分為 1. $a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2$ 2. $a_1 - b_1 > a_2 - b_2$ 來討論

(三).

1. 在 $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ 的條件下， $a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2$ ，

例 1： $\left\{ \frac{3}{5}, \frac{2}{4} \right\}$

(1). $\left\{ \frac{3}{5}, \frac{2}{4} \right\}_5$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOOXX	3	0	5
最少	XXOOO	3		

(2). $\left\{ \frac{3}{5}, \frac{2}{4} \right\}_6$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOOXXO	4	1	5
最少	XXOOOX	3		

$$(3). \left\{ \frac{3}{5}, \frac{2}{4} \right\}_7$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	000XX00	5	2	5
最少	XX000XX	3		

$$(4). \left\{ \frac{3}{5}, \frac{2}{4} \right\}_8$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	000XX000	6	2	5
最少	XX000XX0	4		

$$(5). \left\{ \frac{3}{5}, \frac{2}{4} \right\}_9$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	000XX000X	6	1	5
最少	XX000XX00	5		

$$\text{例 2 : } \left\{ \frac{4}{5}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$(1). \left\{ \frac{4}{5}, \frac{1}{3} \right\}_5$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	0000X	4	0	5
最少	X0000	4		

$$(2). \left\{ \frac{4}{5}, \frac{1}{3} \right\}_6$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	0000X0	5	1	5
最少	X0000X	4		

$$(3). \left\{ \frac{4}{5}, \frac{1}{3} \right\}_7$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	0000X00	6	1	5
最少	X0000X0	5		

$$(4). \left\{ \frac{4}{5}, \frac{1}{3} \right\}_8$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	0000X000	7	1	5
最少	X0000X00	6		

$$(5). \left\{ \frac{4}{5}, \frac{1}{3} \right\}_9$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	0000X0000	8	1	5
最少	X0000X000	7		

研究二-(二) 討論： $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ ，且 $a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2$

經過上述例子我們在 $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ ，且 $a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2$ 狀況下我們發現：

在兩個限制條件比例不同的狀況下，所有滿足比例較大的 $\left\{ \frac{b_1}{a_1} \right\}$ 過程，也會滿足 $\left\{ \frac{b_2}{a_2} \right\}$ ，

過程與兩個限制中比例較大的 $\left\{ \frac{b_1}{a_1} \right\}$ 相同。結果將與一個限制條件下之 $\left\{ \frac{b_1}{a_1} \right\}$ 等價。

【證明】：

(1) 若 $a_1 = a_2$ ，則 $b_1 > b_2$ ，顯然成立。

(2) 若 $a_1 > a_2$

使用反證法，假設存在一種念書過程，滿足 $\left\{ \frac{b_1}{a_1} \right\}$ ，但不滿足 $\left\{ \frac{b_2}{a_2} \right\}$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{a_1} = b_1 \dots \textcircled{1}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{a_2} < b_2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times (-1) : \text{ 則 } d_{a_2+1} + d_{a_2+2} + d_{a_2+3} + \dots + d_{a_1} > b_1 - b_2$$

$$\text{因為 } d_{a_2+1} + d_{a_2+2} + d_{a_2+3} + \dots + d_{a_1} \leq a_1 - a_2$$

$$\text{所以 } a_1 - a_2 > b_1 - b_2 \Rightarrow a_1 - b_1 > a_2 - b_2 \quad \text{與題意矛盾！}$$

因此若 $a_1 > a_2$ ，滿足 $\left\{ \frac{b_1}{a_1} \right\}$ 者，必滿足 $\left\{ \frac{b_2}{a_2} \right\}$

(3) 若 $a_1 < a_2$

使用反證法，假設存在一種念書過程，滿足 $\{\frac{b_1}{a_1}\}$ ，但不滿足 $\{\frac{b_2}{a_2}\}$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{a_2} \geq a_2 \times \frac{b_1}{a_1} \dots \textcircled{1}$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{a_2} < b_2 \dots \textcircled{2}$$

即 $b_2 > a_2 \times \frac{b_1}{a_1} \Rightarrow \frac{b_2}{a_2} > \frac{b_1}{a_1}$ 與題意矛盾！

