嘉義市第37屆中小學科學展覽會
作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：是整數嗎？似「費」數！

關鍵詞：數列、遞迴、費氏數列

編號：

摘要

取自游森棚教官的數學題，是整數嗎？他給了我們一串式子 $a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+3)$，他向我們詢問了一個問題，有一個$\frac{1}{a_{n-3}}$你怎麼知道他相除之後的永遠是整數，在這篇報告中，我們詳細的敘述了它產生的規律，以及在什麼情況下出來的永遠也會是整數。

壹、研究動機

在當今有許多的人都對數列這一區塊感興趣，而我在一本書中偶然發現了一個數列$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+3)$且$a_1=1$、$a_2=1$、$a_3=2$，依這個數列規則產生的數都會是整數，在我的好奇心驅使之下，我便決心要將它的規律尋找出來，並以此做為科展的主題。

貳、研究目的

一、找出「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列的規律。

二、尋找「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列的一般式。

三、尋找「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列和費氏數列的關係。

四、「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列的幾何表現。

五、「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$問題的推廣。

參、研究設備及器材

鉛筆、計算機、紙、Geogebra 繪圖軟體。

肆、研究過程

一、尋找「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列的規律

首先，我先將數列的前二十項寫了出來，如下表:

a_1=1	a_6=34	a_{11}=4148	a_{16}=514229
a_2=1	a_7=89	a_{12}=10946	a_{17}=1346269
a_3=2	a_8=233	a_{13}=28657	a_{18}=3524578
a_4=5	a_9=610	a_{14}=75025	a_{19}=9227465
a_5=13	a_{10}=1597	a_{15}=196418	a_{20}=241157817 …………………

之後我觀察前三項發現產生的規律可以將其改為 $3a_2$-a_1=a_3，接下來我試著推廣到下一項去，我發現下一項的產生方式可以從原本的方程式，也就是 a_n=$\frac{1}{a_{n-3}}$($a_{n-1}a_{n-2}$+3) 變形為 $3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}，

$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}是怎麼來的呢?我們將a_1=1、a_2=1、a_3=2、a_4=5、a_5=13 排成一列，結果可以發現

1　1　2　5　13
0　1　3　8
1　2　5

在第三排的時候，第三排的數列，跟第一排的一樣，之後將第二排設為<b_m>之後利用這三排，我們可以將a_n=$\frac{1}{a_{n-3}}$($a_{n-1}a_{n-2}$+3) 變形為 $3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

我發現後我嘗試用遞迴數列將它的一般項找出，我將

$$3a_2\text{-}a_1=a_3$$
$$3a_3\text{-}a_2=a_4$$
$$3a_4\text{-}a_3=a_5$$
$$3a_5\text{-}a_4=a_6$$
$$3a_6\text{-}a_5=a_7$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$3a_{n+1}\text{-}a_n=a_{n+2}$$

排成一行，並將它們相加起來但只會得到一個等式，並不會得到 $a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+3)$的一般式，我把它的每一項都變成某數乘某數，

例如: a_n

n=1 是 1×1

n=2 也是 1×1

n=3 是 2×1

n=4 是 5×1=1×2+3

n=5 是 13×1=2×5+3

n=6 是 34×2=5×13+3

n=7 是 89×5=13×34+3

n=8 是 233×13=34×89+3

n=9 是 610×34=89×233+3

n=10 是 1597×89=233×610+3…………

之後也是相加起來，

但結果會發現跟上一次的結果一樣會消不掉，之後我把所有的項數都代換a_1和a_2試著從中找尋規律看看，看下一項的a_1和a_2有沒有成比例關係，但我最多只有找到將a_1和a_2相加起來，之後在由後一項處以前一項的值會接近 2.6。

但後面為無限不循環小數，無法得到一個整數。在前幾項或許還能看到整數，但其項數越大，又會發現後面完全是無限小數，但整數和小數點後一位永遠是 2.6。

二、尋找「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列的一般式

有了以上的結果之後，我更具信心和興趣，所以繼續研究下去，看到了一本書，名字為「遞迴數列與不動點」，這本書主要敘述與遞迴數列相關的解題方法、題目和解釋方法，利用書上的方法，(詳見附錄)

導出了「是整數嗎」這個數列的一般項:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-3}\right\}$$

之後將數字代進去驗證看看，確定前幾項無誤，這個就是$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+3)$的一般項。

剛看到這個數列的時候，覺得很神奇! 「是整數嗎」數列是整數，但是它的一般式，竟然還有無理數$\sqrt{5}$的形式，更是令我驚訝不已!

