嘉義市第 36 屆中小學科學展覽會作品說明書

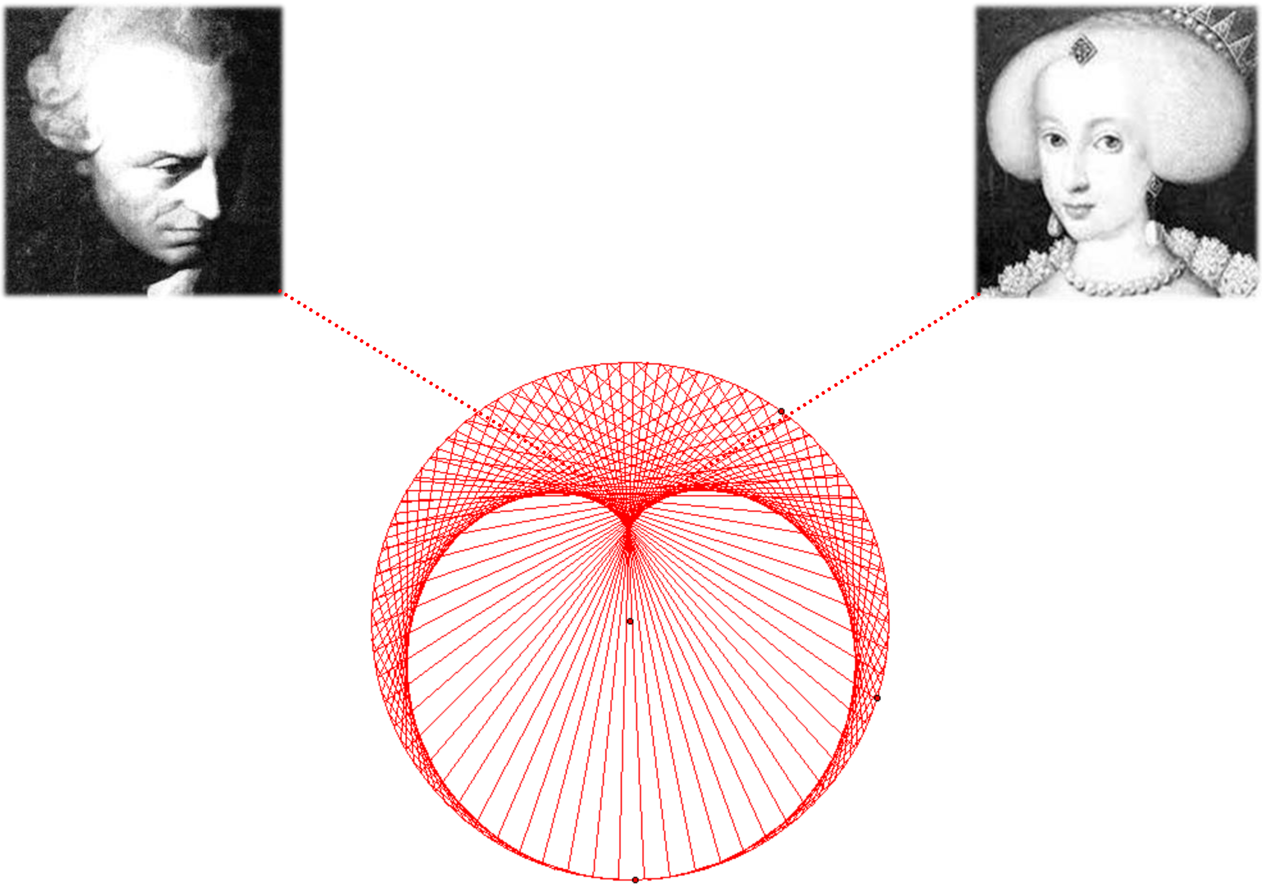
作品名稱：笛卡兒的愛情故事

科別：數學科

組別：國中組

關鍵詞：心臟線、尺規作圖、圓

編號：



中華民國一〇八年三月十九日

目錄

摘要

相傳法國大數學家笛卡兒寫了十二封情書給他心儀的瑞典公主，最後一封情書內容只有短短「$r = a(1 + cos\theta)$」一行字，也就是心臟線的方程式。本篇是探討以兩種不同的作圖方法來繪製出心臟線、心臟線中「M點的完美三角形」的特性、n 等分圓中弦和弦心距的關係。我們說明兩種心臟線之包絡線作圖會等價；推導心臟線中「M 點的完美三角形」的面積、周長的公式；發現 n 等分圓中的特定弦長會成正弦函數；在 6k 等分圓中弦心距有垂直關係；並觀察到心臟線與非洲菫的葉子沒有直接關係。

壹、研究動機

在二下尺規作圖的單元中，學了利用尺及圓規平分角度的方法。有一習題：把一個圓周上畫 32 個等分點。下課後，我們幫等分點編號，再將具有兩倍關係的點連起來，結果發現這些直線段竟能組成一弧線！詢問數學老師，老師說它長得很像心臟線的一半，我們兩個若有興趣，可以將這當成一個科展主題。於是，我們便開始研究心臟線。

貳、研究目的

一、探討各種心臟線作圖方法。

三、「完美三角形」的特性。

四、心臟線中弦的特性。

參、研究設備與器材

一、筆記型電腦。

二、The Geometer's Sketchpad(以下簡稱 GSP)。

三、紙、筆。

四、描圖紙。

五、印表機。

六、非洲菫。

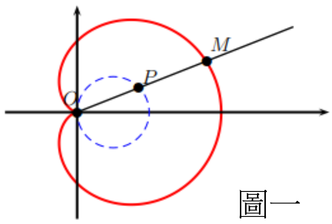
肆、研究過程與方法

一、名詞定義

(一)心臟線

定義：給定以a為直徑的圓，O為圓上的一個定點，P為圓上的另一點，心臟線為滿足$\overline{OM}=\overline{OP}\pm a$的點$M$的軌跡。

寫法 ： 極坐標方程式 ： $r=a(1+\cos\theta)$，如圖一所示。



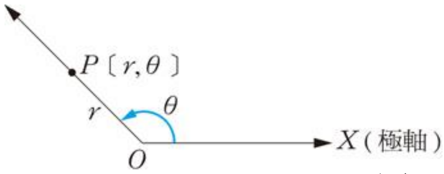
圖一

(二)有向角

在平面上將一射線$\overrightarrow{OA}$繞端點O，沿著一個固定的方向旋轉到射線$\overrightarrow{OB}$上，就形成一個有向角，稱射線$\overrightarrow{OA}$為始邊，射線$\overrightarrow{OB}$為終邊，而旋轉量就是此有向角的角度。為了方便，我們將有向角的角度標在終邊。逆時針方向旋轉的角為正向角；順時針方向旋轉的角為負向角。

(三)極座標

極坐標是以明確的參考點為中心，用距離與方向來描述平面上點的相對位置。在平面上選定一點O當作基準點(極)，以O為端點，向右作一水平射線$\overrightarrow{OX}$(極軸)，它的指向當作基準方向，如圖二。對於同一平面上異於O的任一點P，令$\overline{OP}=r$；以極軸為始邊，射線$\overrightarrow{OP}$當終邊的有向角為θ，那麼由θ及r就可以確定P點的位置，這樣的表示法稱為P點的一個極坐標，記作$P[r,\theta]$。