因此若 $a_1 < a_2$ ，滿足 $\{\frac{b_1}{a_1}\}$ 者，必滿足 $\{\frac{b_2}{a_2}\}$

綜合(1)、(2)、(3)之說明，得證。

2. 在 $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ 的條件下， $a_1 - b_1 > a_2 - b_2$ ，

例 1 : $\{\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\}$

(1). $\{\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\}_5$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOX	3	0	5
最少	XOXOO	3		

(2). $\{\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\}_6$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOX O	4	1	5
最少	XOXOO X	3		

(3). $\{\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\}_7$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOX OO	5	1	5
最少	XOXOO XO	4		

(4). $\{\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\}_8$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOX OOX	5	1	5
最少	XOXOO XOX	4		

$$(5). \left\{ \frac{3}{5}, \frac{1}{2} \right\}_9$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOX OOXO	6	1	5
最少	XOXOO XOXO	5		

$$(6). \left\{ \frac{3}{5}, \frac{1}{2} \right\}_{10}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOX OOXOX	6	0	5
最少	XOXOO XOXOO	6		

$$\text{例 2 : } \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$(1). \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \right\}_5$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXX	2	0	5
最少	XXOXO	2		

$$(2). \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \right\}_6$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXX O	3	1	5
最少	XXOXO X	2		

$$(3). \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \right\}_7$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXX OX	3	1	5
最少	XXOXO XX	2		

$$(4). \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \right\}_8$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXX OXO	4	1	5
最少	XXOXO XXO	3		

$$(5). \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \right\}_9$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXX OXOX	4	1	5
最少	XXOXO XXOX	3		

$$(6). \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{3} \right\}_{10}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OXOXX OXOXX	4	0	5
最少	XXOXO XXOXO	4		

$$\text{例 3 : } \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}$$

$$(1). \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}_8$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOOXOX	5	0	8
最少	XOXOOXOO	5		

$$(2). \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}_9$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOOXOX O	6	1	8
最少	XOXOOXOO X	5		

$$(3). \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}_{10}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOOXOX OO	7	1	8
最少	XOXOOXOO XO	6		

$$(4). \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}_{11}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	OOXOOXOX OOX	7	1	8
最少	XOXOOXOO XOX	6		

$$(5). \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}_{12}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	00X00X0X 00X0	8	1	8
最少	X0X00X00 X0X0	7		

$$(6). \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}_{13}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	00X00X0X 00X00	9	1	8
最少	X0X00X00 X0X00	8		

$$(7). \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}_{14}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	00X00X0X 00X00X	9	1	8
最少	X0X00X00 X0X00X	8		

$$(8). \left\{ \frac{5}{8}, \frac{3}{5} \right\}_{15}$$

	過程	念書天數	相差天數	循環單位天數
最多	00X00X0X 00X00X0	10	1	8
最少	X0X00X00 X0X00X0	9		

研究二-(二).2 討論：在 $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ 的條件下， $a_1 - b_1 > a_2 - b_2$

在這種類型的討論中，我們發現此過程較其他都複雜，主要是因為 $\frac{b_1}{a_1}$ 的比例較大，條件相對嚴格；但可連續休息天數較多，條件卻相對寬鬆，因此循環單位必須同時衡量兩個條件沒有前面幾種來的單純。

我們有以下幾個發現：

(1). a_1 必大於 a_2 。

$$\text{【證明】 由 } \frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow 1 - \frac{b_1}{a_1} < 1 - \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{a_1} < \frac{a_2 - b_2}{a_2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} < \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1} < 1$$

故 $\frac{a_2}{a_1} < 1$ ，因此 $a_1 > a_2$ 。

(2). 必存在長度為 a_1 的循環單位。

【方法】①若 $b_1 \geq (nb_2 + \min\{b_2, r\})$ ，如例 1、例 2

則依照 $\left\{\frac{b_2}{a_2}\right\}$ 的限制，以最勤勞的方式執行 a_1 日，即 $\left\{\frac{b_2}{a_2}\right\}_{a_1}$

(執行 n 組 a_2 ，剩下 r 日，其中 $r = a_1 - na_2 < a_2$)

此時在 a_1 日內，已安排了 $nb_2 + \min\{b_2, r\}$ 個念書日

我們從最前面起，依序將 $b_1 - (nb_2 + \min\{b_2, r\})$ 個休息日置換為工作日

如此一來，在 a_1 日中，恰有 b_1 個念書日；而在其中每 a_2 日中，必至少有 b_2 個念書日。

我們在循環中挑選連續念書天數最長為開端，且長度為 a_1 者，為最勤勞的念書方法；而在循環中挑選連續休息天數最長為開端，且長度為 a_1 者，為最偷懶的念書方法。