三、尋找「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列和費氏數列的關係

在偶然之間，八年級的課程中，老師介紹有關費氏數列的遞迴式和一般式，

當我看到費氏數列的一般式為

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

心中十分的震驚，這不是和森棚教官的題目「是整數嗎」的一般式相似嗎?只是指數的部分，有些差異。

帶著驚喜的心情，仔細驗證，發現「是整數嗎」$\langle a_n\rangle$數列，竟然是費氏數列的奇數項數列，因此黃金比例的平方為$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\doteq 2.6$，就解答了我心中長久的疑惑。

當我改變此遞迴數列$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}的起始條件，$a_1=1$與$a_2=3$，我們可以得到費氏數列的偶數項，這與盧卡斯數列的性質三相同。

於是趕緊繼續進行文獻探討，在過程中，我尋找到許多有關費氏數列$\langle f_n\rangle$ 以及盧卡斯數列$\langle l_n\rangle$ 的性質:

費氏數列定義和性質:

(一)、 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ （$n\geq 2$） ， $f_1=1$ ， $f_2=1$

(二)、 $f_1+f_3+f_5+\ldots.+f_{2n-1}=f_{2n}$

(三)、 $f_n{}^2+f_{n-1}{}^2=f_{2n-1}$

(四)、 $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

盧卡斯數列定義和性質

(一)、 $l_n = l_{n-1} + l_{n-2} \quad (n \ge 2)$，$l_1 = 1$，$l_2 = 3$

(二)、 $l_n = f_{n-1} + f_{n+1}$

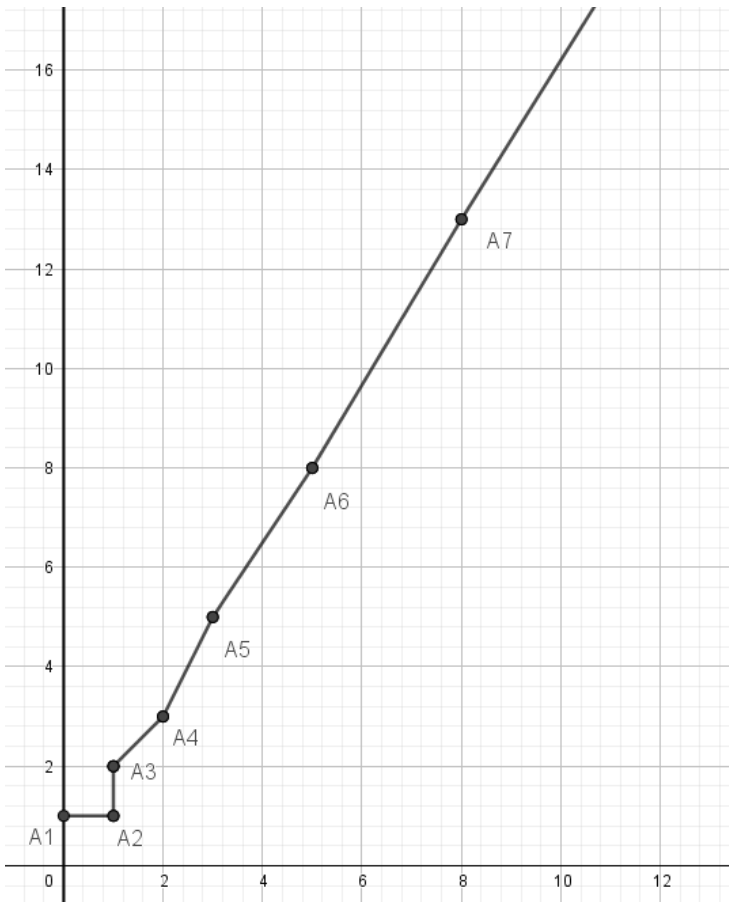
(三)、 $f_{2n} = l_n \times f_n$

(四)、 $l_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

四、「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列幾何上的表現

有了以上的性質，嘗試在 Geogebra 繪圖軟體上，呈現出「是整數嗎」數列$\langle a_n \rangle$，這個數列是費氏數列的奇數項，所以嘗試以費氏數列為基礎，先定義出

$A_1(x_1, y_1) = (0, f_1)$，$A_2(x_2, y_2) = (f_1, f_2)$，$A_n(x_n, y_n) = (f_{n-1}, f_n)$