圖二

(四)廣義角

角度度數若有正向與負向之分且不限於$0°$至$180°$之間稱為廣義角。在x、y平面上，x軸是一條直線，而x軸的正向是一條射線，以它為始邊，將射線繞原點旋轉，無論是哪種方向旋轉，停住的一邊為終邊。逆時針方向旋轉的角度以正號表示；順時針方向旋轉的角度以負號表示。將這種不受範圍限制，又帶正負號的角稱為廣義角，我們將廣義角的角度標示在終邊。

(五)同界角

兩標準位置角θ_1及θ_2有相同終邊時，θ_1及θ_2稱為同界角，且$\theta_1-\theta_2=360n\ (n\in\mathbb{Z})$。

(七)包絡線

曲線族的包絡線，代表一條曲線與該曲線族的每條線都有至少一點相切。

二、研究流程圖

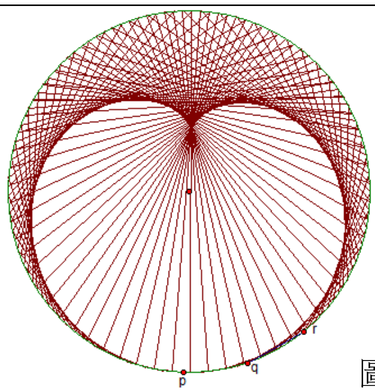
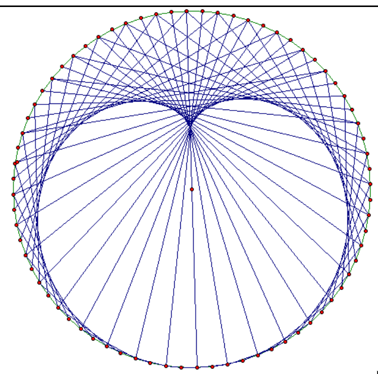
本研究主要是進行心臟線的資料蒐集和 GSP 作圖之分析與比較，並探討陳創義教授的心臟線繪製方法與我們所發現的心臟線繪製方法之差異，其研究流程圖如下圖所示。

伍、研究結果

一、心臟線作圖方法之比較

下課時間，我們在圓周上畫上 32 個等分點，將等分點分別編號，由 1、2、3…到 32 號，再將點 1 連接點 2、點 2 連接點 4、點 3 連接點 6…，將所有兩倍關係的點連起來。為了想證實我們的作圖是心臟線，於是上網搜尋心臟線作圖，找到陳創義教授於民國 93 年 11 月 27 日 GSP 動態幾何課程課程的上課影片，我們比較了陳創義教授的作圖方法及我們發現的作圖方法。以下將兩者之比較製成表一，並將兩者詳細作圖分解步驟圖列於附件一、二。

表一：心臟線作圖方法之比較

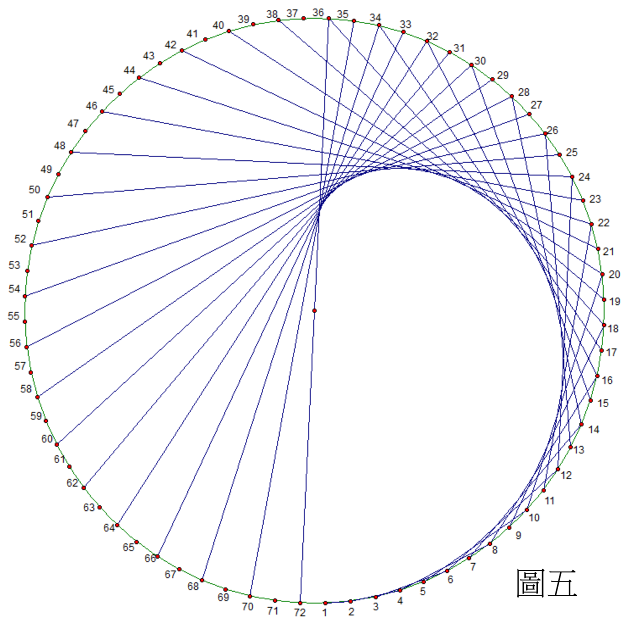
作圖方法	陳創義教授的作圖方法	我們發現的作圖方法
GSP 操作步驟比較	1.畫一半徑為r的圓(設圓心為O，圓周上一點為p)，在圓周上另做一點q。 2.依p、O、q的順序點擊三個點，在工具列的「變換」中點選「標記角度」。 3.點擊點q，在工具列的「變換」中點擊「旋轉」，並在訊息框中選擇「標記的角度」之後再選擇在訊息框中的「旋轉」後，會出現點r。 4.之後，用直線連接點r及點q，點選直線及點q，在工具列的「作圖」中點擊「軌跡」。	1.畫一半徑為r的圓(設圓心為O，圓周上一點為p)。 2.點擊點O，再快速點擊點p兩下，在「工具列」點擊「變換」-「旋轉」，選取「固定的角度」設定 5°，得一新旋轉點q。 3.點擊點q，在工具列點選「變換」，點擊旋轉-旋轉。重複步驟 3.至所有點平均散佈整個圓周。 4.標號(1,2,3,……)再將具有兩倍關係的點連線，連完後再依照規律延伸，繼續連線，直到連線平分在整個圓。
作圖結果	 圖三	 圖四

針對此二作圖方式，我們發現以下結果。

(一)圖四線條較疏，推測若將圖四步驟 2「固定的角度」的角度定為略小於 5 的角度，應會更加接近圖三緊密的線條。因此，我們繼續繪製了表二，期能證明此論點的正確性。

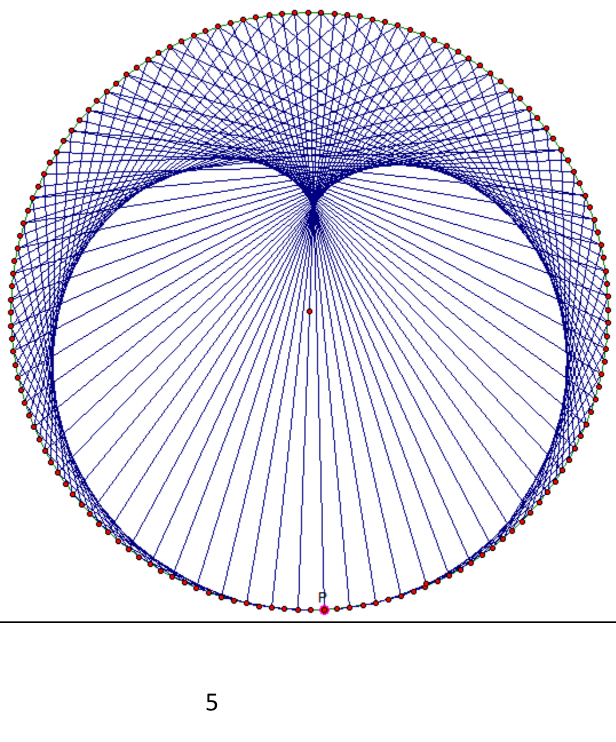
(二)其他部分在印到描圖紙上並重疊後，看起來似乎是相同的圖形。

(三)若在圖四的步驟4中，連到36-72時就停止，會得到半個心臟線，如圖五。



圖五

表二：固定角度設定 2.5°的作圖方法。

作圖方法	固定角度設定 2.5°的作圖方法。
GSP 操作步驟	1. 畫一半徑為r的圓(設圓心為O，圓周上一點為p)，如圖六所示。 2. 點擊點O，再快速點擊點p兩下，在「工具列」點擊「變換」，點擊「旋轉」，選取「固定的角度」設定 2.5°，得一新旋轉點（設此為點q），如圖七所示。 3. 點擊點q，在工具列點選「變換」，點擊旋轉-旋轉。重複步驟 3.至所有點平均散佈整個圓周，標號(1,2,3,……)。 4. 將具有兩倍關係的點連線，依照規律繼續連直到連線平分在整個圓。如圖六。
作圖結果	 圖六