②若 $b_1 < (nb_2 + \min\{b_2, r\})$ ，如例 3

依照 $\left\{\frac{b_2}{a_2}\right\}$ 的限制，按比例執行 a_1 日。

(執行 n 組 a_2 ，剩下 r 日，其 $r = a_1 - na_2 < a_2$)

此時在 a_1 日內，已安排了 $nb_2 + \left[r \times \frac{b_2}{a_2}\right]$ 個念書日。

同理，我們在循環中挑選連續念書天數最長為開端，且長度為 a_1 者，為最勤勞的念書方法；而在循環中挑選連續休息天數最長為開端，且長度為 a_1 者，為最偷懶的念書方法。

四、研究三

探討在 x 天的假期中，同時滿足條件 A：每 a_1 天中要念 b_1 天書、條件 B：每 a_2 天中要念 b_2 天書、與條件 C：每 a_3 天中要念 b_3 天書，在滿足此三條件的最低程度下，最勤勞與最懶惰者之最多差異天數。

不失一般性，我們將狀況分為三種狀況來討論：

(一). $\left(\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, a_2 > a_1\right) \cdot \frac{b_3}{a_3}$

(二). $\left(\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}, a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2\right) \cdot \frac{b_3}{a_3}$

(三). $\left(\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}, a_1 - b_1 > a_2 - b_2\right) \cdot \frac{b_3}{a_3}$

(一). $\left(\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, a_2 > a_1\right), \frac{b_3}{a_3}$

$\left(\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, a_2 > a_1\right)$ 在研究 2 中我們推導出比例相同的狀況下，過程與兩個分數的最大公切單位 $\frac{b_\alpha}{a_\alpha} = \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right)$ 相同，故結果將與一個限制條件下之 $\left\{\frac{b_\alpha}{a_\alpha}\right\}_x$ 等價。

，所以我們可以將 $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}\right)$ 換成 $\left\{\frac{b_\alpha}{a_\alpha}, \frac{b_3}{a_3}\right\}$ ，而進入研究 2 討論。

(二). $\left(\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}, a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2\right), \frac{b_3}{a_3}$

在兩個限制條件比例不同的狀況下，所有滿足比例較大的 $\left\{\frac{b_1}{a_1}\right\}$ 過程，也會滿足 $\left\{\frac{b_2}{a_2}\right\}$ ，過程與兩個限制中比例較大的 $\left\{\frac{b_1}{a_1}\right\}$ 相同。結果將與一個限制條件下之 $\left\{\frac{b_1}{a_1}\right\}$ 等價。

，所以我們可以將 $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}\right)$ 換成 $\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_3}{a_3}\right\}$ ，而進入研究 2 討論。

(三). $\left(\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}, a_1 - b_1 > a_2 - b_2\right), \frac{b_3}{a_3}$

在這樣的狀況下，我們在又細分為(三)-1. $b_1 \geq (nb_2 + \min\{b_2, r\})$ 、(三)-2. $b_1 < (nb_2 + \min\{b_2, r\})$ 這兩種來討論，在這兩種狀況中，我們還無法用數學式來表示在幾天的假期中能有最大的差異，但我們找到了如何找到最小循環單位的方式。

若 $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}$ 屬於這類，建議先比較 $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_3}{a_3}$ 、或 $\frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}$ 是否符合前兩類能化簡的類型。

若兩兩均屬於此類，即 $\left(\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2} > \frac{b_3}{a_3}, a_1 - b_1 > a_2 - b_2 > a_3 - b_3\right)$ ，我們以下面的例子作為操作參考：

例： $\left\{\frac{7}{11}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}\right\}_x$

從比例較小的兩者 $\frac{5}{8}, \frac{3}{5}$ 先比較，因 $5 < 3 \times 1 + 3$ ，屬於(三)-2. 的形式

因此依比例建構 $\left\{\frac{3}{5}\right\}_8$: OXOXOOXO

接著再依此建構比例最大的 $\frac{7}{11}$: OXOXOOXO OXO

所以 $\left\{\frac{7}{11}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}\right\}_x = \text{OXOXOOXOOXO OXOXOOXOOXO OXOXOOXOOXO} \dots$

