嘉義市第三十七屆中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱:過橋問題

關鍵詞： 過橋遊戲、規律

摘要

「過橋遊戲」規則為有 n 個人要過橋，他們過橋的速度皆不同，每次 2 人過橋，過橋的 2 人中秒數較多的人為該次過橋的秒數，過橋時有人要提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，和剩餘的人過橋至對岸，直到所有人都過橋。

本研究討論出過橋秒數不一時的最簡走法通式，再由結論推算出秒數為等差、等比、階差規則走法公式。

壹、研究動機

這個題目是我國小研究過的題目，當時是因為在網路發現過橋遊戲。遊戲規則是：有 5 個人要過橋，他們過橋的秒數分別是 1、3、6、8、12 秒，每次最多 2 人過去，但是要有 1 人回來，直到所有人都過橋，但遊戲規定只能在 30 秒內完成。我當時探討的僅限於過橋秒數是**等差=1** 在**橋上可過橋的人數**不同的情況，我這次推廣到**過橋秒數不一**時的最簡走法通式，再由結論推算出秒數為**等差**、**等比**、**階差**規則走法公式。

貳、研究目的

有 n 個人要過橋，每人過橋速度不一，每次 2 人過橋，但要有 1 人必須提燈籠回到橋頭，探討在過橋速度不同時的情況，**<u>找出最簡秒數的走法及公式</u>**。

研究一：過橋速度規則不一走法通式。

研究二：秒數為等差規則走法公式。

研究三：秒數為等比規則走法公式。

研究四：秒數為階差規則走法公式。

參、文獻探討與研究差異性

我上網搜尋發現，這個主題國內外皆有一些關於過橋問題的討論，但大部分僅侷限於一些特定的情況，或是無法確認最簡的走法通式。這個問題我小六時也曾經研究過，但當時討論的也僅限於過橋秒數是**等差=1** 在**橋上可過橋的人數**不同的情況，在此我也說明本研究與其他研究的差別:

1. 有些研究只有指出一種走法，並且還有不合公式的特例，本研究推廣至不同走法並得到完整公式(沒有特例)。
2. 本研究將情況討論至過橋速度規則不一的走法通式，並證明其是最簡的，也就是可以套用到所有關於過橋遊戲的問題。
3. 我將過橋秒數規則為等差、等比、階差的情況都分析討論出來。

肆、名詞解釋

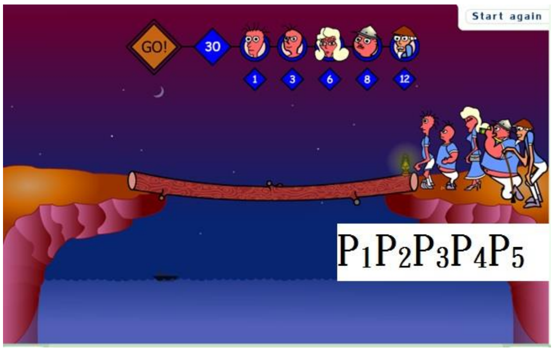
遊戲規則

有 n 個人要過橋，過橋秒數**由小排列到大**分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數不一，每次最多 2 人過去，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，累加每次過橋秒數，找出最簡秒數的走法及公式。

舉實例說明遊戲規則

我用網路上的過橋遊戲的步驟來說明，有五個人要過橋，P_1～P_5 過橋秒數分別為 1、3、6、8、12 秒，以下 5 人全部過橋，共花了 29 秒。

	
$P_1P_2P_3P_4P_5$ 在橋頭	第 1 步：P_1P_2 過橋-3 秒
	
第 2 步：P_1 回橋頭-1 秒	第 3 步：P_4P_5 過橋-12 秒
	
第 4 步：P_2 回橋頭-3 秒	第 5 步：P_1P_3 過橋-6 秒

	
第 6 步：P_1回橋頭-1 秒	第 7 步：P_1P_2過橋-3 秒
	
$P_1P_2P_3P_4P_5$全部橋頭，共花了 29 秒	

根據以上遊戲規則，我分析走法後，定義了以下的名詞：

一、一人提燈走法與二人提燈走法

(一)一人提燈走法： 由同一個人走每一次的回程，因為P_1秒數最少，所以由P_1帶領所有人輪番過橋，也由P_1走回程。

(二)二人提燈走法:由兩個人P_1 P_2(速度最快的 2 人)走完所有的回程，搭配以運送最慢 2 人過橋。

二、輪

我發現一人提燈走法和二人提燈走法都是**<u>每 4 步驟形成一個規律</u>**，而這 4 步驟結束後共多了 2 人在橋尾，也就是說每一輪送走了 2 人，「第 1 輪」就是把秒數第 1 多的 2 人送過橋，「第 2 輪」就是把秒數第 2 多的 2 人送過橋，「第 3 輪」就是把秒數第 3 多的 2 人 送過橋，…，「第 m 輪」就是把秒數第 m 多的 2 人送過橋，也就是說每一輪結束後會多 2 人在橋尾。

1.每 4 步驟結束後，多了 2 人在橋尾，即每一輪送走 2 人。

2.送走秒數第 1 多的 P_4P_5。

三、剩餘人數所需秒數 R

如果前面已走了 m 輪，就會送走 2m 個人，最終留在橋頭只剩 2 個人或 3 個人時，要送走剩餘的人，就不需要完整 4 步驟過橋了，此時，剩 2 個人或 3 個人這兩種情況要特別分開討論，我把他們所需的秒數代號叫 R。

伍、研究方法、結果與討論

一、研究一：過橋速度規則不一走法通式

有 n 個人要過橋，過橋所需秒數由小排列到大分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數不一，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。我在這個研究討論**過橋速度規則不一走法的通式。**

（一）試玩的情況

我測試不同的過橋秒數情況，花了不少時間，從中觀察最快的走法，想要找出最簡共通的走法規則，舉例如下:

1. 測試秒數(P_1, P_2, P_3, P_4)=(4, 8, 9, 10)

步驟	來回	秒數
1	P_1P_4 去	10
2	P_1 回	4
3	P_1P_3 去	9
4	P_1 回	4
5	P_1P_2 去	8
	秒數共	35

2. 測試秒數(P_1, P_2, P_3, P_4)= (2, 3, 6, 9)

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	3
2	P_1 回	2
3	P_3P_4 去	9
4	P_2 回	3
5	P_1P_2 去	3
	秒數共	20

3. 測試秒數(P_1, P_2, P_3, P_4)= (4, 5, 8, 9)

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	5
2	P_1 回	4
3	P_3P_4 去	9
4	P_2 回	5
5	P_1P_2 去	5
	秒數共	28

4. 測試秒數(P_1, P_2, P_3, P_4)= (1, 7, 8, 11)

步驟	來回	秒數
1	P_1P_4 去	11
2	P_1 回	1
3	P_1P_3 去	8
4	P_1 回	1
5	P_1P_2 去	7
	秒數共	28

5. 測試秒數(P_1, P_2, P_3, P_4)= (1, 3, 7, 8)

步驟	來回	秒數
1	P_1P_4 去	3
2	P_1 回	1

6. 測試秒數(P_1, P_2, P_3, P_4)= (1, 5, 6, 8)