(四)說明上述兩作圖等價

我們想用數學方法證明我們發現的做圖法確實可以做出心臟線，而不是只將兩者印在描圖紙上透過光線用肉眼判斷，於是我們用下列的數學方法證明。

1.兩者的極座標之表示法

a.我們將圖三之圓上的點標號：令圓心為O，基準點為$P[r,0]$，令與P夾正向角為θ的點為P_θ (座標為$[r,\theta]$)。

b.圖四上之圓上的點標號：令圓心為O，基準點為P，我們將圓周分為n等分，將此n等分點逆時針依序命名為K_1到K_n，並令基準點P為K_n；$\angle K_1OK_2=\frac{360°}{n}$，所以$K_1$的座標就是 $[r,\frac{360}{n}\times 1]$；$K_m$的座標為 $[r,\frac{360}{n}\times m]$。

2.說明兩線段重合

圖四中，取$\theta=\frac{360}{n}\times m$，則$P_\theta$的座標為 $[r,\frac{360}{n}\times m]$、$P_{2\theta}$的座標為$[r,\frac{360}{n}\times 2m]$。由極座標可知$P_\theta$的座標等於$K_m$的座標，$P_{2\theta}$的座標等於$K_{2m}$的座標：

故$\overline{P_\theta P_{2\theta}}$與$\overline{K_m K_{2m}}$重合

當以上事件成立的時候，m代入 1、2、……、n，可以對應到圖三的一部分，θ取某特定值(即$\theta=\frac{360}{n}\times m$)時，就可以對應到圖四；同理，當兩作圖的$n$取∞時，兩作圖會等價。

3.廣義角的極座標對應

令圖四分成n等份，每一份的角度是$\frac{360°}{n}$。令起始點為K_1，將$\theta=K_1$連到K_2、K_2連到K_4，一直到$K_{\frac{n}{2}}$連到終點K_n，我們無法再以現有的點數連下去(只會得到半個心臟線的圖形)，於是再令$K_{n+1}=K_1$、$K_{n+2}=K_2$......以此類推；之後從$K_{\frac{n}{2}+1}$連到K_{n+1}、$K_{\frac{n}{2}+2}$連到K_{n+4}……以此類推。圖三部分，當$\theta>360°$，θ的同界角$=\theta-360°$；P_θ座標$=P_{\theta-360°}[r,\theta-360]$。取一個大於$n$值的$m$值，則$K_m=K_{m-n}$，再取$\theta=\frac{360}{n}\times m$，$P_\theta=K_m\therefore P_\theta$座標$=P_{\theta-360}$座標$=P_{\frac{360}{n}m-360}$座標$=P_{\frac{360}{n}m-\frac{360}{n}n}$座標$=P_{\frac{360}{n}(m-n)}$座標$=\left[r,\frac{360}{n}(m-n)\right]=K_{m-n}$座標 $=K_m$座標。

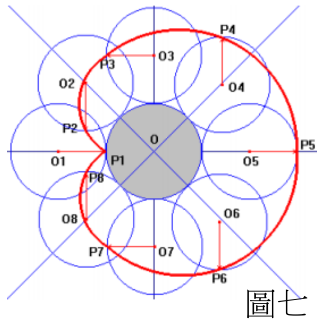
故θ等於任何角度(包含廣義角)時， $P_\theta=K_m$皆成立。

二、以「動圓繞定圓」作心臟線，產生完美三角形

我們於羅啟仁、劉安哲在 2012 年發表的<笛卡爾的浪漫—圓外擺線的研究>中，發現另一種心臟線的描述法，也就是「動圓繞定圓」。

(一)動圓繞定圓作圖

當動圓與定圓為等圓時，讓動圓在定圓上滾動，這時動圓上任一點P的軌跡圖形，即圓的外擺線，會是一條心臟線，如圖七所示。



圖七

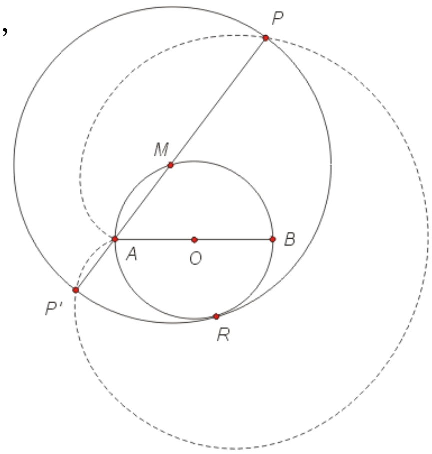
(二)分析

我們可從圖七得知，當動圓與定圓相切於P_1，滾動 0°時(即在初位置O_1)，定圓圓周和P點的距離最小(距離為 0)；而在滾了半圈，即180°時，距離最大(兩個半徑)。

(三)文獻探討

我們參考了趙文敏教授發表在科學月刊的<何謂心臟線>，發現了有關心臟線為外擺線的說明，整理如下。

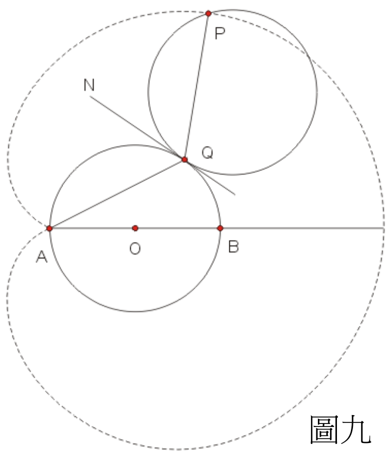
1.如圖八，給定一個圓 O，以及圓周上的一個定點 A，設過 A 的任意直線與給定圓 O 交於另一點 M。在直線 AM 上有兩個點 P 與 P'滿足$\overline{MP}=\overline{MP'}$給定圓 O 的直徑，則所有此種 P 與 P' 點所成的圖形稱為以給定圓 O 為基圓 (base circle)、A 為歧點 (cusp point)的心臟線(cardioid)。



圖八

2.如圖九，已知對於以A為岐點，圓O為基圓的心臟線上的每個點P都可以在圓O上找到一個點Q，使A點對切線$\overline{QN}$的對稱點為P點，若做基圓對切線的對稱圖形，得一個過點P且切基圓於點Q的圓。因兩圓半徑相等且$\overline{AQ}=\overline{PQ}$，故$\widehat{AQ}=\widehat{PQ}$。