故最勤勞的念書方式取 $d_5 \sim d_{15}$: OOXOOXOOXOX

最懶惰的念書方式取 $d_2 \sim d_{12}$: XOXOOXOOXOO

五、研究四

探討在 x 天的假期中，同時滿足每 a_1 天中要念 b_1 天書、每 a_2 天中要念 b_2 天書、 \dots 、每 a_n 天中要念 b_n 天書，在滿足此 n 條件的最低程度下，最勤勞與最懶惰者之最多差異天數。

根據研究一～研究三的研究成果，我們可以將限制條件延伸至 n 個條件。

所有的狀況都能夠簡化成 $\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k}\right\}_x$

其中 $\left(\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2} > \dots > \frac{b_k}{a_k}, a_1 - b_1 > a_2 - b_2 > \dots > a_k - b_k\right)$

在這種狀況中我們從比例較小的限制逐步向比例大的限制建構，依據研究二的研究結論，

$\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k}\right\}_x$ 之最小循環單位天數為 a_1 天。

伍、結論

一、由研究一我們在 $\left\{\frac{b}{a}\right\}_x$ 獲得的結論如下：

(一). $\left\{\frac{b}{a}\right\}_x$ 有循環性，且最小的循環單位為 a 。

(二). 在假期天數 $x = an + c$ ， $\min(b, a - b) \leq c \leq \max(b, a - b)$ 時，能找到最多差異天數為 $\min(b, a - b)$ 。

(三). 最勤勞的念書方式為先念 b 天，再休息 $a - b$ 天；最懶惰的念書方式為休息 $a - b$ 天，再念 b 天。

(四). 當 x 越大，兩者相差比例越小。因此在滿足老師要求的條件下，越長的假期差異越小。

二、基於研究一的結論，我們在 $\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right\}_x$ 獲得的結論如下：

(一). 若 $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ ，與兩個分數的最大公切單位 $\frac{b_\alpha}{a_\alpha} = \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}\right)$ 相同。故結果將與一個限制條件下之 $\left\{\frac{b_\alpha}{a_\alpha}\right\}_x$ 等價。

(二). 若 $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ ，且 $a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2$

在兩個限制條件比例不同的狀況下，所有滿足比例較大的 $\left\{\frac{b_1}{a_1}\right\}$ 過程，也會滿足 $\left\{\frac{b_2}{a_2}\right\}$ ，

過程與兩個限制中比例較大的 $\left\{\frac{b_1}{a_1}\right\}$ 相同。結果將與一個限制條件下之 $\left\{\frac{b_1}{a_1}\right\}$ 等價。