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	5
2	P_1 回	1

3	P_1P_3去	8		3	P_3P_4去	8
4	P_1 回	3		4	P_2 回	5
5	P_1P_2去	1		5	P_1P_2去	5
	秒數共	16			秒數共	24

(二)分析

我測試許多種情況，觀察後發現，各種過橋秒數排列最快的走法，它們的共通點有兩種情況，整理如下:

1. **一人提燈走法:** 由同一個人走每一次的回程，因為 P_1 秒數最少，所以由 P_1 帶領所有人輪番過橋，也由 P_1 走回程。以 4 人過橋舉例：

步驟	在橋頭的人	走在橋上的人	最終在橋尾的人	秒數
初始	$P_1P_2P_3P_4P_5$			
第 1 步	$P_2P_3P_4$	$P_1P_5\rightarrow$	P_1P_5	P_5
第 2 步	$P_1P_2P_3P_4$	$P_1\leftarrow$	P_5	P_1
第 3 步	P_2P_3	$P_1P_4\rightarrow$	$P_1P_4P_5$	P_4
第 4 步	$P_1P_2P_3$	$P_1\leftarrow$	P_4P_5	P_1
第 5 步	P_2	$P_1P_3\rightarrow$	$P_1P_3P_4P_5$	P_3
第 6 步	P_1P_2	$P_1\leftarrow$	$P_3P_4P_5$	P_1
第 7 步		$P_1P_2\rightarrow$	$P_1P_2P_3P_4P_5$	P_2

2. **二人提燈走法:** 由兩個人 P_1 P_2(速度最快的 2 人)走完所有的回程，搭配以運送最慢 2 人過橋(想法:最慢兩人過橋，即可不計其中一人的時間)，以 4 人過橋舉例:

步驟	在橋頭的人	走在橋上的人	最終在橋尾的人	秒數
初始	$P_1P_2P_3P_4P_5$			
第 1 步	$P_3P_4P_5$	$P_1P_2\rightarrow$	P_1P_2	P_2
第 2 步	$P_1P_3P_4P_5$	$P_1\leftarrow$	P_2	P_1
第 3 步	P_1P_3	$P_4P_5\rightarrow$	$P_2P_4P_5$	P_5
第 4 步	$P_1P_2P_3$	$P_2\leftarrow$	P_4P_5	P_2
第 5 步	P_2	$P_1P_3\rightarrow$	$P_1P_3P_4P_5$	P_3
第 6 步	P_1P_2	$P_1\leftarrow$	$P_3P_4P_5$	P_1
第 7 步		$P_1P_2\rightarrow$	$P_1P_2P_3P_4P_5$	P_2

(三)最簡走法

我已找出一人提燈走法和二人提燈走法，接下來我要試著證明一人提燈走法和二人提燈走法為最快的。

1. 4 人過橋：

由於要完成完整四步驟至少要有 4 人過橋，又因過橋人數愈多結果愈複雜，因此先討

論 4 人過橋的情況。

由文獻得知，而我也計算過，結果得知，4 人過橋共有 108 種走法，過橋總秒數有 15 種類型，表列如下，以下 P_1、P_2、P_3、P_4 分別代表 4 人的過橋秒數)，已知秒數 $P_1<P_2<P_3<P_4$，經過比較後，發現只有黃底的 2 種情況為最快的。

$2P_1+P_2+P_3+P_4$	$3P_2+P_3+P_4$	$4P_3+P_4$	$5P_4$	$2P_2+3P_4$
$P_1+P_2+2P_3+P_4$	$2P_1+2P_3+P_4$	$P_1+P_2+3P_4$	$P_2+P_3+3P_4$	$P_1+P_3+3P_4$
$P_1+3P_3+P_4$	$P_2+3P_3+P_4$	$2P_3+3P_4$	$P_1+2P_2+P_3+P_4$	$2P_1+2P_2+P_4$

我再從這 2 種情況中，列出可能的走法有 7 種，包含：$2P_1+P_2+P_3+P_4$ 有 6 種，$P_1+3P_2+P_4$ 有 1 種，詳細走法表列如下：

(1)$2P_1+P_2+P_3+P_4$ 類型：從這 6 種走法可以發現，都是採用「一人提燈走法」的規則。

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	P_2
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_3 去	P_3
4	P_1 回	P_1
5	P_1P_4 去	P_4
	秒數共	$2P_1+P_2+P_3+P_4$

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	P_2
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_4 去	P_4
4	P_1 回	P_1
5	P_1P_3 去	P_3
	秒數共	$2P_1+P_2+P_3+P_4$

步驟	來回	秒數
1	P_1P_4 去	P_4
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_2 去	P_2
4	P_1 回	P_1
5	P_1P_3 去	P_3
	秒數共	$2P_1+P_2+P_3+P_4$

步驟	來回	秒數
1	P_1P_3 去	P_3
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_4 去	P_4
4	P_1 回	P_1
5	P_1P_2 去	P_2
	秒數共	$2P_1+P_2+P_3+P_4$

步驟	來回	秒數
1	P_1P_3 去	P_3
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_2 去	P_2
4	P_1 回	P_1
5	P_1P_4 去	P_4
	秒數共	$2P_1+P_2+P_3+P_4$

步驟	來回	秒數
1	P_1P_4 去	P_4
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_3 去	P_3
4	P_1 回	P_1
5	P_1P_2 去	P_2
	秒數共	$2P_1+P_2+P_3+P_4$

(2)$2P_1+2P_2+P_4$ 類型：從這種走法可以發現，是採用「二人提燈走法」的規則。

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	P_2
2	P_1 回	P_1
3	P_3P_4 去	P_4
4	P_2 回	P_2
5	P_1P_2 去	P_2
	秒數共	$P_1+3P_2+P_4$

(3)綜合以上：我確定，4 人過橋最簡走法有一人提燈或二人提燈走法。

2. 證明 n 人過橋最簡走法

前面已經有 4 人過橋的窮舉為例，我試著去證明 n 人過橋時最簡走法是一人提燈走法或二人提燈走法。討論 4 步驟送 2 人($P_{n-1}P_n$)過橋

步驟	來回	秒數
1	P_aP_b 去	$P_b(P_a<P_b)$
2	P_c 回	P_c
3	P_dP_e 去	$P_e(P_d<P_e)$
4	P_f 回	P_f

觀察右表，我發現:

1. P_c 為 P_a 或 P_b，因為 $P_a<P_b$，所以 P_c 為 P_a 較快，以下皆以此代入。

2. P_a、P_b、P_d、P_e 其中有 2 個是 P_{n-1} 和 P_n，因此(P_{n-1}, P_n)可能情形有(P_a, P_b)、(P_d, P_e)、(P_b, P_e)、(P_e, P_b)，以下分別討論。

(1)(P_{n-1}, P_n)為(P_a, P_b)類型

步驟	來回	秒數
1	$P_{n-1}P_n$ 去	P_n
2	P_{n-1} 回	P_{n-1}
3	P_dP_e 去	P_e
4	P_f 回	P_f

比對之後，我發現:

1. P_e 是 P_{n-1}

2. P_f 是 P_d 最快，可以是 P_1–P_n 任何一個，以 P_1 為最快。

將這種類型的最簡走法表列如下

步驟	來回	秒數
1	$P_{n-1}P_n$ 去	P_n
2	P_{n-1} 回	P_{n-1}
3	P_1P_{n-1} 去	P_{n-1}
4	P_1 回	P_1
	秒數共	$P_1+2P_{n-1}+P_n$

(2)(P_{n-1}, P_n)為(P_d,　P_e)類型

步驟	來回	秒數

比對之後，我發現:

1	P_aP_b 去	P_b
2	P_a 回	P_a
3	$P_{n-1}P_n$ 去	P_n
4	P_f 回	P_f

1. P_f 為 P_b 最快。

2. P_a 可以是 P_1-P_n 任何一個，以 P_1 為最快。

3. P_f 為 P_b，又 P_b 和 P_a 不同，所以 P_b=P_f 為 P_2 最快。

將這種類型的最簡走法表列如下

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	P_2
2	P_1 回	P_1
3	$P_{n-1}P_n$ 去	P_n
4	P_2 回	P_2
	秒數共	$P_1+2P_2+P_n$

(3)(P_{n-1}, P_n)為(P_b, P_e)類型

步驟	來回	秒數
1	P_aP_{n-1} 去	P_{n-1}
2	P_a 回	P_a
3	P_dP_n 去	P_n
4	P_f 回	P_f

比對之後，我發現:

1. P_f 為 P_d 最快。

2. P_a 可以是 P_1-P_n 任何一個，以 P_1 為最快。

3. P_d 為 P_f，可以是 P_1-P_n 任何一個，以 P_1 為最快。

將這種類型的最簡走法表列如下

步驟	來回	秒數
1	P_1P_{n-1} 去	P_{n-1}
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_n 去	P_n
4	P_1 回	P_1
	秒數共	$2P_1+2P_{n-1}+P_n$

(4)(P_{n-1}, P_n)為(P_e, P_b)類型

步驟	來回	秒數
1	P_aP_n 去	P_n
2	P_a 回	P_a
3	P_dP_{n-1} 去	P_{n-1}
4	P_f 回	P_f

比對之後，我發現:

1. P_f 為 P_d 最快。
2. P_a 可以是 P_1–P_n 任何一個，以 P_1 為最快。
3. P_d 為 P_f，可以是 P_1–P_n 任何一個，以 P_1 為最快。

將這種類型的最簡走法表列如下

步驟	來回	秒數
1	P_1P_n 去	P_n
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_{n-1} 去	P_{n-1}
4	P_1 回	P_1
	秒數共	$2P_1+2P_{n-1}+P_n$

(5)秒數比較

第(1)類型	$P_1+2P_{n-1}+P_n$
第(2)類型	$P_1+2P_2+P_n$
第(3)類型	$2P_1+2P_{n-1}+P_n$
第(4)類型	$2P_1+2P_{n-1}+P_n$

經過比較，可發現第(1)類型比第(2)類型慢。

第(2)類型的走法是二人提燈走法。

第(3)類型=第(4)類型是一人提燈走法。

因此 n 人過橋最簡走法必為一人提燈走法或二人提燈走法得證。

(6)說明為何討論 4 步驟送 2 人($P_{n-1}P_n$)過橋

因為不論是 6 步驟、8 步驟、10 步驟……，其走法肯定是一人提燈走法和二人提燈走法的混搭或變形。而在一人提燈走法較二人提燈走法快時，插入二人提燈走法，必會變慢，同理二人提燈走法較快時亦是。以下舉例說明:

如左表，若將第 3、4 步驟和第 5、6 步驟交換，則可發現形成一個前 4 步是二人提燈走法，後兩步是一人提燈走法的走法。

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	P_2
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_{n-2} 去	P_{n-2}
4	P_1 回	P_1
5	$P_{n-1}P_n$	P_n
6	P_2	P_2
	秒數共	$2P_1+2P_{n-1}+P_n$

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	P_2
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_{n-2} 去	P_{n-2}
4	P_1 回	P_1
5	$P_{n-1}P_n$	P_n
6	P_2	P_2
	秒數共	$2P_1+2P_{n-1}+P_n$

(四)最簡走法通式

1. 討論這兩種走法在何時較快。

令 P_1 秒數為 W，P_2 秒數為 X，P_{n-1} 秒數為 Y，P_n 秒數為 Z，其中 $W < X < \cdots < Y < Z$，將步驟及秒數列於下表。

一人提燈走法(完整 4 步驟)

步驟	來回	秒數
1	P_1P_n 去	Z
2	P_1 回	W
3	P_1 P_{n-1} 去	Y
4	P_1 回	W
	秒數共	2W+Y+Z

二人提燈走法(完整 4 步驟)

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2 去	X
2	P_1 回	W
3	P_n P_{n-1} 去	Z
4	P_1 回	X
	秒數共	W+2X+Z