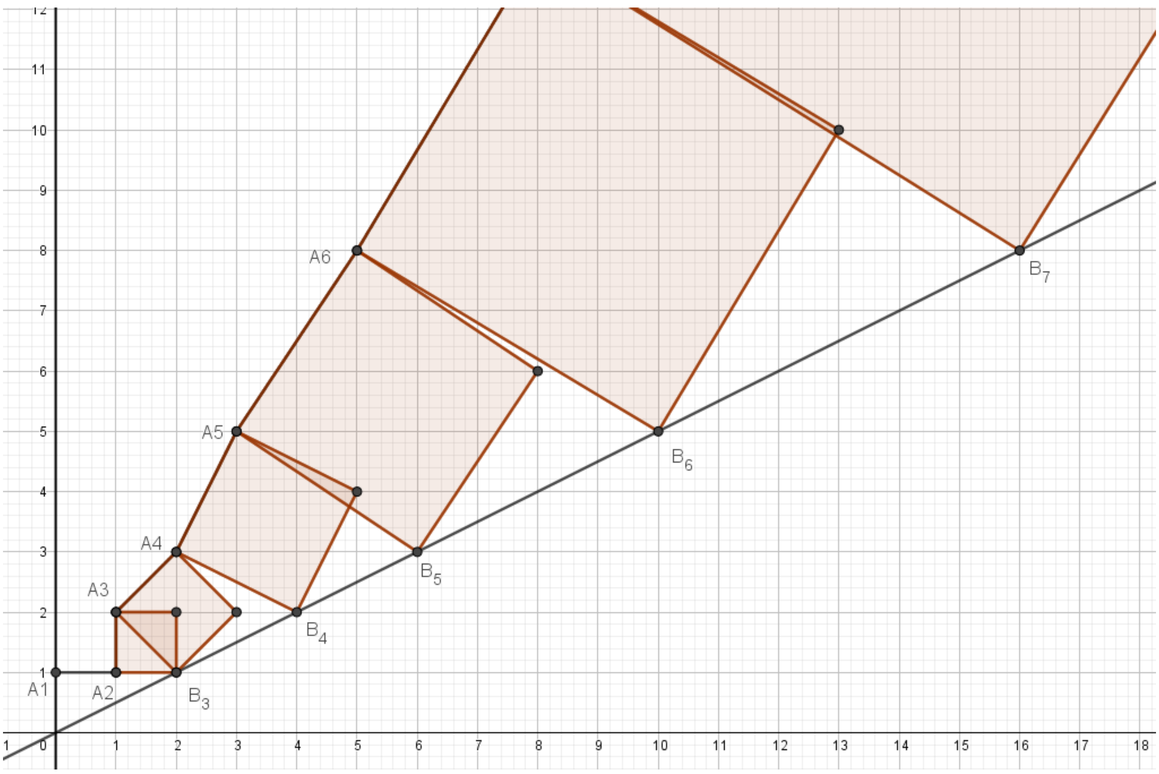


利用商高定理和費氏數列的性質，我們以$\overline{A_iA_{i+1}}$為邊長，對外畫出正方形。

因$\overline{A_iA_{i+1}}$線段的 X 軸方向距離為$|x_{i+1}-x_i| \; =|f_n - f_{n-1}|= f_{n-2}$

因$\overline{A_iA_{i+1}}$線段的 Y 軸方向距離為$|y_{i+1}-y_i| \; =|f_{n+1}- f_n|= f_{n-1}$

又 $f_{n-1}^2 + f_{n-2}^2 = f_{2n-3}$ ，如此我們做出的正方形面積，即是費氏數列的奇數項，也就是「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列的幾何表現。



在上圖中，發現正方形的頂點B_3、B_4、B_5⋯點都在直線上，

因B_n的座標和A_n有關，

因$\overline{A_iA_{i+1}}$線段的 X 軸方向距離為$|x_{i+1}-x_i| \; =|f_n - f_{n-1}|= f_{n-2}$

因$\overline{A_iA_{i+1}}$線段的 Y 軸方向距離為$|y_{i+1}-y_i| \; =|f_{n+1}- f_n|= f_{n-1}$ ，

可利用三角形全等和遞迴式得到

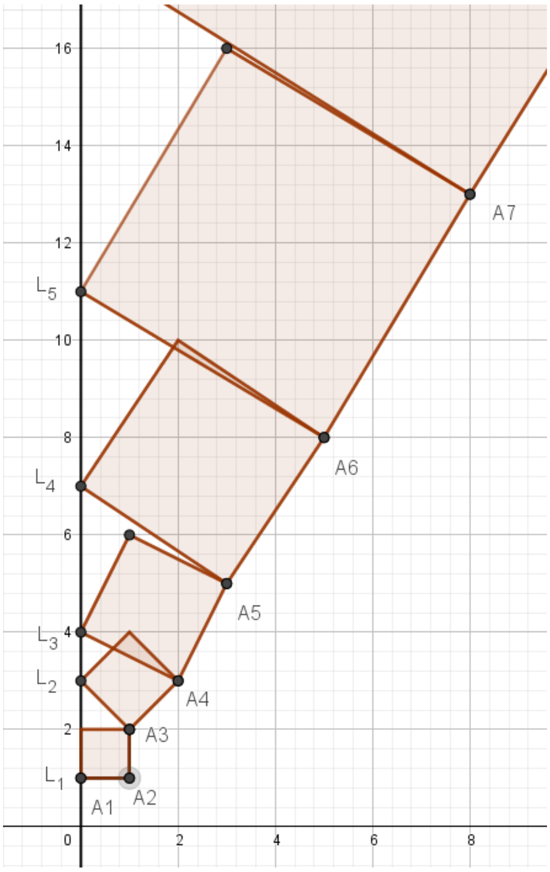
B_n 的 X 座標為= A_n 的 X 座標+ $\overline{A_iA_{i+1}}$ 線段的 Y 軸方向距離