(三). 若 $\frac{b_1}{a_1} > \frac{b_2}{a_2}$ ，且 $a_1 - b_1 > a_2 - b_2$

- (1) a_1 必大於 a_2
- (2) 循環單位長度為 a_1 。
- (3) 建構方式：

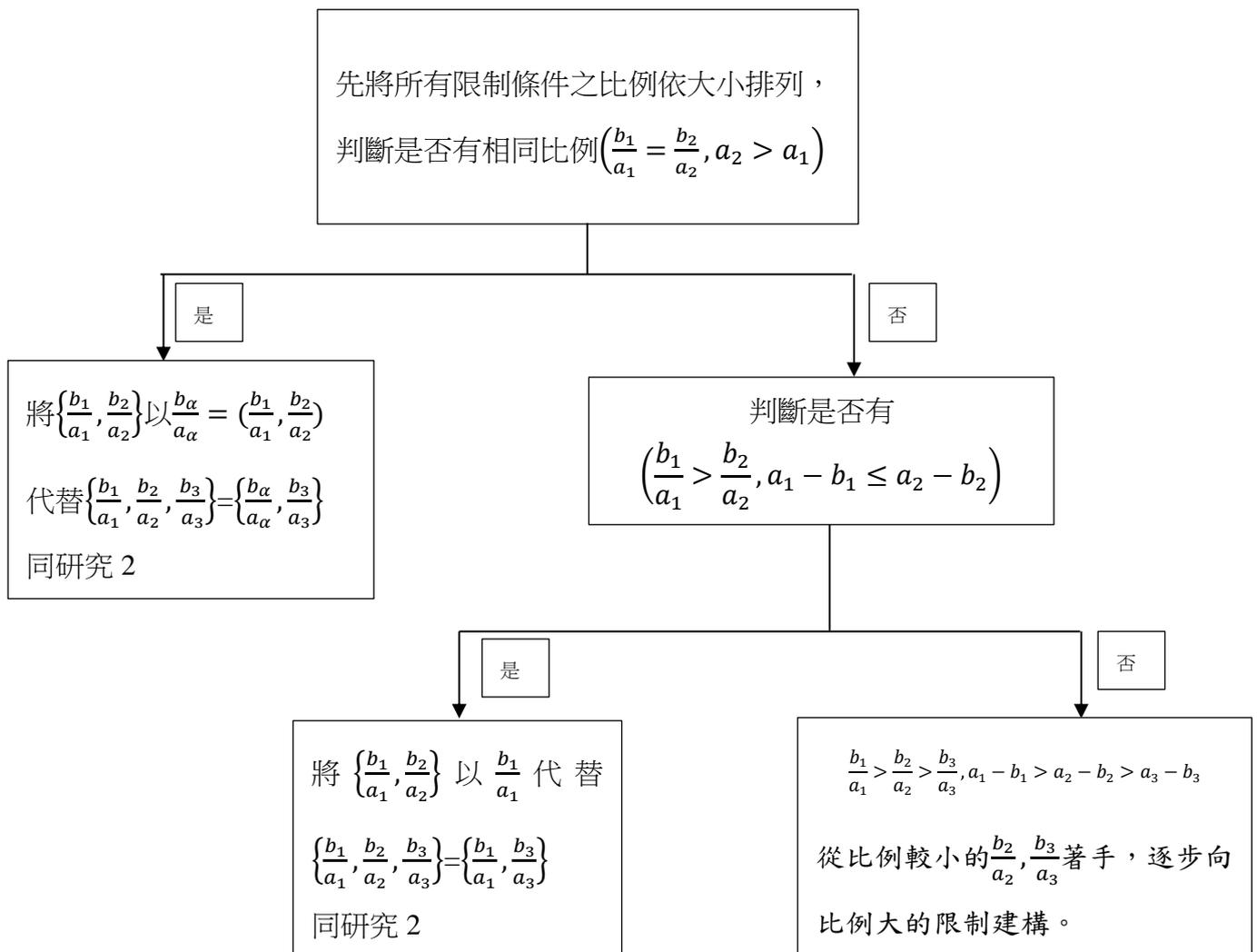
若 $b_1 \geq (nb_2 + \min\{b_2, r\})$ ，則依最勤勞的念書方式寫出 $\left\{\frac{b_2}{a_2}\right\}_{a_1}$ ，再將

$b_1 - (nb_2 + \min\{b_2, r\})$ 個休息日置換為工作日。在循環中挑選連續念書天數最長為開端，且長度為 a_1 者，為最勤勞的念書方法；而在循環中挑選連續休息天數最長為開端，且長度為 a_1 者，為最偷懶的念書方法。

若 $b_1 < (nb_2 + \min\{b_2, r\})$ ，則按比例寫出 $\left\{\frac{b_2}{a_2}\right\}_{a_1}$ ，在循環中挑選連續念書天數

最長為開端，且長度為 a_1 者，為最勤勞的念書方法；而在循環中挑選連續休息天數最長為開端，且長度為 a_1 者，為最偷懶的念書方法。

基於研究一、二的結論，多限制的構造流程如下：



陸、未來展望

在這次的研究中，沒想到從一個看似簡單的小問題，再增加限制條件後，可以成為如此有趣的題目，而有這麼多的變化性。我們從念書天數比例、可連續休息天數進行分析，逐步的從已研究的基礎解決多限制的問題。但仍然有可以再研究之處，包含研究中第 3 部分的一般化，是我們正在努力的目標。

由於在生活中不一定只有工作、休息兩個選項，期望在更進一步的研究中，能夠往多元素、多限制條件的方向進行研究，能有機會將其結果於生活中獲得實際的應用。

柒、參考資料

- 一、游森棚(2015)：森棚教官的數學題 周休二日。科學研習月刊，54(3)，48。
- 二、國中數學課本第四冊第一章：數列與級數；第一冊第二章：分數的運算。南一書局。