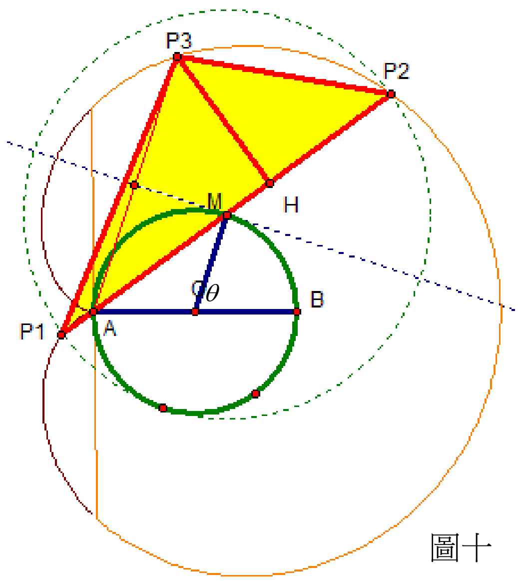
意即取一個大小與基圓相同的滾動圓，讓它沿著基圓的外部滾動，滾動圓上選定一個定點，此定點在滾動前的位置是 A。當滾動圓滾動到與基圓相切於 Q 點時，滾動圓上的定點就到達 P 點。此心臟線是一個基圓直徑為$\overline{AB}$的心臟線。



圖九

(四)對於<何謂心臟線>的討論

1.定義M點的完美三角形



圖十

如圖十，我們將圖八與圖九疊合，令圖八中的 P'點為P_1，圖八中的 P 點為P_2，圖九中的 P 點為P_3。連接P_1、P_2、P_3。

給定一的定圓O(直徑為R)上有一定點A，設過A的任一直線與定圓O交於另一點M。在直線$\overleftrightarrow{AM}$上有兩點P_1、P_2滿足$\overline{MP_1}=\overline{MP_2}=R$(符合(三)文獻探討 1 的定義)。$P_3$為以過$M$的切線為對稱軸，點 A 的對稱點(符合(三)文獻探討 2 的定義)。

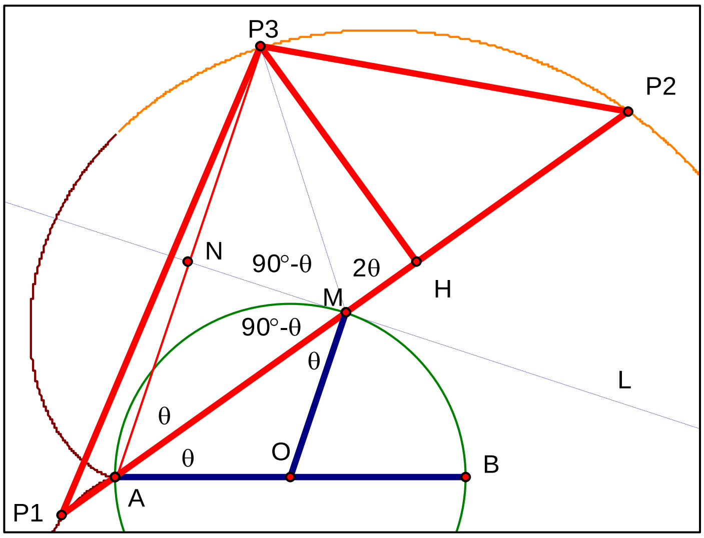
圖十中，橘線條為P_2對動點M的角度變化產生的移動軌跡；赭紅線條為P_1對動點M的角度變化產生的軌跡，兩者合併，為一以圓O為基圓，A點為岐點的心臟線圖形。P_3也會在這個心臟線上。

$$\boxed{\text{我們定義：}\Delta P_1P_2P_3\text{為一}M\text{點的完美三角形}}$$

2. M點的完美三角形(如圖十中$\Delta P_1P_2P_3$)的面積

(1).求面積

見圖十一，



圖十一

令$\angle OAM=\theta$，過 M 點的切線為 L，

$\overline{P_1A}$與 L 的交點為 N，$\overline{AB}=R$。

因為$\Delta 0MA$是等腰三角形

故$\angle AMO=\theta$，

因為 L 垂直於$\overline{MO}$

故$\angle AMN=90°-\theta$

因為是對稱角

故$\angle NMP_3=\angle AMN=90°-\theta$

得$\angle P_3MP_2=180°-2(90°-\theta)=2\theta$

$\overline{AM}=R\cdot\cos\theta$(連接$\overline{MB}$，$\angle AMB=90°$，$\overline{AB}=R$， $\overline{AM}=R\cdot\cos\theta$)，

$\overline{MA}=\overline{P_3M}$ (對稱線段)

$$\overline{P_3H} = \overline{P_3M} \cdot \sin 2\theta = \overline{MA} \cdot \sin 2\theta$$

$$= R \cdot \cos\theta \cdot \sin 2\theta \text{。}$$

$$\overline{P_1P_2} = 2R \text{，}$$

$$\Delta P_1P_2P_3\text{面積} = \frac{\overline{P_3H} \times \overline{P_1P_2}}{2}$$

$$= \frac{(R \cdot \cos\theta \cdot \sin 2\theta) \times 2R}{2}$$

$$= R \cdot (R \cdot \cos\theta \cdot \sin 2\theta)$$

$$= R^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin 2\theta$$

結論一：M的完美三角形的面積$= R^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin 2\theta$。

其中R代表基圓的直徑，θ是M點與歧點連線和岐點與圓心連線的夾角。

(2).求面積極值

已知結論一：M的完美三角形的面積$= R^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin 2\theta$。

方法一，以計算機代入公式，測試在各種不同角度(在此的θ僅討論$0° \leq \theta \leq 90°$)時，M的完美三角形的面積的變化，並在測試過程中，以十分逼近法的概念，尋找能組成最大、最小函數值(即面積的極值)的角度，並將測試結果製成表三。

表三：以計算機測試在不同角度x時，面積的變化(設$R = 1$，位數取至小數點後 5 位)。

角度值(x)	$f(x) = \cos x \cdot \sin 2x$	角度值(x)	$f(x) = \cos x \cdot \sin 2x$
0	0	36	.76942
10	.33682	37	.76769
20	.60402	38	.76460
30	.75000	39	.76016
31	.75683	40	.75440
32	.76222	50	.63302
33	.76616	60	.43301
34	.76867	70	.21984
35	.76975	80	.05939
35.5	.76976	90	0

針對表三，發現以下結果

(1)以十分逼近法可發現M的完美三角形面積的最大值應會發生在$\theta = 35° \sim \theta = 35.5°$中。

(2) M的完美三角形面積的最小值發生在$\theta = 0°$及$\theta = 90°$。

方法二，以公式推導，取面積最大值(令$R = 1$)。

$$R^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin 2\theta = \cos\theta \times 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\sin\theta \times \cos^2\theta$$

$$= 2\sin\theta\,(1 - \sin^2\theta)$$

$$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta$$

令$x = \sin\theta$，$f(x) = 2x - 2x^3$，$f'(x) = 2 - 6x^2$

當 $f'(x) = 0$，$2 - 6x^2 = 0$，$x = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$，故$f(x)$有極值。

當$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$f(x)$有最大值為$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$

