

嘉義市第 37 屆中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學

組 別：國小組

作品名稱：KenKen 解密

關 鍵 詞：KenKen、幻方、數獨

編號：

KenKen 解密

研究摘要

在本研究中，我們先找出 n 階 KenKen 方格內數字排列規則，然後用來推出 n 階幻方，並延伸變化出其他的幻方與 KenKen 的數字排列方式；而且，我們在演算 KenKen 數字排列組合的過程中，發現了費式數列卻巧妙隱藏在其中的趣事。

壹、研究動機

KenKen 是數獨遊戲一種，KenKen 和幻方似乎有著相同之處，KenKen 與幻方之間是否存在著關連，引起我們的研究動機，且探討兩者可能的數字排列變化。

貳、研究目的

- 一、了解 KenKen 的基本研究定義
- 二、找出 n 階 KenKen 方格內數字排列規則
- 三、以 n 階 KenKen 規律來解出 n 階幻方
- 四、幻方與 KenKen 數字可能的延伸變化

參、研究設備與器材

紙、筆、Excel 軟體

肆、研究過程

一、KenKen 的基本研究定義

以下說明 KenKen 基本的解題方法，

1. 三階 KenKen 內的每一行與列的數字為 1~3，四階 KenKen 內的每一行與列的數字為 1~4，以此類推...， n 階 KenKen 內的每一行與列的數字為 1~ n ，且數字只能出現一次不能重複，除非是 L 型區塊內數字。
2. 區塊是利用粗邊框條，將兩個以上方格連接起來，運用了加減乘除的數學四則運算，如："6+" 區塊內，可能有 1、2、3 等三個數字；同時，觀看該數字的前後左右，且利用 $=+ - \times \div$ 的計算，來預測下一個可能且符合邏輯規則的數字。
3. L 形區塊可以位在 KenKen 內任何一地方，且因為是一行與一列的交叉點，所以可以允許 2 個相同數字，如："9x" 區塊內，可能有 3、1、3 等三個數字。

4. 每一個 KenKen 只有唯一解，也就是按照區塊內的運算值(如:"9×")來推出可能的數字，一個一個依序填滿整個 KenKen 方格。

以 4 階 KenKen 為例，解題步驟如下:

1. 先填上固定數字"2" 與 "4"。

2-	3-	16×	
			7+
2÷	2		
	2		
	2-		4
			4

2. 在"3-"區塊可能有"4"與"1"
，所以在第 2 行第 4 列填上"3"。

2-	3-	16×	
			7+
2÷	2		
	2-		4
	3		4

3. 判斷"2-"區塊，在第 4 列填上"1"與"2"，
第 3 列第 1 格填上"4"。

2-	3-	16×	
			7+
2÷	2		
4	2		
	2-		4
2	3	1	4

4. 第 3 列第 3 位不能為"1"，
所以填上"3"，接著是"1"。

2-	3-	16×	
			7+
2÷	2		
4	2	3	1
	2-		4
2	3	1	4

5. 在"7+"區塊中，計算 $7-3-1=3$ ，
所以填上"3"與"2"。

2-	3-	16×	2
			7+
			3
2÷	2		
4	2	3	1
	2-		4
2	3	1	4

6. 在"2-"區塊內必定是"1"與"3"，
在第 1 列第 1 格填上"3"，接著是"1"。

2-	3-	16×	2
3			7+
1			3
2÷	2		
4	2	3	1
	2-		4
2	3	1	4

7. 在"16x"區塊內必定是"2"與"4" 8. 最後，填上"1"與"4"，
 在第3行第1格內填上"4"，接著是"2"。完成了四階 KenKen 解題。

2-	3-	16x	
3		4	2
1		2	7+
1		2	3
2÷	2		
4	2	3	1
2	2-		4
2	3	1	4

2-	3-	16x	
3	1	4	2
1	4	2	7+
1	4	2	3
2÷	2		
4	2	3	1
2	2-		4
2	3	1	4

二、n 階 KenKen 方格內數字排列規則

規則一、區塊內的加減乘除，有不同的放置規則。

“+”或“-”可以出現在兩個數字區塊或三個數字(L形)區塊內。

		3x	
2	4	3	1
8+			
3	2	1	4
1	3	4	6x
4	1	2	2
4	1	2	3

“x”或“÷”可以出現在兩個數字區塊或三個數字(L形)區塊內。

2÷			
2	4	3	1
3	2	1	4
3-			
1	3	4	2
4	2÷		
4	1	2	3

規則二、"k+" 與 "(n-k)+"的 x,y,z 排列組數相同

y	z	x	z	x	y	y	x
x		y		z		z	

7-y	7-z	7-x	7-z	7-x	7-y	7-y	7-x
7-x		7-y		7-z		7-z	

以 6 階 KenKen 為例，

"6+" 為 (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1)(1,4,1)等七組

$$x+y+z=(7-x)+(7-y)+(7-z)=21-(x+y+z)=21-k$$

$$\text{令 } x=1, y=2, z=3$$

$$1+2+3=21-k, k=21-(1+2+3)=15$$

所以，"6+" 與 "15+" 的 x,z,y 排列組合都是七組。

k+	x,y,z 排列組合	N(k) 組
4	121	1
5	131, 212	2
6	123, 132, 213, 231, 312, 321, 141	7
7	124, 142, 214, 241, 412, 421, 232, 151, 313	9
8	125, 152, 512, 521, 215, 251, 134, 143, 413, 431, 314, 341, 323, 161, 242	15
...	...	
13	...	15
14	...	9
15	...	7
16	...	2
17	...	1