$= f_{n-1} + f_{n-1} = 2f_{n-1}$

B_n 的 Y 座標為= A_n 的 Y 座標- $\overline{A_iA_{i+1}}$ 線段的 X 軸方向距離

$= f_n - f_{n-2} = f_{n-1}$

故 B_n 的座標為 $(2f_{n-1}, f_{n-1})$，所以 B_n 落在直線方程式 $y = \frac{1}{2}x$ 上



在上圖中，發現正方形的頂點 L_1 、 L_2 、 L_3 …點都在 Y 軸上，

因 L_n 的座標和 A_n 有關，

因 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 線段的 X 軸方向距離為 $|x_{i+1} - x_i| = |f_n - f_{n-1}| = f_{n-2}$

因 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 線段的 Y 軸方向距離為 $|y_{i+1} - y_i| = |f_{n+1} - f_n| = f_{n-1}$ ，

可利用三角形全等和遞迴式得到

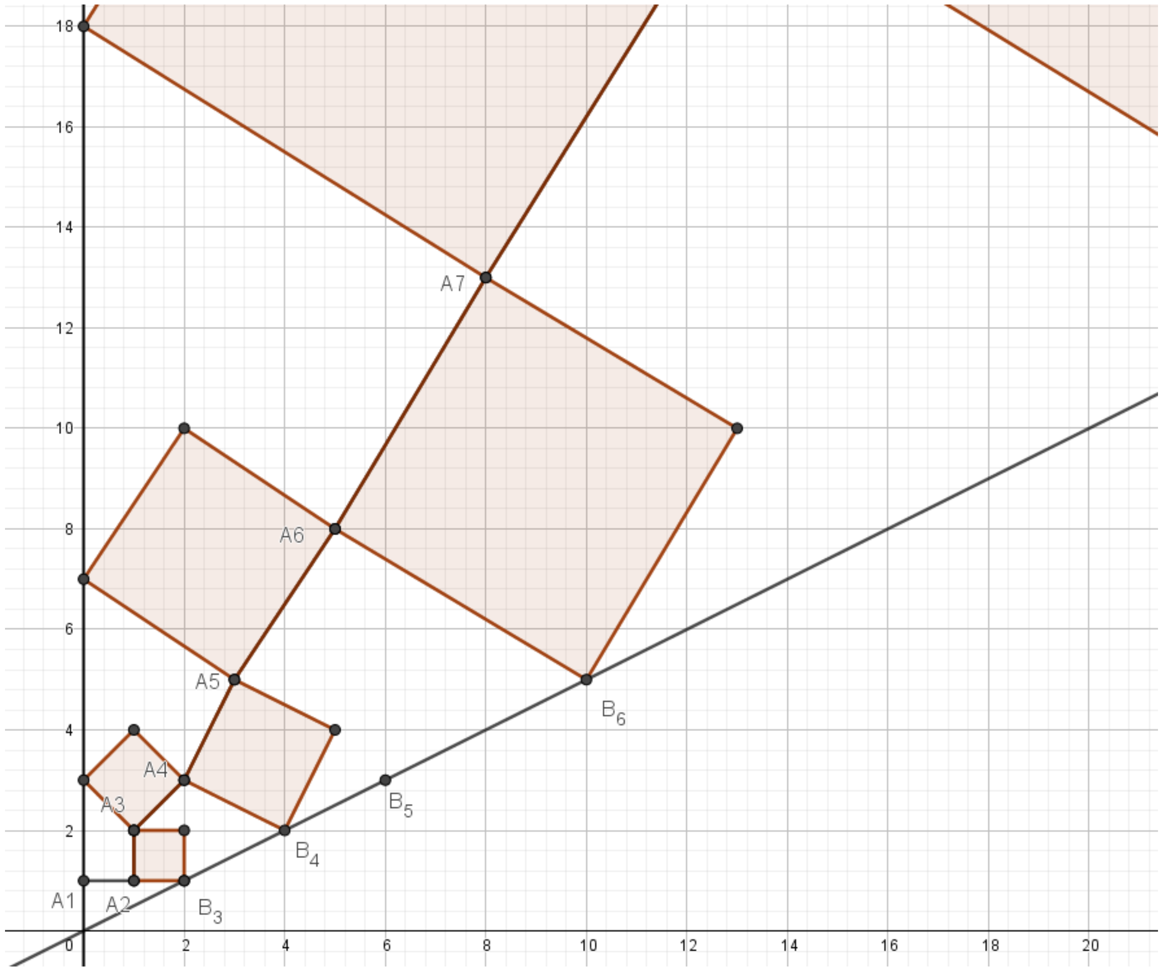
L_{n-1} 的 X 座標為= A_n 的 X 座標- $\overline{A_iA_{i+1}}$ 線段的 Y 軸方向距離