此時取$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$\theta ≒ 35.2643$。

3.討論心臟線的M的完美三角形的邊長(如圖十，在ΔP_1MP_3中，令$\angle MAB = \theta$。)

(1).求$\overline{P_1P_3}$

已知$\overline{P_1M} = \overline{P_2M} = \overline{AB} = R$，$\overline{P_1P_2} = 2R$，$\overline{AM} = \overline{P_3M}$。$\overline{P_3M} = R \cdot \cos\theta$ ，$\overline{P_3H} = \overline{P_3M} \cdot \sin 2\theta = R\cos\theta \cdot \sin 2\theta$，根據餘弦定理 $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A$，

$\because \overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1M}^2 + \overline{P_3M}^2 - 2\overline{P_1M} \cdot \overline{P_3M} \cdot \cos(180 - 2\theta)$

$= R^2 + \overline{AM}^2 - 2R \cdot \overline{AM} \cdot \cos(180 - 2\theta)$

$= R^2 + R^2\cos^2\theta - 2R^2\cos\theta \cdot \cos(180 - 2\theta)$

$= R^2 + R^2\cos^2\theta + 2R^2\cos\theta\cos 2\theta$

$\therefore \overline{P_1P_3} = R\sqrt{\cos^2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta + 1}$

(2).求$\overline{P_2P_3}$

$\because \overline{P_2P_3}^2 = \overline{P_2M}^2 + \overline{P_3M}^2 - 2\overline{P_2M} \cdot \overline{P_3M} \cdot \cos 2\theta = R^2(1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta)$

$\therefore \overline{P_2P_3} = R\sqrt{\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta + 1}$

綜合上述兩點，心臟線的M的完美三角形的周長，即

$\Delta P_1P_2P_3$周長 $= 2R + R\sqrt{\cos^2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta + 1} + R\sqrt{\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta + 1}$。

結論二：周長$= 2R + R\sqrt{\cos^2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta + 1} + R\sqrt{\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta + 1}$

(3). 討論心臟線的M的完美三角形(如圖八中$\Delta P_1P_2P_3$)的邊長平方和關係

由上述 a、b 三邊長的平方和$\overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_1P_3}^2 + \overline{P_2P_3}^2$

$$= 4R^2 + R^2 + R^2\cos^2\theta + 2R^2\cos\theta\cos 2\theta + R^2 + R^2\cos^2\theta - 2R^2\cos\theta\cos 2\theta$$

$= 6R^2 + 2R^2\cos^2\theta = 2R^2(3 + \cos^2\theta)$

結論三：M的完美三角形的邊長平方和$= 2R^2(3 + \cos^2\theta)$

4.作圖中不合理的軌跡

在圖八作圖結果中，P_2軌跡與P_1軌跡的兩交會處(設為I_1、I_2)及心臟線岐點(設為C)的連線上有一條線段連接I_1、I_2，使I_1、I_2、C三點共線，且依此做圖的結果，此線段是為P_2的軌跡。依照心臟線方程式的結果，心臟線中不可能會有直線段的出現；在作圖上移動M點，也沒有發現任何一個P_2會落在此線段上(直接由I_1跳到I_2或由I_2跳到I_1)。

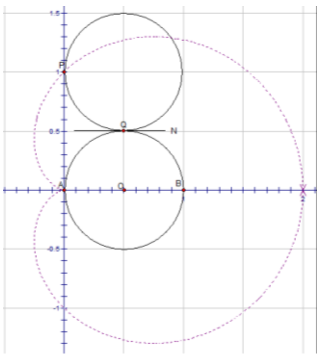
考慮I_1、I_2是作圖中的極值，在$\theta = 0°$及$\theta = 90°$時發生(此時完美三角形的面積恰為零)。

參考 GSP 中對於作圖中(軌跡)的描述：”…the Locus command allows us to visualize—or "image"—any planar curve or curves under a complex transformation, **by constructing the locus of a transformed point as a function of the motion of its pre-image point traveling along the pre-image curve.** …”，由於一函數軌跡的做法是：一函數圖形中，任一點與該點的前一個由同方程式出的點，才會導致由I_1跳到I_2時，I_2連到他的前一個點I_1構成$\overline{I_1I_2}$線段。以此類推。

如果P_2落在$\overline{I_1I_2}$上，會產生甚麼狀況呢?我們用 GSP 在作圖上設定$\theta = 90°$，這時候P_1、P_2、P_3三點共線。根據三角形的定義，三角形是由不共線的三點兩兩相連，且三個邊圍成一個封閉圖形，所以$P_1P_2P_3$不是三角形，三點所圍成的面積為零。

5.推廣至直角坐標

當我們把心臟線放在直角座標上時(設基圓半徑為 1，O圓的圓心O點為原點)如圖十一，可以發現到與上述「動圓繞定圓作圖」部分有相仿結果。



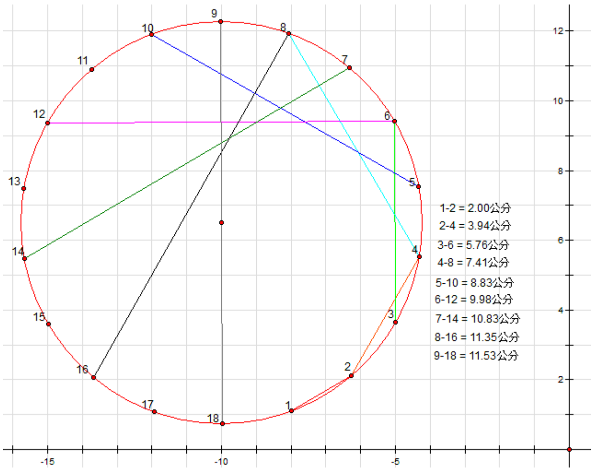
圖十二

三、圓中弦的比較

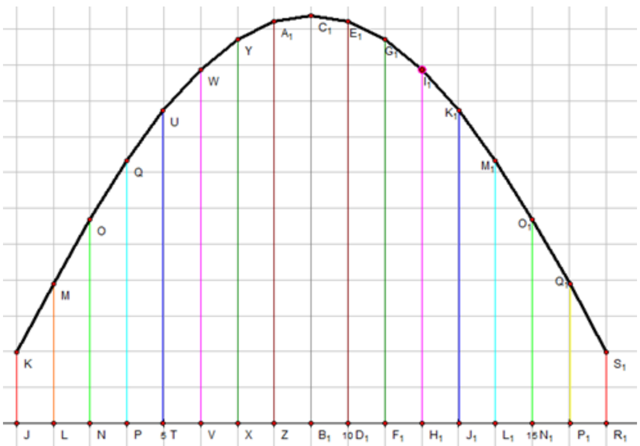
由於好奇前述之之作圖方法連出的弦有甚麼特殊性得以形成心臟線，我們做了以下實驗。

(一)操作

1.我們以 GSP 軟體在一 18 點的作圖(一半的心臟線)上面取相同長度的線段(先在原作圖的線段中，使用不同的顏色以方便辨認被排列的弦)，以相同距離排列於一直線上，如下圖十三、十四。可以發現這些線段長度形成的圖形，可以形成一半的正弦波波形，如下圖十四的黑粗線所示。