規則三、每一行或列的數字和為 $n(n+1)/2$ ，數字乘積為 $n!$

每一行或列的數字和為: $1+2+3+\dots+n=n(n+1)/2$

假設在 6 階 KenKen 中，有一數值 k ，其他數字之和為 $n(n+1)/2-k$

例如： $n=6, 6(6+1)/2-5=21-5=16=k$

每一行或列的數字相乘為 $n! \quad 1*2*3*\dots*n=n!$

假設在 6 階 KenKen 中，有一數值 k ，其他數字乘積為 $n!/k$

例如： $n=6, n!/5=6!/5=720/5=144$

5	k				

延伸問題一：在 6 階 KenKen 中，利用乘除法來求出一數值 A ？

一行或列上數字之和為 $1*21$ ，乘積為 $1*720$

二行或列上數字之和為 $2*21$ ，乘積為 $720*720$

三行或列上數字之和為 $3*21$ ，乘積為 $720*720*720$

$5*24*90*9*20*(6*2)*(4*2)*A=720*720*720$

$2*2*2*3*3*3*3*4*4*4*5*5*5*6*6*A=2*2*2*3*3*3*4*4*4*5*5*5*6*6*6$

$A=2$

延伸問題二：在 6 階 KenKen 中，利用加減法來求出一數值 A ？

$A=21+21-37=5$

延伸問題一

5x			3÷		2÷
24x	90x		9x		
		6÷		20x	
		A			

延伸問題二

		37+			
		A			

規則四、L 形區塊內的數字，允許不同方式的重複數字

以 6 階 KenKen 為例

72x					
6	2				
	6				
			12x		
			2		
			2	3	

16x					
4	1				
	4				
				180x	
				6	
			6	5	

a \ b*b	1	4	9	16	25	36
1	1	4	9	16	25	36
2	2	8	18	32	50	72
3	3	12	27	48	75	108
4	4	16	36	64	100	144
5	5	20	45	80	125	180
6	6	24	54	96	150	216

$$a=\{1,2,3,4,5,6\} \quad b=\{1,2,3,4,5,6\}$$

格內值為 $a*b*b$

$$1=1*1*1 \text{ (三個數字重複，不符)}$$

$$8=2*1*4$$

$$9=3*1*3$$

$$2=1*2*1$$

$$12=2*1*6=2*3*2$$

$$18=3*6*1=3*2*3$$

$$3=1*3*1$$

$$16=4*1*4=2*4*2$$

$$27=3*3*3 \text{ (x)}$$

$$4=1*4*1=2*1*2$$

$$20=4*1*5=2*5*2$$

$$36=3*4*3=6*2*3$$

$$5=1*5*1$$

$$24=1*4*6=2*6*2=3*4*2$$

$$45=3*5*3$$

$$6=1*6*1$$

$$54=3*6*3$$

$$32=4*2*4$$

$$25=5*1*5$$

$$72=6*2*6=3*4*6$$

$$48=4*3*4=2*6*4$$

$$50=5*2*5$$

$$108=6*3*6$$

$$64=4*4*4 \text{ (x)}$$

$$75=5*3*5$$

$$144=6*4*6$$

$$80=4*5*4$$

$$100=5*4*5$$

$$180=6*5*6$$

$$96=4*6*4$$

$$125=5*5*5 \text{ (x)}$$

$$216=6*6*6 \text{ (x)}$$

$$150=5*6*5$$

經過整理如下:

1. 有 0 種排列組合的是:

$$1(1,1,1) \quad 27(3,3,3) \quad 64(4,4,4) \quad 125(5,5,5) \quad 216(6,6,6)$$

因為單一數字重複了三次，不符合規則。

2. 有 1 種排列組合的是:

$$2(1,2,1) \quad 3(1,3,1) \quad 5(1,5,1) \quad 8(2,1,4) \quad 9(3,1,3) \quad 45(3,5,3)$$

$$54(3,6,3) \quad 32(4,2,4) \quad 80(4,5,4) \quad 96(4,6,4) \quad 25(5,1,5) \quad 50(5,2,5)$$

$$75(5,3,5) \quad 100(5,4,5) \quad 150(5,6,5) \quad 108(6,3,6) \quad 144(6,4,6) \quad 180(6,5,6)$$