2. 當**一人提燈走法**較快時

$$2W+Y+Z<W+2X+Z$$

$$W+Y<2X$$

$$X>(W+Y)/2$$

3. 當**二人提燈走法**較快時

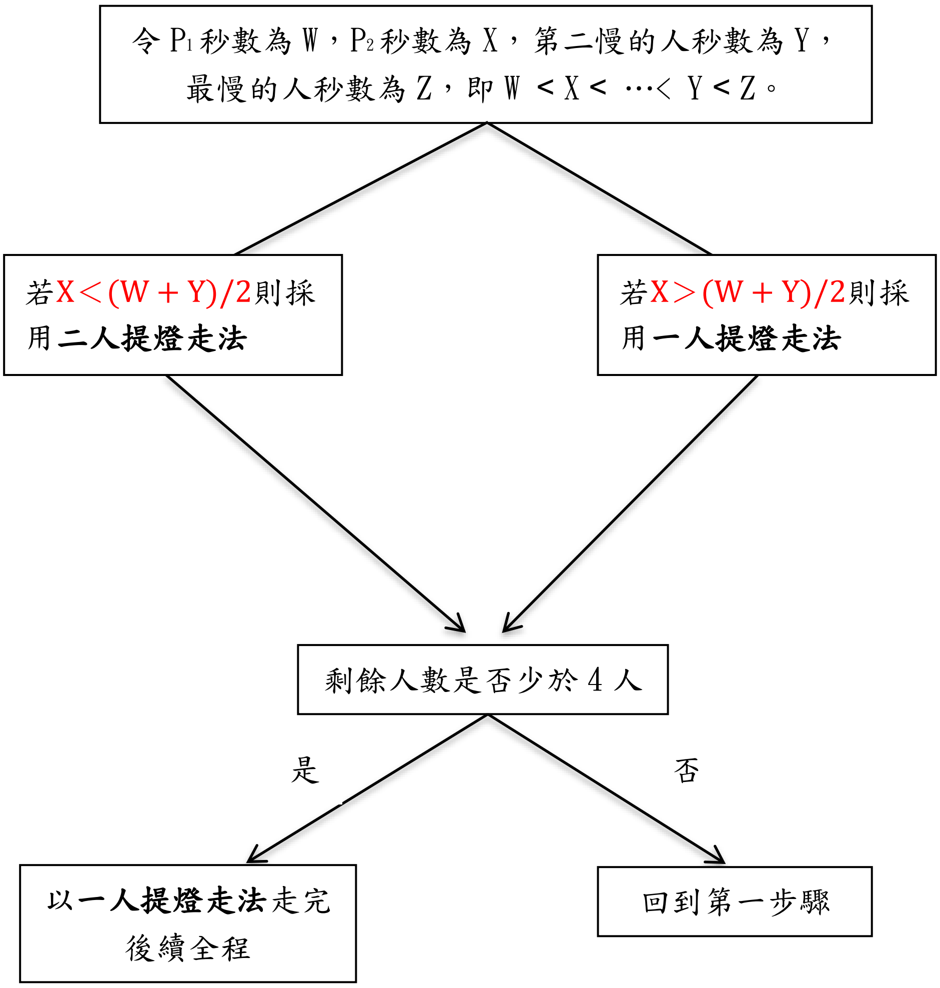
$$2W + Y + Z > W + 2X + Z$$

$$W + Y > 2X$$

$$X < (W + Y)/2$$

4. 當**剩餘人數少於 4 人**時，無法完成完整 4 步驟，此時**由 P_1 帶領所有人輪番過橋。**

(五)走法通式結論



二、研究二、秒數為等差規則走法公式

有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、2、3……n，呈現等差規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，找出最簡秒數的走法及公式。

(一)想法

由研究一可知，在 $X<(W+Y)/2$ 時，採用二人提燈走法，將 W=1、X=2、Y=n-1、Z=n 代入，可得在 n>4 時採用二人提燈走法，但因在 n=4 時，兩種走法一樣快，因此在 **n>3** 時採用**二人提燈走法**，再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式

(二)分析

1. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察**二人提燈走法**，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

步驟	第 1 輪	說明
1	$P_1P_2 \rightarrow$ 2	P_1P_2 過橋，因為 P_2 秒數較多，所以需要 2 秒。
2	$P_1 \leftarrow 1$	P_1 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數 1 秒，P_2 還留在橋尾。
3	$P_{n-1}P_n \rightarrow n$	秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 過橋，需要 n 秒。
4	$P_2 \leftarrow$ 2	留在橋尾的 P_2 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。

2. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 m=(n-2)÷2 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 P_1P_2 過橋，第 2 步 P_1 回橋頭，第 3 步由 n 人中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步 P_2 回橋頭；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

輪數	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪		第 m 輪
步驟	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1}P_n \rightarrow n$ $P_2 \leftarrow$ 2	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-3}P_{n-2} \rightarrow n-2$ $P_2 \leftarrow$ 2	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-5}P_{n-4} \rightarrow n-4$ $P_2 \leftarrow$ 2	…	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \rightarrow n-2(m-1)$ $P_2 \leftarrow$ 2

3. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪		第 m 輪
第 1 步	2	2	2	…	2
第 2 步	1	1	1		1
第 3 步	n	n-2=n-1x2	n-4=n-2x2		n-2(m-1)
第 4 步	2	2	2		2
小計	n+5	(n+5)-2x1	(n+5)-2x2		(n+5)-2x(m-1)

4. 合計

第 1 輪+第 2 輪+…+第 m 輪

=(n+5)+〔(n+5)- 2x1〕+〔(n+5)- 2x2〕+…+〔(n+5)- 2x(m-1)〕

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m} n+5-2(k-1)$$

化簡得

$$\mathrm{m(n+7)-m(m+1)}$$

5. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 **m(n+7)-m(m+1)+R**

A. n=2，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 R=2 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 m(n+7) - m(m+1)+2

B. n=2k+1，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=6 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 m(n+7) - m(m+1)+6

(三)推廣至公差為 d

上述的內容皆為公差為 1 之研究，我嘗試推廣至將公差 d 視為一個變數，找出公差為 d 時的最簡走法公式。有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、1+d、1+2d……1+(n-1)d，其中 d 為不小於 1 的正整數，呈現等差規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

1. 想法

由研究一可知，在$X<(W+Y)/2$時，採用二人提燈走法，將 W=1、X=1+d、Y=1+(n-2)d、Z=1+(n-1)d 代入，可得在 n>3 時採用**二人提燈走法**，再將人數少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式。

2. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察**二人提燈走法**，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

步驟	第 1 輪	說明

1	$P_1P_2 \to 1+d$	P_1P_2過橋，因為P_2秒數較多，所以需要1+d秒。
2	$P_1 \leftarrow 1$	P_1秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數1秒，P_2還留在橋尾。
3	$P_{n-1}P_n \to 1+(n-1)d$	秒數最多的$P_{n-1}P_n$過橋，需要1+(n-1)d秒。
4	$P_2 \leftarrow 1+d$	留在橋尾的P_2秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。

3. 完整4步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數n人，完整4步驟的輪數 m=(n-2)÷2 的商。(剩餘人數少於4人時另外討論)

(2)第1步一律是P_1P_2過橋，第2步P_1回橋頭，第3步從n人中秒數最多的$P_{n-1}P_n$ 2個人過橋，第4步P_2回橋頭秒數；以上4步成為1輪，可推至第m輪表列如下:

輪數	第1輪	第2輪	第3輪		第m輪
步驟	$P_1P_2 \to 1+d$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1}P_n \to 1+(n-1)d$ $P_2 \leftarrow 1+d$	$P_1P_2 \to 1+d$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-3}P_{n-2} \to 1+(n-3)d$ $P_2 \leftarrow 1+d$	$P_1P_2 \to 1+d$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-5}P_{n-4} \to 1+(n-5)d$ $P_2 \leftarrow 1+d$	…	$P_1P_2 \to 1+d$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \to$ 1+〔n-1-2(m-1)〕d $P_2 \leftarrow 1+d$

4. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

	第1輪	第2輪	第3輪		第m輪
第1步	1+d	1+d	1+d	…	1+d
第2步	1	1	1		1
第3步	1+(n-1)d	1+(n-3)d	1+(n-5)d		1+〔n-1-2(m-1)〕d
第4步	1+d	1+d	1+d		2
小計	4+(n+1)d	4+(n-1)d	4+(n-3)d		4+〔n+1-2(m-1)〕d

5. 合計

第1輪+第2輪+⋯+第m輪

=〔4+(n+1)d〕+〔(4+(n-1)d〕+〔4+(n-3)d〕+⋯+〔4+〔n+1-2(m-1)〕d〕

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m} 4+[n+1-2(k-1)]$$

化簡得

$$m(nd+3d+4)-m(m+1)d$$

6. 完整秒數公式

(1)前面m輪，每1輪的完整步驟是4步，已經送走2m個人，剩餘人數無法進行完整1輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中n為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為$m(nd+3d+4)-m(m+1)d+R$

A. n=2，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 R=1+d 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(1+d)$

B. n=2k+1，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=3d+3 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(3d+3)$

三、研究三、秒數為等比規則走法公式

有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、2、4……2^{n-1}，呈現等比規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，找出最簡秒數的走法及公式。

(一)想法

由研究一可知，在$X<(W+Y)/2$時，採用二人提燈走法，將 W=1、X=2、Y=2^{n-2}、Z=2^{n-1}代入，可得在 $n>3$時採用**二人提燈走法**再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式

(二)分析

1. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察以上各步驟的整理，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法: **以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