圖十三



圖十四

(二)證明

如圖十五，令圓周上 n 個等分點分別為 P(1)、P(2)……P(n)。

其中第 k 個等分點和第 2k 個等分點所形成的弦為$\overline{P(k)P(2k)}$，

弦中點為 M(k)。

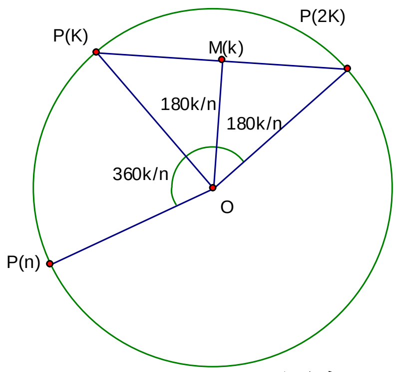
則弧$\widehat{P(k)P(2k)}$度數為$360\times\left(\frac{2k-k}{n}\right)=360\cdot\frac{k}{n}$

$\angle M(k)OP(k)=180\cdot\frac{k}{n}$

線段$\overline{P(k)M(k)}$ =半徑× $\sin\frac{180k}{n}$

弦$\overline{P(k)P(2k)}$=2$\overline{P(k)M(k)}$=2×半徑× $\sin\frac{180k}{n}$

故弦長是正弦函數。



圖十五

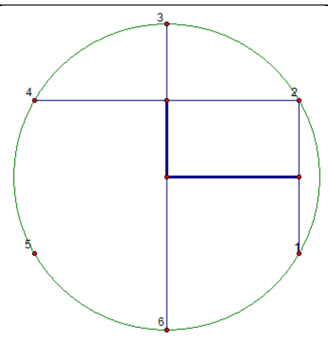
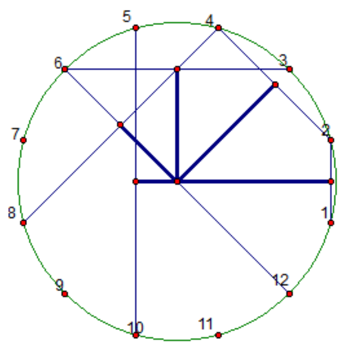
四、弦心距的比較

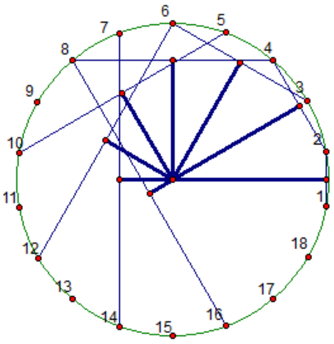
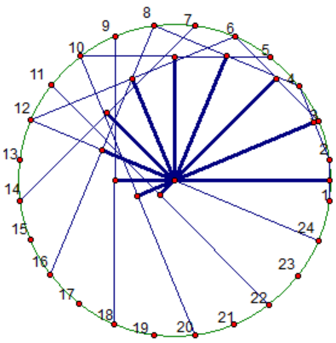
比較完弦的關係後，探討弦心距的關係。將圓周n等分後，同樣先連接兩倍關係的弦，我們將這些弦的弦心距畫出來，在弦心距的作圖中發現特定弦心距之間有垂直的關係，亦即某些特定弦會互相垂直。由下列實驗結果中可以發現這些弦與對應垂直弦的點數有特定的關係，在觀察規律後列出相同等分點數中對應垂直弦點數的通式，進而歸納出適用於有不同等分點數圓中對應垂直弦點數的公式。並在以列舉法逐一檢驗，並舉反例驗證後，再以弧度的關係加以證明。

實驗：不同點數的連線及其弦心距垂直的狀況

(一)觀察並記錄不同點數的圓，連接弦及弦心距的結果。觀察結果如下表所示。以[a,b]表示圓上第 a 個等分點與第 b 個等分點所連接形成的弦。

表四：不同點數的圓其弦及弦心距點數的關係(灰色網底的弦是直徑)

等分點數	對應弦	對應垂直弦		示意圖
$6\times1=6$	[1, 2]	[2, 4]		
	[2, 4]	[3, 6]	[1, 2]	
	[3, 6]		[2, 4]	
	⋮	⋮	⋮	
	[n, 2n]	[n+1, 2n+2]	[n-1, 2n-2]	
$6\times2=12$	[1, 2]	[3, 6]		
	[2, 4]	[4, 8]		
	[3, 6]	[5, 10]	[1, 2]	
	[4, 8]	[6, 12]	[2, 4]	
	[5, 10]		[3, 6]	
	[6, 12]		[4, 8]	
	⋮	⋮	⋮	
	[n, 2n]	[n+2,2n+4]	[n-2, 2n-4]	

$6 \times 3 = 18$	[1, 2]	[4, 8]		
	[2, 4]	[5, 10]		
	[3, 6]	[6, 12]		
	[4, 8]	[7, 14]	[1, 2]	
	[5, 10]	[8, 16]	[2, 4]	
	[6, 12]	[9, 18]	[3, 6]	
	[7, 14]		[4, 8]	
	[8, 16]		[5, 10]	
	[9, 18]		[6, 12]	
	⋮	⋮	⋮	
	[n, 2n]	[n+3,2n+6]	[n-3,2n-6]	
$6 \times 4 = 24$	[1, 2]	[5, 10]		
	[2, 4]	[6, 12]		
	[3, 6]	[7, 14]		
	[4, 8]	[8, 16]		
	[5, 10]	[9, 18]	[1, 2]	
	[6, 12]	[10, 20]	[2, 4]	
	[7, 14]	[11, 22]	[3, 6]	
	[8, 16]	[12, 24]	[4, 8]	
	[9, 18]		[5, 10]	
	[10, 20]		[6, 12]	
	[11, 22]		[7, 14]	
	[12, 24]		[8, 16]	
	⋮	⋮	⋮	
	[n, 2n]	[n+4,2n+8]	[n-4,2n-8]	
6k	[n, 2n]	[n+k, 2n+2k]	[n-k, 2n-2k]	略

(二)針對表四，發現以下數點結果：

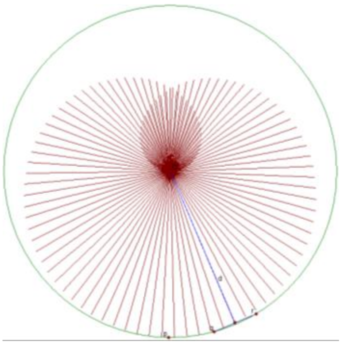
1.只有等分點數為 6 的倍數時，才會有弦心距垂直的情況。

2.在$6k$等分圓中 ，弦$[n,2n]$，其對應垂直之弦會是$[n\pm k,2n\ \pm 2k]$。其中k是定值，$n\in\mathbb{N}$，若$n\geq 6k$，則 6k+1 等價於 1，6k+2 等價於 2……等。