3. 有 2 種排列組合的是:

4(1,4,1)(2,12) 6(1,6,1)(1,3,2) 12(2,1,6)(2,3,2) 16(4,1,4)(2,4,2)
18(3,1,6)(3,2,3) 20(4,1,5)(2,5,2) 36(3,4,3)(6,2,3) 48(4,3,4)(2,6,4)
72(6,2,6)(3,4,6)

4. 有 3 種排列組合的是:

24(1,4,6)(2,6,2)(2,1,2)

所以，在 6 階 KenKen 中，

(1) 3 個區塊內數值乘積為"1x","27x","64x","125x","216x"，三數字皆相同，不能放入方格內。

(2) 3 個區塊內數值乘積為"4x","6x","12x","16x","18x","20x","24x","36x","48x","72x"，三個數字皆為相異。

(3) 3 個區塊內數值乘積為"2x","3x","4x","5x","6x"；"12x","16x","20x","24x"；
"9x","18x","36x","45x","54x"；"32x","48x","80x","96x"；"25x","50x","75x","100x"
,"150x"；"72x","108x","144x","180x",允許 2 個重複數字。

三、以 n 階 KenKen 規律來解出 n 階幻方

(一) 用三階 KenKen 推出 三階幻方

1. 以一個三階 KenKen 為基礎，依序放上 456,789。

3	1	2
1	2	3
2	3	1

->

3	1	2
4	5	6
8	9	7

2. 左邊行數字往下移一格，右邊行數字往上移一格，即為三階幻方

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(二) 用三階 KenKen 推出 五階幻方

1. 取一個五階 KenKen

4	5	1	2	3
5	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2

2. 將 6,7,8,9,10,⋯,25 數字填入

4	5	1	2	3
10	6	7	8	9
11	12	13	14	15
17	18	19	20	16
23	24	25	21	22

3. 左邊行數字往下移一格與二格，右邊行數字往上移一格與二格，即為五階幻方

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

(三) 用三階 KenKen 推出 七階幻方

1. 取一個七階 KenKen

5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3

2. 將 6,7,8,9,10,⋯,49 數字填入

5	6	7	1	2	3	4
13	14	8	9	10	11	12
21	15	16	17	18	19	20
22	23	24	25	26	27	28
30	31	32	33	34	35	29
38	39	40	41	42	36	37
46	47	48	49	43	44	45

3. 左邊行數字分別往下移一格、二格與三格，右邊行數字分別往上移一格、二格與三格，即為七階幻方

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

(四) 用三階 KenKen 推出 九階幻方

1. 取一個九階 KenKen

6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4

2. 將 6,7,8,9,10,⋯81 數字填入

6	7	8	9	1	2	3	4	5
16	17	18	10	11	12	13	14	15
26	27	19	20	21	22	23	24	25
36	28	29	30	31	32	33	34	35
37	38	39	40	41	42	43	44	45
47	48	49	50	51	52	53	54	46
57	58	59	60	61	62	63	55	56
67	68	69	70	71	72	64	65	66
77	78	79	80	81	73	74	75	76

3. 左邊行數字分別往下移一格、二格、三格與四格，
，右邊行數字分別往上移一格、二格、三格與四格，即為九階幻方

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

(五) 用四階 KenKen 推出 四階幻方

1. 基本圖形

逆時針旋轉 0 度

A

	1	2
	3	4

A'

2	1
4	3

逆時針旋轉 90 度

B

2	4
1	3

B'

4	2
3	1

逆時針旋轉 180 度

C

	4	3
	2	1

C'

3	4
1	2

逆時針旋轉 270 度

D

3	1
4	2

D'

1	3
2	4

2. 組合圖形 A

B		D	
	2 4		3 1
	1 3		4 2
	4 2		1 3
	3 1		2 4
B'		D'	

依序填上數字

2	<u>4</u>	<u>11</u>	9
<u>1</u>	3	12	<u>10</u>
<u>8</u>	6	13	<u>15</u>
7	<u>5</u>	<u>14</u>	16

對調粗字體數字,為 4 階幻方

2	<u>15</u>	<u>8</u>	9	34
<u>14</u>	3	12	<u>5</u>	34
<u>11</u>	6	13	<u>4</u>	34
7	<u>10</u>	<u>1</u>	16	34
34	34	34	34	34

3. 組合圖形 B

A		C	
	1 2		4 3
	3 4		2 1
	2 1		3 4
	4 3		1 2
A'		C'	

依序填上數字

1	<u>2</u>	<u>12</u>	11
<u>3</u>	4	10	<u>9</u>
<u>6</u>	5	15	<u>16</u>
8	<u>7</u>	<u>13</u>	14

對調粗字體數字,為 4 階幻方

1	<u>16</u>	<u>6</u>	11	34
<u>13</u>	4	10	<u>7</u>	34
<u>12</u>	5	15	<u>2</u>	34
8	<u>9</u>	<u>3</u>	14	34
34	34	34	34	34