$= f_{n-1} - f_{n-1} = 0$

L_{n-1}的 Y 座標為$= A_n$的 Y 座標$+\overline{A_iA_{i+1}}$線段的 X 軸方向距離

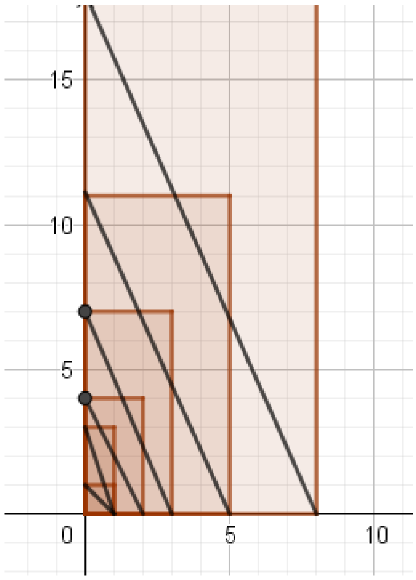
$= f_n + f_{n-2} = L_{n-1}$

故L_{n-1}的座標為$(0,\ f_n + f_{n-2})=(0, l_{n-1})$，所以$L_{n-1}$落在直線方程式$x=0$上，且$L_{n-1}$為盧卡斯數列。



我們把上面的二個圖結合，做出另外的幾何表現，我們可以發現正方形面積是「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列，正方形的頂點落在$y=\frac{1}{2}x$，$x=0$線上。

費氏偶數項的數一樣可以用$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}，只需改變起始值，a_1=1，a_2=3，它的幾何表現如下



我們在 Y 軸上是盧卡斯數列，X 軸上取費氏數列，從圖中可以看到，與奇數項不同，偶數項是以矩形表示，而圖中的矩形是利用 $f_{2n}=l_n \times f_n$ 這個性質，所製造出來的

五.問題的推廣

接下來，將常數項作替換，找尋是否有其它數字將其代換，依然會是整數，首先，我把$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+3)$的 3 替換成它的次方數，也就是 9、27、81，243 等等這些數，我先將 3 代換成 9 發現:

a_1=1	a_6=175
a_2=1	a_7=494
a_3=2	a_8=2789
a_4=11	a_9=7873
a_5=31	a_{10}=44449

產生規律為

⇒奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$6a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

將 3 代換成 27 則會得到

a_1=1	a_6=85
a_2=1	a_7=3653
a_3=2	a_8=53549
a_4=29	a_9=156994
a_5=85	a_{10}=2301361

產生規律為

⇒奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$15a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

將 3 代換成 81 則會得到

a_1=1	a_6=10291
a_2=1	a_7=30626

a_3=2	
a_4=83	
a_5=247	

產生規律為

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項42a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

我將 3 的次方數代換偶數項係數排成一列發現

a_1=3　　a_2=6　　a_3=15　　a_4=42

增加的公差為3^{n-1}，這裡的 n 指的是它的次方，我推測下一項為 123，我將 3 的 5 次方代入發現

a_1=1	a_4=245
a_2=1	a_5=733
a_3=2	a_6=8914

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項123a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

這代表我的推論沒有錯，之後我又將質數代入試試看我發現

代換成 5 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=7，a_5=19

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項4a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 7 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=9，a_5=25

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項5a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 11 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=13，a_5=37

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項7a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 13 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=15，a_5=43

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項8a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 17 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=19，a_5=55

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項10a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 19 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=21，a_5=61

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項11a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 23 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=25，a_5=73

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項13a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 29 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=31，a_5=91

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項16a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 31 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=33，a_5=97

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項17a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 37 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=39，a_5=115

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項20a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 41 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=43，a_5=127

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項22a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

代換成 43 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=45，a_5=133

⇒奇數項3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}

偶數項$23a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

代換成 47 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=49，a_5=145

⇒奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$25a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