步驟	第 1 輪	說明
1	$P_1P_2\rightarrow 2$	P_1P_2過橋，因為 P_2秒數較多，所以需要 2 秒。
2	$P_1\leftarrow 1$	P_1秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，
3	$P_{n-1}P_n\rightarrow 2^{n-1}$	$P_{n-1}P_n$ 過橋，需要 2^{n-1} 秒。
4	$P_2\leftarrow 2$	留在橋尾的 P_2秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。

2. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 m=(n-2)÷2 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 P_1P_2過橋，第 2 步 P_1回橋頭，第 3 步從 n 人中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步 P_2回橋頭；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

輪數	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪		第 m 輪
步驟	$P_1P_2\rightarrow 2$ $P_1\leftarrow 1$ $P_{n-1}P_n\rightarrow 2^{n-1}$ $P_2\leftarrow 2$	$P_1P_2\rightarrow 2$ $P_1\leftarrow 1$ $P_{n-3}P_{n-2}\rightarrow 2^{n-3}$ $P_2\leftarrow 2$	$P_1P_2\rightarrow 2$ $P_1\leftarrow 1$ $P_{n-5}P_{n-4}\rightarrow 2^{n-5}$ $P_2\leftarrow 2$	…	$P_1P_2\rightarrow 2$ $P_1\leftarrow 1$ $P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)}\rightarrow 2^{n-2(m-1)}$ $P_2\leftarrow 2$

3. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪		第 m 輪
第 1 步	2	2	2	…	2
第 2 步	1	1	1		1
第 3 步	2^{n-1}	2^{n-3}	2^{n-5}		$2^{n-2(m-1)}$
第 4 步	2	2	2		2
小計	$2^{n-1}+5$	$2^{n-3}+5$	$2^{n-5}+5$		$2^{n-2(m-1)}+5$

4. 合計

第 1 輪+第 2 輪+…+第 m 輪

$=(2^{n-1}+5)+(2^{n-3}+5)+(2^{n-5}+5)+\cdots+(2^{n-2(m-1)}+5)]$

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{n-2(k-1)}+5$$

化簡得

$$2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5m$$

5. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 $2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5n+R$

A. n=2k，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 R=2 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5m+2$

B. n=2k+1，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=7 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{n-2(m-1)}+5m+7$

(三)推廣至公差為 r

上述的內容皆為公比為 2 之研究，我嘗試推廣至將公比 r 視為一個變數，找出公比為 r 時的最簡走法公式。有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、r、r^2……r^{n-1}，其中 r 為不小於 2 的正整數呈現等比規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

1. 想法

由研究一可知，在X＜(W＋Y)/2時，採用二人提燈走法，將 $W=1$、$X=r^2$、$Y=r^{n-2}$、$Z=r^{n-1}$代入，可得在 $n>3$ 時採用**二人提燈走法**再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式

2. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察以上各步驟的整理，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

步驟	第 1 輪	說明
1	$P_1P_2 \rightarrow r$	P_1P_2 過橋，因為 P_2 秒數較多，所以需要 r 秒。
2	$P_1 \leftarrow 1$	P_1 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，
3	$P_{n-1}P_n \rightarrow r^{n-1}$	$P_{n-1}P_n$ 過橋，需要 r^{n-1} 秒。
4	$P_2 \leftarrow r$	留在橋尾的 P_2 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。

3. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 $m=(n-2)\div2$ 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 P_1P_2 過橋，第 2 步 P_1 回橋頭，第 3 步從 n 人中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步 P_2 回橋頭；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

輪數	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪		第 m 輪
步驟	$P_1P_2 \rightarrow r$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1}P_n \rightarrow r^{n-1}$ $P_2 \leftarrow r$	$P_1P_2 \rightarrow r$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-3}P_{n-2} \rightarrow r^{n-3}$ $P_2 \leftarrow r$	$P_1P_2 \rightarrow r$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-5}P_{n-4} \rightarrow r^{n-5}$ $P_2 \leftarrow r$	…	$P_1P_2 \rightarrow r$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \rightarrow r^{n-2(m-1)}$ $P_2 \leftarrow r$

4. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪		第 m 輪
第 1 步	r	r	r		r
第 2 步	1	1	1		1
第 3 步	r^{n-1}	r^{n-3}	r^{-5}	…	$r^{n-2(m-1)}$
第 4 步	r	r	r		r
小計	$r^{n-1}+2r+1$	$r^{n-3}+2r+1$	$r^{n-5}+2r+1$		$r^{n-2(m-1)}+2r+1$

5. 合計

第 1 輪+第 2 輪+…+第 m 輪

$=(r^{n-1}+2r+1)+(r^{n-3}+2r+1)+(r^{n-5}+2r+1)+\cdots+(r^{n-2(m-1)}+2r+1)$

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m} r^{n-2(k-1)} + 2r+1$$

化簡得

$$r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m$$

6. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+R$

A. $n=2k$，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 $R=r+1$ 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+r+1$

B. $n=2k+1$，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 $R=r^2+r+1$ 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m+r^2+r+1$

四、研究四、秒數為階差規則走法公式

有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、2、5……$(n-1)^2+1$，呈現階差規則，每次最多 2 人過去，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

過橋的 2 人中秒數最多的人為該次過橋的秒數，找出最簡秒數的走法及公式。

(一)第 n 人的秒數

已知 $P_1=1$、$P_2=2$、$P_3=5$、$P_4=10$、$P_5=17$……，我利用**遞迴**關係求出 P_n 的秒數

$P_1=1$
$P_2=P_1+2\times1-1$
$P_3=P_2+2\times2-1$
$P_4=P_3+2\times3-1$
……
$P_n=P_{n-1}+2(n-1)-1$
$P_n=1+\frac{2n(n-1)}{2}1+(n-1)=(n-1)^2+1$

(二)想法

由研究一可知，在$X<(W+Y)/2$時，採用二人提燈走法，將 $W=1$、$X=2$、$Y=(n-2)^2+1$、$Z=(n-1)^2+1$ 代入，可得在 $n>3$ 時採用**二人提燈走法**，再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式。

(三)分析

1. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察以上各步驟的整理，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整

理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

步驟	第 1 輪	說明
1 2 3 4	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1}P_n \rightarrow$ $(n-1)^2+1$ $P_2 \leftarrow$ 2	P_1P_2 過橋，因為 P_2 秒數較多，所以需要 2 秒。 P_1 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數 1 秒，P_2 還留在橋尾。 秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 過橋，需要 $(n-1)^2+1$ 秒。 留在橋尾的 P_2 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。

2. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 $m=(n-2)\div2$ 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 P_1P_2 過橋，第 2 步 P_1 回橋頭，第 3 步由 n 人數中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人過橋，第 4 步 P_2 回橋頭；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下:

輪數	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪		第 m 輪
步驟	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1}P_n \rightarrow (n-1)^2+1$ $P_2 \leftarrow$ 2	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-3}P_{n-2} \rightarrow (n-3)^2+1$ $P_2 \leftarrow$ 2	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-5}P_{n-4} \rightarrow (n-5)^2+1$ $P_2 \leftarrow$ 2	...	$P_1P_2 \rightarrow$ 2 $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \rightarrow [n-2(m-1)-1]^2+1$ $P_2 \leftarrow$ 2