(六) 用四階 KenKen 推出 八階幻方

1. 基本圖形

逆時針旋轉 0 度

	1	3
	2	4

E'		
	3	1
	4	2

逆時針旋轉 90 度

F		
	3	4
	1	2

F'		
	4	3
	2	1

逆時針旋轉 180 度

G		
	4	2
	3	1

G'		
	2	4
	1	3

逆時針旋轉 270 度

H		
	2	1
	4	3

H'		
	1	2
	3	4

2. 組合圖形

原有的數字排列

	1 2		3 4
	5 6		7 8
	9 10		11 12
	13 14		15 16

小方陣對換

	1 2		3 4
	5 6		7 8
	<u>11</u> <u>12</u>		<u>9</u> <u>10</u>
	<u>15</u> <u>16</u>		<u>13</u> <u>14</u>

粗體字對換

	1 2		<u>7</u> <u>8</u>
	5 6		<u>3</u> <u>4</u>
	11 12		<u>13</u> <u>14</u>
	15 16		<u>9</u> <u>10</u>

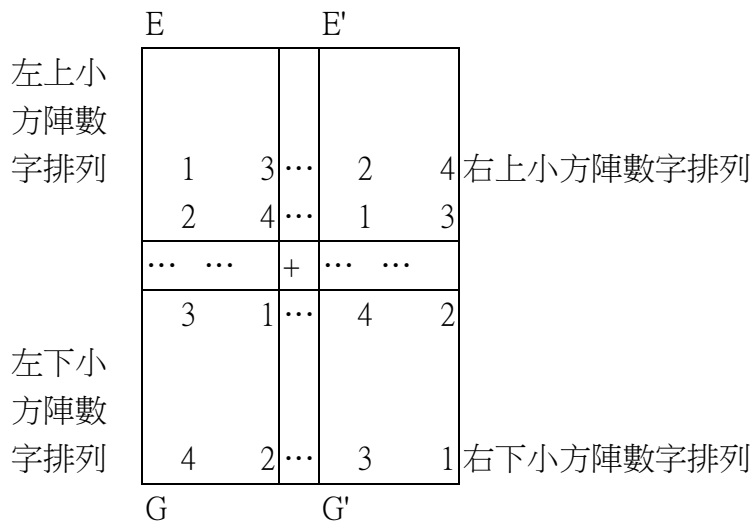
粗體字對換

1	2	<u>7</u>	8
<u>12</u>	<u>11</u>	14	13
6	5	<u>4</u>	3
15	<u>16</u>	9	10

粗體字對換

1	<u>14</u>	11	8
12	7	<u>2</u>	13
6	<u>9</u>	16	3
15	4	<u>5</u>	10

3. 以四階 KenKen 為基礎進行擴展，在 16 個小方陣中，有四大區塊:



(1)(7)(12)(14)四個小方陣內數字排列順序為：
且數字分別加上 1,7,12,14

1	3	E
2	4	

(4)(6)(9)(15)四個小方陣內數字排列順序為：
且數字分別加上 12,20,32,56

3	1	G
4	2	

(2)(8)(11)(13)四個小方陣內數字排列順序為：
且數字分別加上 4,28,40,48

2	4	E'
1	3	

(3)(5)(10)(16)四個小方陣內數字排列順序為：
且數字分別加上 8,16,36,60

4	2	G'
3	1	

整理如下表:

+0 (no.1)	+52 (no.14)	+40 (no.11)	+28 (no.8)
+44 (no.12)	+24 (no.7)	+4 (no.2)	+48 (no.13)
+20 (no.6)	+32 (no.9)	+60 (no.16)	+8 (no.3)
+56 (no.15)	+12 (no.4)	+16 (no.5)	+36 (no.10)

4. 依序填入數字

(1)填入數字 1~32

1	+0 (no.1)	3	+52 (no.14)	+40 (no.11)	30	+28 (8)	32
2		4			29		31
	+44 (no.12)	25	+24 (no.7)	27	6	+4 (no.2)	8
		26		28	5		7
23	+20 (no.6)	21	+32 (no.9)			+60 (no.16)	
24		22			12	+8 (no.3)	10
	+56 (no.15)	15	+12 (no.4)	13	20	+16 (no.5)	18
		16		14	19		17
						+36 (no.10)	

(2)填入數字 33~48

1	+0	3	+52	42	+40	44	30	+28	32
	(no.1)		(no.14)		(no.11)			(no.8)	
2		4		41		43	29		31
45	+44	47	25 +24 27	6 +4 8				+48	
	(no.12)		(no.7)	(no.2)				(no.13)	
46		48	26	5		7			
23	+20	21	35 +32 33		+60		12	+8	10
	(no.6)		(no.9)		(no.16)			(no.3)	
24		22	36				11		9
	+56		15 +12 13	20 +16 18			40	+36	38
	(no.15)		(no.4)	(no.5)				(no.10)	
			16	19		17	39		37