代換成 53 時a_1=1，a_2=1，a_3=2，a_4=55，a_5=163

⇒奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$28a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

由上面的數列，可得知所有奇數項的產生方式都不改變但偶數項會改變，之後我將所有偶數項的係數排列出來

3 4 5 7 8 10 11 13 16 17 20 22 23 25 28 31 32 35

我認為缺少的係數應該也會是某個數算出來的因此，我利用a_n=$\frac{1}{a_{n-3}}$($a_{n-1}a_{n-2}$+(2k+1))，

去推算出 2k+1 方法如下

因為知道奇數項都不改變因此可得出

⇒奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項ma_{n+1}-a_n=a_{n+2}

m 為缺少的係數

將 m=6 代入可得

⇒奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$6a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

接著因為前 3 項為 1 ,1, 2 而又因奇數項產生方式相同因此

⇒ $3a_2$-a_1=a_3

$6a_3$-a_2=a_4 又因為a_4又可以等於

a_4=$\frac{1}{a_1}$(a_3a_2+n)因a_1=1，a_2=1，a_3=2 代入

可得到a_4=2+2k+1

而a_4又等於 11，因此 k=4

接著每一個缺少的係數都可以利用這個方法算出來

奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$9a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

其常數項為 2k+1=15⇒k=7

奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$12a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

其常數項為 2k+1=21⇒k=10

奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$14a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

其常數項為 2k+1=25⇒k12

奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$18a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

其常數項為 2k+1=33⇒k=16

奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$19a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

其常數項為 2k+1=35⇒k=17

觀察上面可得到所有的常數項都是奇數，而且偶數項係數都產生方式，都是常數項加 3 除以 2 也就是

如果將 2k+1 設為常數項那麼產生方式為

⇒$\frac{2k+1+3}{2}$可以將之前的奇數項和偶數項改寫為

⇒奇數項$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

偶數項$(\mathrm{k}+2)a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

從這個公式可看出所有的奇數代進去都是整數，因奇數加奇數會是一個偶數，而偶數一定會是 2 的倍數，因此所有的奇數代入，出來的數一定會是整數，反過來說如果是偶數代進去一定不會是整數，為什麼呢?因為偶數加奇數出來的

一定是奇數，而奇數無法被 2 給整除所以出來的一定不是整數。

將上述的討論改寫為$a_{2l+1}=3a_{2l}-a_{2l-1}$與$a_{2l+2}=(k+2)a_{2l+1}-a_{2l}$，其中$l$是任意正整數。利用遞迴關係可以將上述兩式寫為$a_{2l+2}=(3k+4)a_{2l}-a_{2l-2}$與$a_{2l+1}=(3k+4)a_{2l-1}-a_{2l-3}$，經由計算可以得到

當$n=2l-1$時$(l\geq 1)$

$$a_n=\frac{a_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2-a_3}{(-1)\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}+\frac{a_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2-a_3}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}$$

當$n=2l$時

$$a_n=\frac{a_2\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2-a_4}{(-1)\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}+\frac{a_2\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2-a_4}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}$$

其中$A=3k+2$，$B=3k+6$

這樣我得到了$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+(2k+1))$的一般式。

伍、結論

一、我們發現「是整數嗎」$\langle a_n\rangle$數列$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+3)$會都是整數，因為它產生規律可以改寫為$3a_{n+1}-a_n=a_{n+2}$，而所有的項都可以表示為$a_1$、$a_2$的線性組合，因此永遠都會是整數。

二、計算出「是整數嗎」$\langle a_n\rangle$數列的一般式

三、「是整數嗎」$\langle a_n \rangle$數列，在幾何上的表現。

四、問題的推廣:將遞迴數列$3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}，取a_1=1、a_2=1，當 n=0 時，則$a_0 = 2$；當 n=-1 時，則$a_{-1} = 5$，如此下去，這個數列變為

$$\cdots，5，2，1，1，2，5，13，\cdots$$

與盧卡斯數列有類似之處，或許可以有類似的性質。

陸、參考文獻

1.游森棚(2018)。**是整數嗎**。科學研習月刊，第 57 卷第 04 期，52。

2.張堯、冷崗松、沈文選、唐立華(2005)。數列項的求值與通項公式的求解。奧林匹克數學中的代數問題。第 94-95 頁。

3.徐瀝泉、王繼岳、陳漢冶。遞迴數列與不動點。引自:

https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d281/28109.pdf

柒、附錄:

接著我又看到另一本簡易遞迴數列的解法，我將它摘要如下:

$a_{n+1}=c_1a_n+c_2a_{n-1}$ (二階線性齊次遞迴數列)