3. 進一步將各步驟的秒數進行分析如下

	第 1 輪	第 2 輪	第 3 輪		第 m 輪
第 1 步	2	2	2		2
第 2 步	1	1	1		1
第 3 步	$(n-1)^2+1$	$(n-3)^2+1$	$(n-5)^2+1$	...	$[n-2(m-1)-1]^2+1$
第 4 步	2	2	2		2
小計	$(n-1)^2+6$	$(n-3)^2+6$	$(n-5)^2+6$		$[n-2(m-1)-1]^2+6$

4. 合計

第 1 輪+第 2 輪+…+第 m 輪

$=[(n-1)^2+6]+[(n-3)^2+6]+[(n-5)^2+6]+\cdots+\{[n-2(m-1)-1]^2+6\}$

可求得總合為

$$\sum_{k=1}^{m}(n-2m+1)^2+6$$

化簡得

$$2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)^2$$

5. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為 m(n+7)-m(m+1)+R

A. n=2k，則 $m=\frac{n-2}{2}$，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 R=2 秒代入完整秒數公式可求得秒數為 $2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)^2+2$

B. n=2k+1，則 $m=\frac{n-3}{2}$，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=8 秒代入完整秒數公式可求得秒數為 $2m(m+1)(2m+1)/3-2m(m+1)(n+1)+m(n+1)^2+8$

(四)推廣至階差為 t

上述的內容皆為階差為 2 之研究，我嘗試推廣至將階差 t 視為一個變數，找出公比為 t 時的最簡走法公式。有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、$P_1+t-(t-1)$、$P_2+2t-(t-1)$……$P_{n-1}+(n-1)t-(t-1)$，其中 t 為不小於 1 的正整數呈現階差規則，每次最多 2 人過去，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

1. 第 n 人的秒數

已知 $P_1=1$、$P_2= P_1+t-(t-1)$、$P_3= P_2+2t-(t-1)$……，我利用**遞迴**關係求出 P_n 的秒數

$P_1=1$
$P_2=P_1+t-(t-1)$
$P_3=P_2+2t-(t-1)$
$P_4=P_3+3t-(t-1)$
……
$P_n=P_{n-1}+(n-1)t-(t-1)1$
$P_n=1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$

2. 想法

由研究一可知，在$X<(W+Y)/2$時，採用二人提燈走法，將 W=1、X=2、$Y=1+\frac{(n-1)t(n-2)}{2}1+(n-2)-(n-2)(t-1)$、$Z=1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$代入，可得在 $n>3$時採用**二人提燈走法**，再將少於四人時的情況討論之，即為最簡秒數走法和公式。

3. 完整 4 步驟的輪數 m

觀察以上各步驟的整理，可發現每 4 個步驟就會有規律的走法，我把這走法稱為一「輪」，整理之後就可以推導出 n 人的走法:**以下完整步驟共 4 步，可送走 2 人過橋**

步驟	第 1 輪	說明
1	$P_1P_2\rightarrow 2$	P_1P_2 過橋，因為 P_2 秒數較多，所以需要 2 秒。
2	$P_1\leftarrow 1$	P_1 秒數最少，所以當提燈人回到橋頭，秒數 1

3	$P_{n-1}P_n \rightarrow 1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$	秒，P_2還留在橋尾。 秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 過橋，需要$(n-1)^2+1$ 秒。
4	$P_2 \leftarrow 2$	留在橋尾的 P_2秒數最少，所以當提燈人回到橋頭。

4. 完整 4 步驟的輪數時推算其中的秒數公式

(1)如果人數 n 人，完整 4 步驟的輪數 m=(n-2)÷2 的商。(剩餘人數少於 4 人時另外討論)

(2)第 1 步一律是 P_1P_2去，第 2 步 P_1 回，第 3 步從人數中秒數最多的 $P_{n-1}P_n$ 2 個人去，第 4 步 P_2 回秒數；以上 4 步成為 1 輪，可推至第 m 輪表列如下：

輪數	第 m 輪
步驟	$P_1P_2 \rightarrow 2$ $P_1 \leftarrow 1$ $P_{n-1-2(m-1)}P_{n-2(m-1)} \rightarrow 1+\frac{nt(n-1)}{2}1+(n-1)-(n-1)(t-1)$ $P_2 \leftarrow 2$

因計算過程繁雜，省略不寫，我求得總和為

$$6\mathrm{m}+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)$$

5. 完整秒數公式

(1)前面 m 輪，每 1 輪的完整步驟是 4 步，已經送走 2m 個人，剩餘人數無法進行完整 1 輪。

(2)如果剩餘人數不同時，秒數就會不同，此為推導出公式的最重要關鍵，其中 n 為總人數。

(3)令剩餘人數所需秒數為 R，則完整秒數公式為$\mathbf{6m+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)}+R$

A. n=2k，則 m=$\frac{n-2}{2}$，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 R=3 秒代入完整秒數公式可求得秒數為

$$6\mathrm{m}+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+3$$

B. n=2k+1，則 m=$\frac{n-3}{2}$，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=6+t 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為

$$6\mathrm{m}+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+$$

$m(m-1)+6+t$

陸、結論

本研究探討有 n 人要過橋，每人過橋的秒數不一，每次可過橋的人數為 2 人，所以我改變秒數規則，來計算出 n 人要過橋所需最簡秒數的公式。

一、結論一：速度規則不一走法公式。

證明 n 人過橋最簡走法

前面已經有 4 人過橋的窮舉為例，我試著去證明 n 人過橋時最簡走法是一人提燈走法或二人提燈走法。討論 4 步驟送 2 人($P_{n-1}P_n$)過橋

步驟	來回	秒數
1	P_aP_b 去	$P_b(P_a<P_b)$
2	P_c 回	P_c
3	P_dP_e 去	$P_e(P_d<P_e)$
4	P_f 回	P_f

觀察右表，我發現:

1. P_c 為 P_a 或 P_b，因為 $P_a<P_b$，所以 P_c 為 P_a 較快，以下皆以此代入。

2. P_a、P_b、P_d、P_e 其中有 2 個是 P_{n-1} 和 P_n，因此(P_{n-1}, P_n)可能情形有(P_a, P_b)、(P_d, P_e)、(P_b, P_e)、(P_e, P_b)，以下分別討論。

(1)(P_{n-1}, P_n)為(P_a, P_b)類型

(2)(P_{n-1}, P_n)為(P_d, P_e)類型

(3)(P_{n-1}, P_n)為(P_b, P_e)類型

(4)(P_{n-1}, P_n)為(P_e, P_b)類型

(5)秒數比較

第(1)類型	$P_1+2P_{n-1}+P_n$
第(2)類型	$P_1+2P_2+P_n$
第(3)類型	$2P_1+2P_{n-1}+P_n$
第(4)類型	$2P_1+2P_{n-1}+P_n$