(3)填入數字 49~64

1	+0	3	53 +52 55	42	+40	44	30	+28	32
	(no.1)		(no.14)		(no.11)			(no.8)	
2		4	54	41		43	29		31
45	+44	47	25 +24 27	6 +4 8			50	+48	52
	(no.12)		(no.7)	(no.2)				(no.13)	
46		48	26	5		7	49		51
23	+20	21	35 +32 33	64	+60	62	12	+8	10
	(no.6)		(no.9)		(no.16)			(no.3)	
24		22	36	63		61	11		9
59	+56	57	15 +12 13	20 +16 18			40	+36	38
	(no.15)		(no.4)	(no.5)				(no.10)	
60		58	16	19		17	39		37

可得八階幻方，每一行、列與對角線上數字之和為 260。

1	3	53	55	42	44	30	32
2	4	54	56	41	43	29	31
45	47	25	27	6	8	50	52
46	48	26	28	5	7	49	51
23	21	35	33	64	62	12	10
24	22	36	34	63	61	11	9
59	57	15	13	20	18	40	38
60	58	16	14	19	17	39	37

(七) 用四階 KenKen 推出 六階幻方

1. 以 四階 KenKen 為基本圖形，做出六階方陣

1	2	3	1	1	2
4	3	2	4	4	3
3	4	1	2	3	4
2	1	4	3	2	1
1	2	3	4	1	2
4	3	2	1	4	3

-> 調整為

4	2	4	2	1	2
1	3	1	3	4	3
4	2	1	2	4	2
1	3	4	3	1	3
4	2	4	2	1	2
1	3	1	3	4	3

每一行、列、對角線上的數字和為 15。

2. 每一子方陣內的數字，依序加上 0,4,8,12,16,20,24,28,32。

4 +28 (no.8)	2	4 +0 (no.1)	2	1 +20 (no.6)	2
1	3	1	3	4	3
4 +8 (no.3)	2	1 +16 (no.5)	2	4 +24 (no.7)	2
1	3	4	3	1	3
4 +12 (no.4)	2	4 +28 (no.9)	2	1 +4 (no.2)	2
1	3	1	3	4	3

3. 經過整理，為六階幻方

32 (no.8)	30	4 (no.1)	2	21 (no.6)	22
29	31	1	3	24	23
12 (no.3)	10	17 (no.5)	18	28 (no.7)	26
9	11	20	19	25	27
16 (no.4)	14	36 (no.9)	34	5 (no.2)	6
13	15	33	35	8	7

32	30	4	2	21
29	31	1	3	24
12	10	17	18	28
9	11	20	19	25
16	14	36	34	5
13	15	33	35	8

四、幻方與 KenKen 數字可能的延伸變化

本研究先以排列組合方式來找出 KenKen 與幻方的子方陣變化個數，接著以逆時針將子方陣分別旋轉 90 度、180 度與 270 度，逐漸延伸每一階層幻方與 KenKen 的數字排列變化。

(一)三階幻方:8(2*4=8)種數字變化排列

1.逆時針旋轉 0 度

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2.逆時針旋轉 90 度

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

3.逆時針旋轉 180 度

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

3.逆時針旋轉 270 度

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

所以，有 8(2*4=8)組幻方是符合每一列、行與對角線之和為 15 的規則。

(二)三階 KenKen:12 種數字變化排列

1.分別以逆時針旋轉 0、90、180、270 度且刪除重複，出現了以下 12 種相同排列數字組合的 3 階 KenKen 子方陣。

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	3	2
2	1	3
3	2	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	2	1
1	3	2
2	1	3

3	1	2
2	3	1
1	2	3

1	2	3
3	1	2
2	3	1

2	3	1
1	2	3
3	1	2

2	1	3
1	3	2
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

(三)四階幻方:32(8*4)種數字變化排列

1. 逆時針旋轉 0 度

經整理，有以下 8 種幻方。

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

2	13	16	3
11	8	5	10
7	12	9	6
14	1	4	15

3	13	16	2
10	8	5	11
6	12	9	7
15	1	4	14

3	16	13	2
10	5	8	11
6	9	12	7
15	4	1	14

13	2	3	16
8	11	10	5
12	7	6	9
1	14	15	4

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

2. 逆時針旋轉 90 度

13	8	12	1
3	10	6	15
2	11	7	14
16	5	9	4

13	8	12	1
2	11	4	14
3	10	6	15
16	5	9	4

3	10	6	15
13	8	12	1
16	5	9	4
2	11	7	14

3	10	6	15
16	5	9	4
13	8	12	1
2	11	7	14

2	11	7	14
16	5	9	4
13	8	12	1
3	10	6	15

2	11	7	14
13	8	12	1
16	5	9	4
3	10	6	15

16	5	9	4
3	10	6	15
2	11	7	14
13	8	12	1

16	5	9	4
2	11	7	14
3	10	6	15
13	8	12	1

3. 逆時針旋轉 180 度

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1	14	15	4
12	4	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