遞迴關係式：$a_{n+1} = c_1a_n + c_2a_{n-1}$.......(*)，$n\geq 2$，其中 $c_2\neq 0$，一般項 a_n 的求法。

假設透過裂項的方法可將遞推式變形成為

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

的形式，那麼，$(a_{n+1}-\alpha a_n)$ 就成為以 $a_2-\alpha a_1$ 為首項，β 為公比的等比數列。

比較 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n = 0$ 與 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1} = 0$ 二式

得 $\alpha+\beta=c_1$，$\alpha\beta=-c_2$

即 α,β 為二次方程式 $x^2=c_1x+c_2$ 的二個根，而這個式子稱為原遞推式的特徵方程式，α,β 稱為特徵根。

解二次方程式(特徵方程式)：$x^2=c_1x+c_2$ 的兩根為 α、β。

(1)若 α、β 為兩相異實數，則可以找到 A，B 使得 $a_n = A\alpha^n + B\beta^n$。

(2)若 α、β 為兩相等實數，則可以找到 A，B 使得 $a_n = (A + nB)\alpha^n$。

【證明】(1) 若 α、β 為兩相異實數：

(*)可化成 $\Rightarrow a_{n+1}=(\alpha+\beta)a_n-\alpha\beta a_{n-1}$，$\because \alpha+\beta= c_1$，$\alpha\beta=-c_2$

從上式可得：

$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$..........①
$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})$..........②

由① 利用累乘的方法可得： $a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$ ....③

由② 利用累乘的方法可得： $a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)$.............④

④ $-$③ $\Rightarrow (\alpha-\beta)a_n = \alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1) - \beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1} + \frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n = A\alpha^n + B\beta^n \text{，} A = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta} \text{，} B = \frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\right) \text{。}$$

這裡的 A、B 為待定的常數與 a_1、a_0 有關。

反之，$a_n = A\alpha^n + B\beta^n$ 亦滿足(*)式，其中 A、B 為任意常數

直接計算 $a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=(A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1})-c_1(A\alpha^n+B\beta^n)-c_2(A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1})$

$$=A\alpha^{n-1}(\alpha^2-c_1\alpha-c_2)+B\beta^{n-1}(\beta^2-c_1\beta-c_2)=0$$

故得證。

(2)若α、β為兩相等實數

由① $a_{n+1}-\alpha a_n = \alpha(a_n-\alpha a_{n-1})$ 利用累乘的方法可得：

$$\alpha^{n-1}a_2-\alpha^n a_1 = \alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

而由

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1}-\alpha a_n &= \alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\\ \alpha a_n-\alpha^2 a_{n-1} &= \alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\\ \alpha^2 a_{n-1}-\alpha^3 a_{n-2} &= \alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\\ &\vdots\\ \alpha^{n-1}a_2-\alpha^n a_1 &= \alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1) \end{aligned}\right]\text{累加起來}$$

$\Rightarrow$得 $a_{n+1}-\alpha^n a_1 = n\cdot\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$.....⑤

由⑤ $a_{n+1}= \alpha^n a_1 + \left(\frac{a_2}{\alpha}-a_2\right)n\alpha^n = (A+nB)\alpha^n$。$A= a_1$，$B=\left(\frac{a_2}{\alpha}-a_2\right)$

反之，對於任意的實數 A,B，$a_n = (A+nB)\alpha^n$ 亦滿足(*)。

因為$\alpha=\beta$，$\alpha+\beta=c_1$，$\alpha\beta=-c_2 \Rightarrow c_1=2\alpha$，$c_2=-\alpha^2$

直接計算

$$a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=[A+(n+1)B]\alpha^{n+1}-c_1(A+nB)\alpha^n-c_2[A+(n-1)B]\alpha^{n-1}$$

$$=A(\alpha^{n+1}-c_1\alpha^n-c_2\alpha^{n-1})+Bn(\alpha^{n+1}-c_1\alpha^n-c_2\alpha^{n-1})+B(\alpha^{n+1}+c_2\alpha^{n-1})$$

$$=A\cdot 0+Bn\cdot 0+B\alpha^{n-1}(\alpha^2-\alpha^2)=0$$

故得證。

看到這篇文章後，我將我的數列的數值代進去得到

$\Rightarrow 3a_{n+1}$-a_n=a_{n+2}

一樣將它變形為

$\Rightarrow a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ 與

$a_{n+1}-c_1a_n-c_2a_{n-1}=0$

將兩式去做比較可得到

$\Rightarrow\alpha+\beta=3\ \alpha\beta=1$

解出α跟β可得到

$\Rightarrow\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ，$\beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

之後將它代回已經化簡後的這一式

$$a_n=\frac{(a_2-\beta a_1)}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}+\frac{-(a_2-\alpha a_1)}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$$