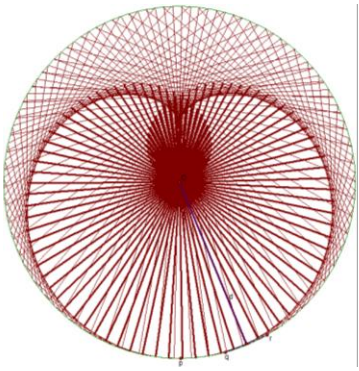
3.每個同點數弦和弦心距的交點，即弦的中點，連線起來不會形成一個較大的心臟線。

仿造陳創義教授做心臟線的做法(見表一)，在 GSP 操作步驟比較的第 4 點改為:「4.之後，用直線 1 連接點r及點q，再做直線的弦心距d。」及增加第 5 點：「5.點選d及點q，在工具列的「作圖」中點擊「軌跡」。」做出來的圖形會是在這個圓中，心臟線的軌跡。如圖十六，再將弦及弦心距的兩圖重疊(圖十七，為方便辨認，將弦心距設為粗線，弦設為細線)，發現此圖形不會是心臟線，但推測是一心臟線的長寬比例經過改變後(例如把正方形變成鄰邊不相等的長方形)，描繪出來的圖形。

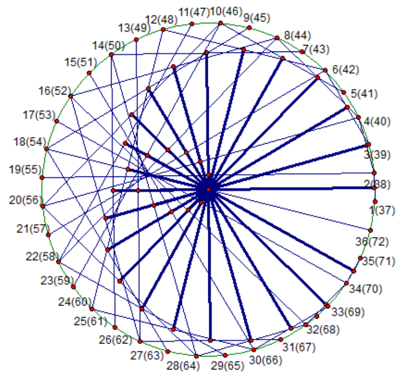
4.將圓作 36 等分點，把點數編號 1 到 36 號，依序將所有兩倍關係的點連起來，並作出弦心距。如圖十八。結果與上述第 3 點相仿。



圖十六



圖十七

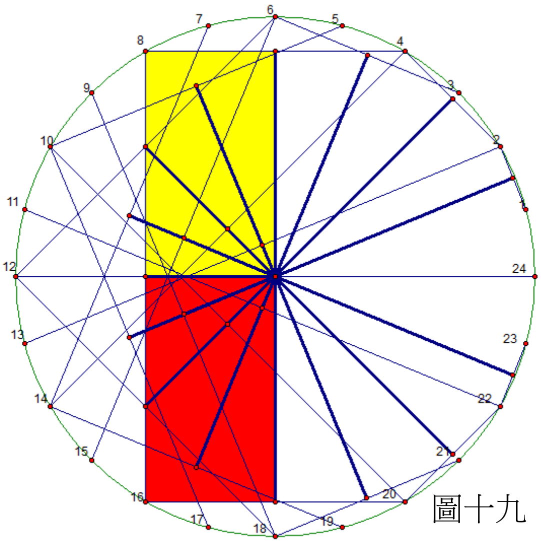


圖十八

5.在$6k$等分圓中，會有k組弦在對應垂直弦的部分有兩條：如表四框黑框線部分。

6.每個$6k$等分圓必有一組與圓相接的、由弦及弦心距構成的矩形。如圖十九，以 24 等分圓為例，[4,8]與[8,16]兩條弦相垂直，兩弦所對應的弦心距與此兩弦形成黃色矩形，[8,16]與[20,40]兩條弦相垂直，兩弦所對應的弦心距與此兩弦形成紅色矩形，黃色矩形與紅色矩形對稱於[12,24]，此對稱軸恰好是圓的直徑。歸納出 6k 等分圓中，[k,2k]弦及其弦心距和[2k,4k]弦及其弦心距會形成矩形 A，[2k,4k]弦及其弦心距和[5k,10k]弦及其弦心距會形成矩形 B，矩形 A 與

矩形 B 會對稱於[3k,6k]弦。其中，點 k 是在圓周的$\frac{1}{6}$處，點 2k 是在圓周的$\frac{2}{6}$處，點 4k 是在圓周的$\frac{4}{6}$處，點 10k 是在圓周的$\frac{10}{6}=\frac{5}{6}$處。故會有對稱關係。

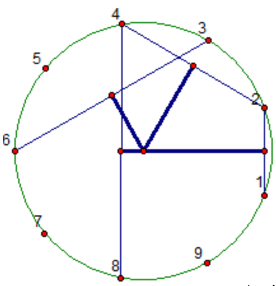

圖十九

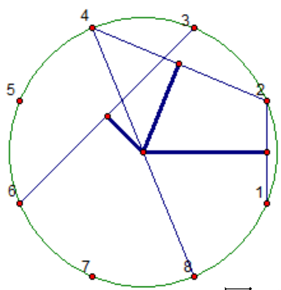
(三)上述發現證明

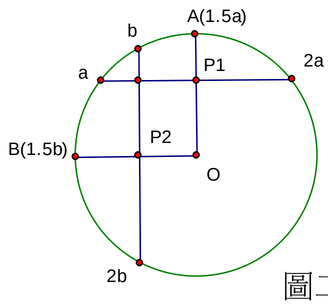
1.舉出反例：

表四中，可產生垂直弦心距的圓，其等分點數皆為 6 的倍數，但同時也是 2 的倍數及 3 的倍數。為了瞭解是否等分點數為 2 的倍數就可以產生垂直弦心距，或等分點數為 3 的倍數就可以產生垂直弦心距，故做以下嘗試。

8 是 2 的倍數，在 8 等分圓中連接弦與弦心距，如圖二十一，無垂直弦心距。9 是 3 的倍數，在 9 等分圓中連接弦與弦心距，如圖二十，無垂直弦心距。因此推測出只有$6k$為六的倍數時才有這種情況，也就是當$k \in \mathbb{N}$時，$6k$等分圓的弦心距會有垂直情況。


圖二十


圖二十一



圖二十二

2.證明m等分圓中，若有兩弦$[a,2a]$及$[b,2b]$互相垂直，則m必為 6 的倍數。

過程：如圖二十二，m等分圓中，若有兩弦$[a,2a]$及$[b,2b]$互相垂直，其中m、a、$b \in \mathbb{N}$。分別做出兩弦的弦心距，與弦交於點P_1、P_2。各自延長弦心距，交圓於A、B點，滿足m個等分點命名之規律，不失一般性，令A點的名稱是$\frac{a+2a}{2}=1.5a$、B點的名稱$\frac{b+2b}{2}=1.5b$。

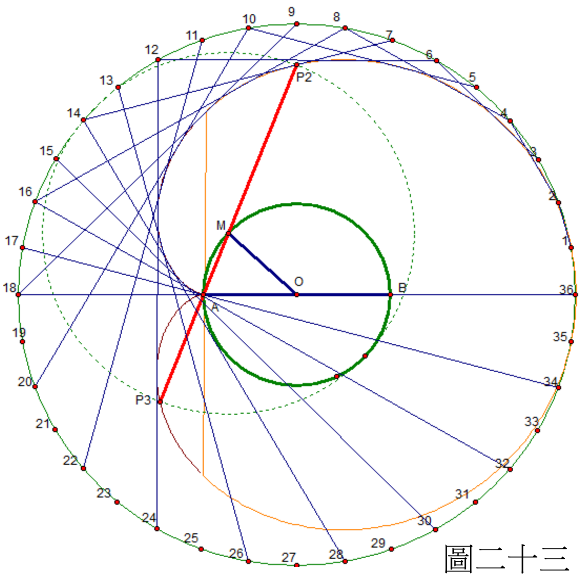
因為兩弦互相垂直，故兩弦心距互相垂直，$\angle P_1OP_2=90°$，$\widehat{AB}$弧對應的圓心角是$\angle P_1OP_2$，故$\widehat{AB}$是$90°$。則依據等分點命名規則，$1.5a-1.5b=\frac{m}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}(a-b)=\frac{m}{4} \Rightarrow 6(a-b)=m$，故$m$必為 6 的倍數。