15	1	4	14
6	12	9	7
10	8	5	11
3	13	16	2

15	4	1	14
6	9	12	7
10	5	8	11
3	16	13	2

14	4	1	15
7	9	12	6
11	5	8	10
2	16	13	3

14	1	4	15
7	12	9	6
11	8	5	10
2	13	16	3

4	15	14	1
9	6	7	12
5	10	11	8
16	3	2	13

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

4. 逆時針旋轉 270 度

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

4	9	5	16
15	6	10	3
14	4	11	2
1	12	8	13

14	7	11	2
4	9	5	16
1	12	8	13
15	6	10	3

14	7	11	2
1	12	8	13
4	9	5	16
15	6	10	3

15	6	10	3
1	12	8	13
4	9	5	16
14	7	11	2

15	6	10	3
4	9	5	16
1	12	8	13
14	7	11	2

1	12	8	13
14	7	11	2
15	6	10	3
4	9	5	16

1	12	8	13
15	6	10	3
14	7	11	2
4	9	5	16

最後整理，總共 $8 \times 4 = 32$ 組幻方是符合每一列、行與對角線之和為 34 的規則。

(四)四階 KenKen:44 種數字變化排列

1.逆時針旋轉0度

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

E

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

A

1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	1	3
4	2	3	1

C

1	3	4	2
3	1	2	4
2	4	3	1
4	2	1	3

G

1	4	2	3
3	2	4	1
2	3	1	4
4	1	3	2

G

1	4	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3

A

2	1	3	4
4	3	1	2
1	2	4	3
3	4	2	1

A

2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4
3	4	1	2

E

2	3	1	4
4	1	3	2
1	4	2	3
3	2	4	1

G

2	3	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2
3	2	1	4

A

2	4	1	3
4	2	3	1
1	3	2	4
3	1	4	2

C

2	4	3	1
4	2	1	3
1	3	4	2
3	1	2	4

G

3	1	2	4
1	3	4	2
4	2	1	3
2	4	3	1

G

3	1	4	2
1	3	2	4
4	2	3	1
2	4	1	3

C

3	2	1	4
1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1

A

3	2	4	1
1	4	2	3
4	1	3	2
2	3	1	4

G

3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3

E

3	4	2	1
1	2	4	3
4	3	1	2
2	1	3	4

A

4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4
1	4	3	2

A

4	1	3	2
2	3	1	4
3	2	4	1
1	4	2	3

G

4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4
1	3	4	2

G

4	2	3	1
2	4	1	3
3	1	4	2
1	3	2	4

C

4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1
1	2	4	3

A

4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4

E

2.逆時針旋轉 90 度

4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4

E

3	1	4	2
4	2	3	1
2	4	1	3
1	3	2	4

A

4	2	3	1
2	4	1	3
3	1	4	2
1	3	2	4

D

2	4	1	3
4	2	3	1
3	1	4	2
1	3	2	4

G

3	1	4	2
2	4	1	3
4	2	3	1
1	3	2	4

G

2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1
1	3	2	4

A

4	2	3	1
3	1	4	2
1	3	2	4
2	4	1	3

A

3	1	4	2
4	2	3	1
1	3	2	4
2	4	1	3

E

4	2	3	1
1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	1	3

G

1	3	2	4
4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3

A

3	1	4	2
1	3	2	4
4	2	3	1
2	4	1	3

D

1	3	2	4
3	1	4	2
4	2	3	1
2	4	1	3

G

4	2	3	1
2	4	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2

G

2	4	1	3
4	2	3	1
1	3	2	4
3	1	4	2

D

4	2	3	1
1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2

A

1	3	2	4
4	2	3	1
2	4	1	3
3	1	4	2

G

2	4	1	3
1	3	2	4
4	2	3	1
3	1	4	2

E

1	3	2	4
2	4	1	3
4	2	3	1
3	1	4	2

A

3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4
4	2	3	1

A

2	4	1	3
3	1	4	2
1	3	2	4
4	2	3	1

G

3	1	4	2
1	3	2	4
2	4	1	3
4	2	3	1

G

1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	1	3
4	2	3	1

D

2	4	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
4	2	3	1

A

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

E

3.逆時針旋轉 180 度:以此類推...

4.逆時針旋轉 270 度:以此類推...