經過比較，可發現第(1)類型比第(2)類型慢。

第(2)類型的走法是二人提燈走法。

第(3)類型=第(4)類型是一人提燈走法。

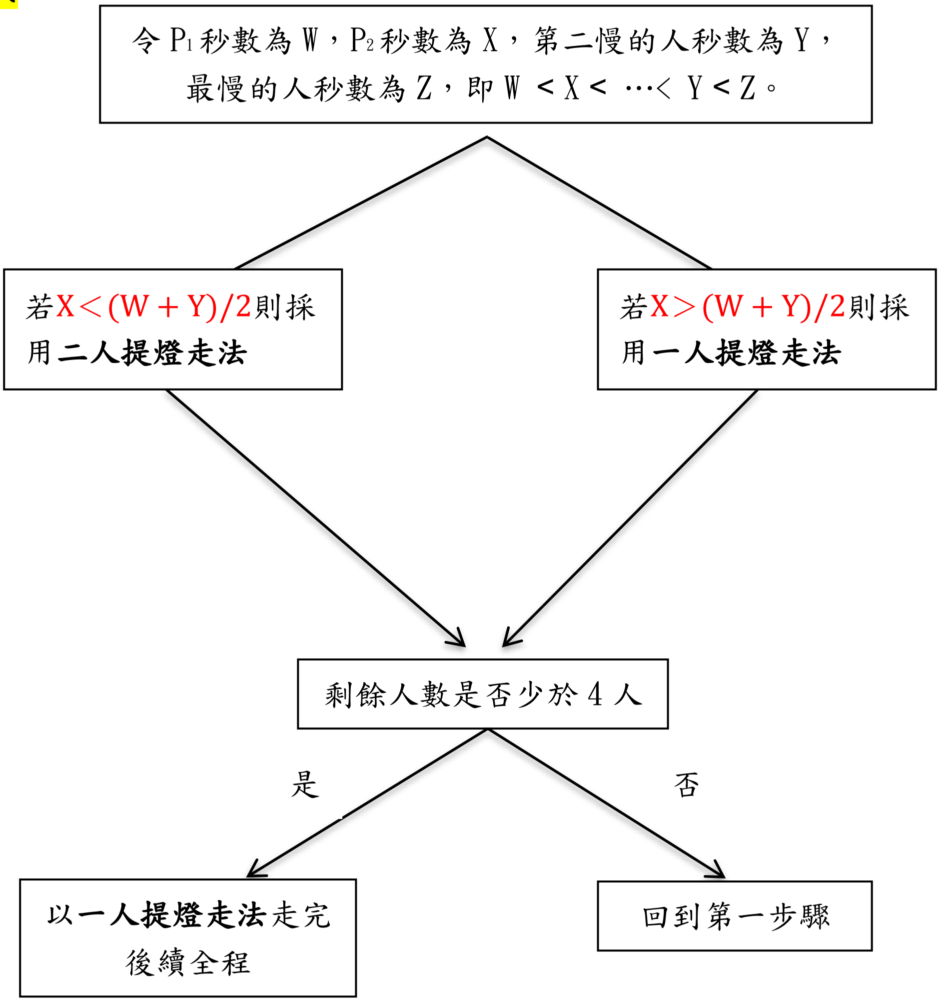
因此 n 人過橋最簡走法必為一人提燈走法或二人提燈走法得證。

(6)說明為何討論 4 步驟送 2 人($P_{n-1}P_n$)過橋

因為不論是 6 步驟、8 步驟、10 步驟……，其走法肯定是一人提燈走法和二人

提燈走法的混搭或變形。而在一人提燈走法較二人提燈走法快時，插入二人提燈走法，必會變慢，同理二人提燈走法較快時亦是。

最簡走法通式



由此結論即可推至所有過橋情況的走法。

二、結論二：秒數為等差規則走法公式。

有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、1+d、1+2d……1+(n−1)d，其中 d 為不小於 1 的正整數，呈現等差規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

A. n=2，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 R=1+d 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(1+d)$

B. n=2k+1，剩餘人數為 P_1P_2+P_3 3 人，需要 R=3d+3 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $m(nd+3d+4)-m(m+1)d+(3d+3)$

二、結論二：秒數為等比規則走法公式。

有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、r、r^2……r^{n-1}，其中

r 為不小於 2 的正整數呈現等比規則，每次最多 2 人過橋，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

A. n=2k，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 R=r+1 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m\ +r+1$

B. n=2k+1，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 $R=r^2+r+1$ 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為 $r^{n-1}+r^{n-3}+r^{n-5}+\cdots+r^{n-2(m-1)}+(2r+1)m\ +r^2+r+1$

四、結論四：秒數為階差規則走法公式。

有 n 個人要過橋，分別為 P_1、P_2、…、P_n，他們過橋的秒數分別為 1、P_1+t-(t-1)、P_2+2t-(t-1)……P_{n-1}+(n-1)t-(t-1)，其中 t 為不小於 1 的正整數呈現階差規則，每次最多 2 人過去，過橋時必須有人提燈籠，但燈籠只有一個，所以每次過橋後對岸需有 1 人提燈籠回到橋頭，帶剩餘的人至對岸，直到所有人都過橋。

A. n=2k，則 $m=\frac{n-2}{2}$，剩餘人數為 P_1P_2 2 人，需要 R=3 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$6\mathrm{m}+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+3$

B. n=2k+1，則 $m=\frac{n-3}{2}$，剩餘人數為 $P_1P_2+P_3$ 3 人，需要 R=6+t 秒代入完整秒數公式可求得

秒數為$6\mathrm{m}+\frac{mt(n+1)(n+2)}{2}-m(nt-n+2t-2)-\frac{mt(m+1)(2m+1)}{3}-\frac{5mt(m+1)}{2}-ntm(m-1)+m(m-1)+6+t$

我在過橋的公式推算中，成功找出秒數為等差、等比、階差規則走法與最簡秒數公式。

柒、參考資料

無作者(無日期)。樂和遊戲-過橋遊戲。民國 106 年 3 月 10 日取自：http://www.novelgames.com/zh-HK/spgames/bridge/

王靖富(民 106 年)。過橋遊戲餘數分類解法。嘉義市第三十五屆中小學科展作品說明書。

蔡玗真(民 103 年)。過橋遊戲探討。嘉義市第三十二屆中小學科學展覽會作品說明書。

陳淵琮(民 92 年)。如何最快。中華民國第四十三屆中小學科學展覽會作品說明書。

張蒔曦(民 97 年)。過橋問題。中華民國第四十八屆中小學科學展覽會作品說明書。

Gunter Rote(民 91 年)。Crossing the bridge at night。
https://www.researchgate.net/publication/220530399_Crossing_the_Bridge_at_Night

Cristian S. Calude and Elena Calude. The Bridge Crossing Problem. EATCS Bulletin (Bull. Europ. Assoc. Theoret. Comput. Sci.), No. 77, June 2002, 180–190

捌、心得

這一件科展是我從小六開始做的，小六一開始我是做另一個主題，後來在一月時，老師覺得我們的題目沒有很好，就找到之前學長姐做的一份報告，叫做:過橋遊戲探討，老師要我自己摸索學長姐的這件作品，把所有的資料都看過一遍，看有沒有更好的規則或是能發展的內容，學長姐的這件科展是做 n 個人過橋秒數是 1、2、3……n 秒，探討每次 2 人、3 人、4 人過橋的最簡走法，但都有特例，後來，我找到一種走法不會有特例的，並且我嘗試去證明它是最簡的，但證明並不是非常的成功，後來我也從 2 人、3 人過橋的規律找出了 x 人過橋的公式，不過因為很複雜了，導致我們推導的沒有很詳盡，在比賽中我們也並沒有表現得很好，最終獲得了佳作獎。