五、綜合比較

(一)將 36 等分圓的兩倍弦連接圖以及動圓繞定圓的心臟線圖疊合(如圖二十三)。

將兩圖依圓心對圓心、$\overleftrightarrow{AB}$對弦[18,36]，令圖中三個圓的名稱分別為大圓、虛線圓、小圓(依照半徑大小命名)。可發現到以下數點：

1.大圓內所有的弦都會與心臟線切於一點，其中弦[18,36]通過兩圓圓心及心臟線的歧點，為此心臟線圖形的對稱軸(也是大圓的直徑)。



圖二十三

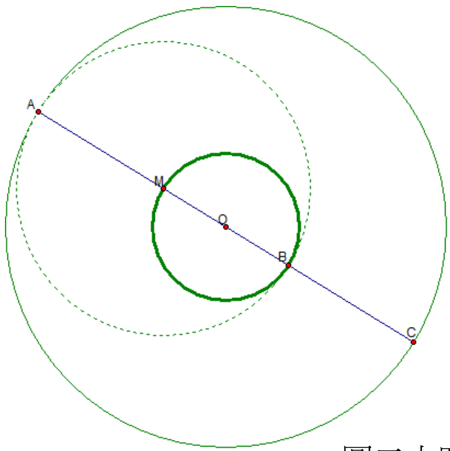
2.簡化圖二十三得到圖二十四。虛線圓皆與大圓和小圓內切，令大圓直徑為$2R$，小圓直徑為$2r$，由前述動圓繞定圓的過程得知虛線圓的圓心為 M 點，根據兩圓內切則連心線段長為兩圓半徑差之性質，可得到

$$\mathrm{R} - \text{虛線圓半徑} = \mathrm{r} \ \ldots\ldots (\text{第一式})$$

同樣由前述動圓繞定圓的過程得知虛線圓的半徑是小圓的兩倍，故虛線圓半徑=$2r$，代入第一式，可以得到

$$\mathrm{R} - 2\mathrm{r} = \mathrm{r}$$

$$\mathrm{R} = 3\mathrm{r}$$



圖二十四

綜合以上，可得三個圓的半徑比為$1:2:3$；根據以上結果，小圓與大圓半徑比為$1:3$。

六、類似心臟線的有機物體

我們發現了一種植物，其葉形極像心臟線：非洲堇。觀察在其生長過程中，生長方式是否會與心臟線有關。

(一)非洲堇簡介

非洲堇(*Saintpaulia ionantha*)(圖二十五)：屬於脣形目、苦苣苔科，原生在東非坦尚尼亞的濱海山區。栽植時為避免根系腐爛及因水分不足的葉片下垂，不同季節澆水的頻率有所不同，原則是要保持土壤濕潤；光照不足時，可能會影響其發育及開花，可用一般照明的燈光補充光線，但避免強光直射。能夠適應空調環境，是現在常見的桌上植物。

(二)實驗方法及過程

以上面印有不同半徑(指心臟線在與圓切一點，且切點與圓心、岐點三點共線時，該圓的半徑)的心臟線的透明投影片與非洲堇葉片的重疊比較，如圖二十六、二十七，發現它不會完全貼合心臟線的輪廓，而且以同一片葉子來說，該葉長得越大，與心臟線的外型會越差越遠。因此可以推斷出：非洲堇的輪廓與心臟線沒有直接性的、或密不可分的關聯；且非洲堇已經是目前我們所能找到最具有與心臟線相似輪廓的植物了，所以植物的生長與心臟線沒有直接關係。


圖二十五


圖二十六


圖二十七

陸、討論

一、由於圓形是一正無限多邊形，未來我們將會對於正多邊形中的線段，會不會有規律的情況，以 GSP 模擬做更多元的探討。

二、延續第一點，我們也可以朝向探討以橢圓為動圓做出來的包絡線圖形，會不會出現類似心臟線，只是長寬比例改變的圖形。另外，在我們學到更多知識後，期望可以將心臟線以包絡線的製作方式(動圓繞定圓)延伸至 3D 的球體上探討；但是在 GSP 上並沒有可以模擬 3D 情況的方式，必需要找另一個數學繪圖軟體來討論。

三、在研究的過程中，把研究一中，圖四的步驟 4 改成將具有n倍關係的點連線(n改為大於二的任何正整數)，在點數夠多的情況下，觀察產生的其他規律圖形。

柒、結論

一、以兩倍連線形成的集合可以是心臟線的包絡線。

二、定義何謂的完美三角形後，得到三點結論，即：

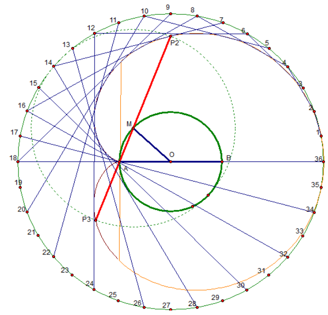
(一)M的完美三角形的面積：$R^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin 2\theta$。

(二)：M的完美三角形的周長：

$2R+R\sqrt{1+\cos^2\theta+2\cos\theta\cos2\theta}+R\sqrt{1+\cos^2\theta-2\cos\theta\cos2\theta}$。

(三)：M的完美三角形的邊長平方和：$2R^2(3+\cos^2\theta)$。

三、在一圓中能連成心臟線包絡線的弦，依序排在直角座標上後，能夠排成一個一半的正弦波。



四、將圓周平分為 6k 等分，若兩弦的關係符合一弦是[n, 2n]、一弦是[n+k, 2n+2k]時，兩弦會垂直。

五、如右圖，小圓半徑：大圓半徑 $=1:3$。

六、非洲堇的生長與心臟線沒有直接關係。

捌、參考資料

一、高中數學第三冊。第一章第二節廣義角與極座標。南一出版社。

二、國中數學第四冊。第二章第三節尺規作圖。翰林出版社。

三、國中數學第五冊。第二章圓。翰林出版社。

四｀、陳創義(93 年)。楊梅高中區域合作數學菁英研習 GSP 動態幾何課程。取自：

http://affairs.ymhs.tyc.edu.tw/reheart/GSP/class.htm

五、大哉言數網頁(無日期)。曲線家族，心臟線 Cardioid。取自：

www.mathsgreat.com/curve/curve_indiv_003.pdf

六、羅啟仁。劉安哲(101 年)。笛卡爾的浪漫—圓外擺線的研究。取自：

http://www.shs.edu.tw/works/essay/2012/11/2012111416323855.pdf

七、數學辭典。E.J. Borowski & J.M. Borwein。貓頭鷹出版。

八、趙文敏。何謂心臟線。科學月刊第二十一卷第五期。取自：

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_21_05_1/index.html

九、Home- The Geometer’s Sketchpad Resource Center

http://www.dynamicgeometry.com/index.html