將α跟β、a_1和a_2代進去可得到

$$\Rightarrow a_n=\frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-3}\right\}$$

之後將數字代進去驗證看看，確定前幾項無誤，這個就是$a_n=\frac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+3)$的一般項。

給定$a_1=1$，$a_2=1$與$a_3=2$，則$a_n=\dfrac{1}{a_{n-3}}(a_{n-1}a_{n-2}+2k+1)$的一般項經觀察可以化簡為

$a_{2l+1}=3a_{2l}-a_{2l-1}$與$a_{2l+2}=(k+2)a_{2l+1}-a_{2l}$

$$\begin{aligned}a_{2l+2}&=(k+2)a_{2l+1}-a_{2l}\\&=(k+2)\{3a_{2l}-a_{2l-1}\}-a_{2l}=(3k+6)a_{2l}-(k+2)a_{2l-1}-a_{2l}\end{aligned}$$

又$(k+2)a_{2l-1}=a_{2l}+a_{2l-2}$

所以

$$a_{2l+2}=(3k+6)a_{2l}-a_{2l}-a_{2l-2}-a_{2l}=(3k+4)a_{2l}-a_{2l-2}$$

同理可得$a_{2l+1}=(3k+4)a_{2l-1}-a_{2l-3}$

令$x_l=a_{2l-1}\Rightarrow x_{l+1}=(3k+4)x_l-x_{l-1}$

令$y_l=a_{2l}\Rightarrow y_{l+1}=(3k+4)y_l-y_{l-1}$

其中$x_1=a_1=1$，$x_2=a_3=2$，$y_1=a_2=1$，$y_1=a_4=2k+3$

利用特徵值的概念，可以假設如下：

$$x_l=\alpha_1\left(\frac{3k+4+\sqrt{(3k+4)^2-4}}{2}\right)^l+\beta_1\left(\frac{3k+4-\sqrt{(3k+4)^2-4}}{2}\right)^l$$

$$y_l=\alpha_2\left(\frac{3k+4+\sqrt{(3k+4)^2-4}}{2}\right)^l+\beta_2\left(\frac{3k+4-\sqrt{(3k+4)^2-4}}{2}\right)^l$$

不妨令$A=3k+2$，$B=3k+6$，則$\dfrac{A+B}{2}=3k+4$。那麼上述二式可以改寫為

$$x_l=\alpha_1\left(\frac{A+B+2\sqrt{AB}}{4}\right)^l+\beta_1\left(\frac{A+B-2\sqrt{AB}}{4}\right)^l=\alpha_1\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}+\beta_1\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}$$

$$y_l=\alpha_2\left(\frac{A+B+2\sqrt{AB}}{4}\right)^l+\beta_2\left(\frac{A+B-2\sqrt{AB}}{4}\right)^l=\alpha_2\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}+\beta_2\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}$$

將$l=1$與$l=2$帶回上面二式得：

$$x_1=\alpha_1\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2+\beta_1\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2\cdots(1)$$

$$x_2=\alpha_1\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^4+\beta_1\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^4\cdots(2)$$

$$y_1=\alpha_2\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2+\beta_2\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2\cdots(3)$$

$$y_2=\alpha_2\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^4+\beta_2\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^4\cdots(4)$$

由(1)(2)可以解得$\alpha_1=\dfrac{x_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2-x_2}{(-1)\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2}$，$\beta_1=\dfrac{x_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2-x_2}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2}$

由(3)(4)可以解得$\alpha_2=\dfrac{y_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2-y_2}{(-1)\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2}$，$\beta_2=\dfrac{y_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2-y_2}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2}$

因此

$$x_l=\frac{x_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2-x_2}{(-1)\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}+\frac{x_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2-x_2}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}$$

$$y_l=\frac{y_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2-y_2}{(-1)\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}+\frac{y_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2-y_2}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}$$

故當$n=2l-1$時$(l\geq 1)$

$$a_n=\frac{a_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2-a_3}{(-1)\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}+\frac{a_1\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2-a_3}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}$$

當 $n=2l$ 時

$$a_n=\frac{a_2\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2-a_4}{(-1)\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}+\frac{a_2\cdot\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}\right)^2-a_4}{\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\cdot\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{2}\right)^{2l}$$

特別地取 $k=1$，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$ 與 $a_4=5$

則 $A=\sqrt{5}$，$B=\sqrt{9}$

所以

故當 $n=2l-1$ 時 $(l\geq 1)$

$$a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2l-2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2l-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4l-3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4l-3}\}$$

當 $n=2l$ 時

$$a_n=\frac{\sqrt{5}+1}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2l-2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2l-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4l-3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4l-3}\}$$

回到一開始的結論。