上了國二之後，因為學校的關係，我要再做一次科展，我就想到了小六做的那件作品，我這次是獨立一個人完成的，把國小的作品拿起來參閱，讓我訝異的是我又發現了不同的想法，我在上網搜尋後發現了許多研究，它們的規則都不盡相同，我想說能不能把所有的情況都用一種最大的準則來囊括，再由這個準則去推導出所有情況的公式，於是我就在研究一討論了 n 人過橋的秒數沒有規則的情況，每次只能 2 人過橋，我重新再從最基本的狀況討論起，發現了一人提燈走法以及二人提燈走法兩種最快的走法，並且經過討論之後也找到了把所有的情況都囊括的一個最大的準則，而我也探討了過橋秒數規則等差=1(國小)、等比=2、階差=2 的情況，很快的上學期就要接近尾聲，學校會帶我們去彰師大進行獨立研究期中報告。

我數學科的指導教授是杜子明教授，教授給了我建議:1.一人提燈走法和二人提燈走法的步驟再清楚一點，最好用圖像化。2.證明一人和二人提燈走法是最簡的。而後來我都有針對這幾點去做補強，之後，我自己寫 gmail 去給教授，詢問教授的建議，教授告訴我要把公式都確認過，並想辦法證明一人提燈或二人提燈走法是最簡的。老師則告訴我可以再把等差、等比、階差都視為一個變數去討論，增加內容的充實。後來，我再交件前一週想到了證明的方法，並詢問教授的意見，教授也說沒有什麼太大的問題，我就放心地加入報告中，交件啦!

玖、附錄

在我尚未證明出一人提燈或二人提燈走法是最簡的時候，我討論過使用窮舉法，而我做到五人過橋之後就因為情況太多就沒有討論了，四人過橋的情況已在報告中當例子了，這兒，我就附上五人過橋的討論。

我推得五人過橋共有 4320 種走法，可能的過橋總計秒數共有 65 種

我已知 $P_1<P_2<P_3<P_4$，經過比對可發現只有黃底的 2 種情況有可能為最快的，我再找出這 2 種情況，可能的走法有 25 種，包括 $3P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$ 有 24 種情況，$2P_1+3P_2+P_3+P_5$ 有 1 種情況，詳細表列如下:

$7P_5$	$P_1+P_3+5P_5$	$P_1+P_4+5P_5$	$P_1+P_2+5P_5$	$2P_2+5P_5$
$2P_3+5P_5$	$2P_4+5P_5$	$P_3+P_4+5P_5$	$P_2+P_4+5P_5$	$P_2+P_3+5P_5$
$2P_1+P_2+P_3+3P_5$	$2P_1+P_3+P_4+3P_5$	$2P_1+P_2+P_4+3P_5$	$P_1+3P_4+3P_5$	$P_1+3P_3+3P_5$
$P_1+2P_2+P_3+3P_5$	$P_1+2P_3+P_4+3P_5$	$P_1+P_3+2P_4+3P_5$	$P_1+2P_2+P_4+3P_5$	$P_1+P_2+2P_4+P_5$
$P_1+P_2+P_3+P_4+3P_5$	$3P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$	$2P_1+3P_2+P_4+P_5$	$2P_1+3P_2+P_3+P_5$	$2P_1+P_2+3P_3+P_5$
$2P_1+P_2+3P_4+P_5$	$2P_1+P_2+2P_3+P_4+P_5$	$2P_1+P_2+P_3+2P_4+P_5$	$2P_1+3P_3+P_4+P_5$	$2P_1+P_3+3P_4+P_5$
$P_1+4P_2+P_4+P_5$	$P_1+4P_2+P_3+P_5$	$P_1+3P_2+P_3+P_4+P_5$	$P_1+2P_2+3P_3+P_5$	$P_1+2P_2+2P_3+P_4+P_5$
$P_1+2P_2+P_3+2P_4+P_5$	$P_1+2P_2+3P_4+P_5$	$P_1+P_2+3P_3+P_4+P_5$	$P_1+P_2+2P_3+2P_4+P_5$	$P_1+P_2+P_3+3P_4+P_5$
$P_1+5P_3+P_5$	$P_1+4P_3+P_4+P_5$	$P_1+3P_2+2P_3+P_5$	$P_1+2P_3+3P_4+P_5$	$P_1+5P_4+P_5$
$4P_2+P_3+P_4+P_5$	$3P_2+3P_3+P_5$	$3P_2+2P_3+P_4+P_5$	$3P_2+P_3+2P_4+P_5$	$3P_2+3P_4+P_5$
$2P_2+3P_3+P_4+P_5$	$2P_2+2P_3+2P_4+P_5$	$2P_2+P_3+3P_4+P_5$	$P_2+5P_3+P_5$	$P_2+4P_3+P_4+P_5$
$P_2+3P_3+2P_4+P_5$	$P_2+2P_3+3P_4+P_5$	$P_2+P_3+4P_4+P_5$	$P_2+5P_4+P_5$	$5P_3+P_4+P_5$
$4P_2+2P_3+P_5$	$3P_3+3P_4+P_5$	$2P_3+4P_4+P_5$	$P_3+5P_4+P_5$	$6P_4+P_5$

我再找出這 2 種情況，列出可能的走法有 25 種，包括 $3P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$24 種，$2P_1+3P_2+P_3+P_5$1 種，詳細走法表列如下

(1) $3P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$ 類型：從這 24 種走法可以發現，都是採用「一人提燈走法」的規則。

我只舉其中幾個為例，這 24 種走法皆為一人提燈走法。

步驟	來回	秒數
1	P_1P_5 去	P_5
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_4 去	P_4
4	P_1 回	P_1
5	P_1P_3 去	P_3
6	P_1 回	P_1
7	P_1P_2 去	P_2
	秒數共	$3P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$

步驟	來回	秒數
1	P_1P_5 去	P_5
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_4 去	P_4
4	P_1 回	P_1
5	P_1P_2 去	P_2
6	P_1 回	P_1
7	P_1P_3 去	P_3
	秒數共	$3P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$

步驟	來回	秒數
1	P_1P_5 去	P_5
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_3 去	P_3
4	P_1 回	P_1

步驟	來回	秒數
1	P_1P_5 去	P_5
2	P_1 回	P_1
3	P_1P_3 去	P_3
4	P_1 回	P_1

5	P_1P_2去	P_2	5	P_1P_4去	P_4
6	P_1 回	P_1	6	P_1 回	P_1
7	P_1P_4去	P_4	7	P_1P_2去	P_2
	秒數共	$3P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$		秒數共	$3P_1+P_2+P_3+P_4+P_5$

(2) $2P_1+3P_2+P_3+P_5$類型：從這種走法可以發現，是採用「二人提燈走法」的規則。

步驟	來回	秒數
1	P_1P_2去	P_2
2	P_1 回	P_1
3	P_4P_5去	P_5
4	P_2 回	P_2
5	P_1P_2去	P_2
6	P_1 回	P_1
7	P_1P_3去	P_3
	秒數共	$2P_1+3P_2+P_3+P_5$

(3)綜合以上，因此我確定 5 人過橋最簡走法有一人提燈走法或二人提燈走法。