5. 刪除重複的部分，經過整理有 44 種 KenKen 組合。

(1) A 組、B 組的對角線上，1、2、3、4 等四個數字同時出現兩次(例: 1234)

總共有 16 種($4 \times 8 - 4 \times 4 = 16$)排列數字組合。

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

1	4	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3

2	1	3	4
4	3	1	2
1	2	4	3
3	4	2	1

2	3	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2
3	2	1	4

3	2	1	4
1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1

3	4	2	1
1	2	4	3
4	3	1	2
2	1	3	4

4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4
1	4	3	2

4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1
1	2	4	3

3	1	4	2
4	2	3	1
2	4	1	3
1	3	2	4

2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1
1	3	2	4

4	2	3	1
3	1	4	2
1	3	2	4
2	4	1	3

1	3	2	4
4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3

4	2	3	1
1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2

1	3	2	4
2	4	1	3
4	2	3	1
3	1	4	2

3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4
4	2	3	1

2	4	1	3
1	3	2	4
3	1	4	2
4	2	3	1

(2) C 組、D 組的對角線上，出現了四個相同數字(例: 1111,4444)

總共有 $4(4*4-3*4=4)$ 種排列數字組合。

1	3	2	4
3	1	4	2
2	4	1	3
4	2	3	1

2	4	1	3
4	2	3	1
1	3	2	4
3	1	4	2

3	1	4	2
1	3	2	4
4	2	3	1
2	4	1	3

4	2	3	1
2	4	1	3
3	1	4	2
1	3	2	4

(3) E 組、F 組的對角線上，兩個相同數字出現了兩次(例: 2323,1414)，

總共有 $8(4*4-2*4=8)$ 種排列數字組合。

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4
3	4	1	2

3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3

4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4

4	2	3	1
3	1	4	2
2	4	1	3
1	3	2	4

3	1	4	2
4	2	3	1
1	3	2	4
2	4	1	3

2	4	1	3
1	3	2	4
4	2	3	1
3	1	4	2

1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1

(4) G 組、H 組的對角線上，相同一個數字出現了兩次(例: 1212,3434,1133,2244)，總共有 $16(4*8-4*4=16)$ 種排列數字組合。

1	3	4	2	1	4	2	3	2	3	1	4	2	4	3	1
3	1	2	4	3	2	4	1	4	1	3	2	4	2	1	3
2	4	3	1	2	3	1	4	1	4	2	3	1	3	4	2
4	2	1	3	4	1	3	2	3	2	4	1	3	1	2	4

3	1	2	4	3	2	4	1	4	1	3	2	4	2	1	3
1	3	4	2	1	4	2	3	2	3	1	4	2	4	3	1
4	2	1	3	4	1	3	2	3	2	4	1	3	1	2	4
2	4	3	1	2	3	1	4	1	4	2	3	1	3	4	2

2	4	1	3	3	1	4	2	4	2	3	1	1	3	2	4
4	2	3	1	2	4	1	3	1	3	2	4	3	1	4	2
3	1	4	2	4	2	3	1	3	1	4	2	4	2	3	1
1	3	2	4	1	3	2	4	2	4	1	3	2	4	1	3

4	2	3	1	1	3	2	4	2	4	1	3	3	1	4	2
2	4	1	3	4	2	3	1	3	1	4	2	1	3	2	4
1	3	2	4	2	4	1	3	1	3	2	4	2	4	1	3
3	1	4	2	3	1	4	2	4	2	3	1	4	2	3	1

(五)五階幻方:32(8*4) 種數字變化排列

1. 逆時針旋轉 0 度

8	15	1	17	24	8	17	1	15	24	15	8	1	24	17
14	16	7	23	5	14	23	7	16	5	16	14	7	5	23
20	22	13	4	6	20	4	13	22	6	22	20	13	6	4
21	3	19	10	12	21	10	19	3	12	3	21	19	12	10
2	9	25	11	18	2	11	25	9	18	9	2	25	18	11

15	24	1	8	17	17	8	1	24	15	17	24	1	8	15
16	5	7	14	23	23	14	7	5	16	23	5	7	14	16
22	6	13	20	4	4	20	13	6	22	4	6	13	20	22
3	12	19	21	10	10	21	19	12	3	10	12	19	21	3
9	18	25	2	11	11	2	25	18	9	11	18	25	2	9

24	15	1	17	8
5	16	7	23	14
6	22	13	4	20
12	3	19	10	21
18	9	25	11	2

24	17	1	15	8
5	23	7	16	14
6	4	13	22	20
12	10	19	3	21
18	11	25	9	2

2. 逆時針旋轉 90 度

24	5	6	12	18
17	23	4	10	11
1	7	13	19	25
15	16	22	3	9
8	14	20	21	2

24	5	6	12	18
15	16	22	3	9
1	7	13	19	25
17	23	4	10	11
8	14	20	21	2

17	23	4	10	11
24	5	6	12	18
1	7	13	19	25
8	14	20	21	2
15	16	22	3	9

17	23	4	10	11
8	14	20	21	2
1	7	13	19	25
24	5	6	12	18
15	16	22	3	9

15	16	22	3	9
24	5	6	12	18
1	7	13	19	25
8	14	20	21	2
17	23	4	10	11

15	16	22	3	9
8	14	20	21	2
1	7	13	19	25
24	5	6	12	18
17	23	4	10	11

8	14	20	21	2
17	23	4	10	11
1	7	13	19	25
15	16	22	3	9
24	5	6	12	18

8	14	20	21	2
15	16	22	3	9
1	7	13	19	25
17	23	4	10	11
24	5	6	12	18

3. 逆時針旋轉 180 度

18	11	25	9	2
12	10	19	3	21
6	4	13	22	20
5	23	7	16	14
24	17	1	15	8

18	9	25	11	2
12	3	19	10	21
6	22	13	4	20
5	16	7	23	14
24	15	1	17	8

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

11	2	25	18	9
10	21	19	12	3
4	20	13	6	22
23	14	7	5	16
17	8	1	24	15

9	18	25	2	11
3	12	19	21	10
22	6	13	20	4
16	5	7	14	23
15	24	1	8	17

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

2	11	25	9	18
21	10	19	3	12
20	4	13	22	6
14	23	7	16	5
8	17	1	15	24

2	9	25	11	18
21	3	19	10	12
20	22	13	4	6
14	16	7	23	5
8	15	1	17	24

4. 逆時針旋轉 270 度

2	21	20	14	8
9	3	22	16	15
25	19	13	7	1
11	10	4	23	17
18	12	6	5	24

2	21	20	14	8
11	10	4	23	17
25	19	13	7	1
9	3	22	16	15
18	12	6	5	24

9	3	22	16	15
2	21	20	14	8
25	19	13	7	1
18	12	6	5	24
11	10	4	23	17

9	3	22	16	15
18	12	6	5	24
25	19	13	7	1
2	21	20	14	8
11	10	4	23	17

11	10	4	23	17
2	21	20	14	8
25	19	13	7	1
18	12	6	5	24
9	3	22	16	15

11	10	4	23	17
18	12	6	5	24
25	19	13	7	1
2	21	20	14	8
9	3	22	16	15

18	12	6	5	24
9	3	22	16	15
25	19	13	7	1
11	10	4	23	17
2	21	20	14	8

18	12	6	5	24
11	10	4	23	17
25	19	13	7	1
9	3	22	16	15
2	21	20	14	8

經過整理，有 32 組幻方是符合每一列、行與對角線之和為 65 的規則。

(六)五階 KenKen: 460(120*4-5*4)種數字變化排列

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

五階 KenKen 逆時針旋轉 0、90、180、270 度的子陣列為共計有 480(120*4)種。為了比對重複的子陣列的組合數字，以左圖為例，可將表格整理為"12345+23451+34512+45123+51234"進行篩選剔除。經過整理，刪除了 20(5*4)個重複子陣列。所以，五階 KenKen 的子陣列排列組合有 460(120*4-5*4)種。

以下為經過篩選剔除後而整理之五階 KenKen 列表

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 12345+23451+45123+34512+51234 | 14235+25341+31452+42513+53124 |
| 12345+23451+45123+51234+34512 | 14235+53124+42513+31452+25341 |
| 12345+34512+45123+23451+51234 | 14253+25314+31425+42531+53142 |
| 12345+34512+45123+51234+23451 | 14253+53142+42531+31425+25314 |
| 12345+45123+34512+23451+51234 | 14325+25431+31542+42153+53214 |
| 12345+45123+34512+51234+23451 | 14352+25413+31524+42135+53241 |
| 12345+51234+34512+23451+45123 | 14523+53412+42351+31245+25134 |
| 12345+51234+34512+45123+23451 | 14532+53421+42315+31254+25143 |
| 12345+51234+45123+34512+23451 | 15234+21345+32451+43512+54123 |
| ... | ... |

(七)六階幻方:32(8*4) 種數字變化排列

1. 逆時針旋轉 0 度

22	21	2	4	30	32
23	24	3	1	31	29
26	28	18	17	10	12
27	25	19	20	11	9
6	5	34	36	14	16
7	8	35	33	15	13

21	22	4	2	32	30
24	23	1	3	29	31
28	26	17	18	12	10
25	27	20	19	9	11
5	6	36	34	16	14
8	7	33	35	13	15

21	30	4	2	32	22
24	31	1	3	29	23
28	10	17	18	12	26
25	11	20	19	9	27
5	14	36	34	16	6
8	15	33	35	13	7

30	21	2	4	22	32
31	24	3	1	23	29
10	28	18	17	26	12
11	25	19	20	27	9
14	5	34	36	6	16
15	8	35	33	7	13

22	32	2	4	30	21
23	29	3	1	31	24
26	12	18	17	10	28
27	9	19	20	11	25
6	16	34	36	14	5
7	13	35	33	15	8

30	32	2	4	22	21
31	29	3	1	23	24
10	12	18	17	26	28
11	9	19	20	27	25
14	16	34	36	6	5
15	13	35	33	7	8

32	22	4	2	21	30
29	23	1	3	24	31
12	26	17	18	28	10
9	27	20	19	25	11
16	6	36	34	5	14
13	7	33	35	8	15

32	30	4	2	21	22
29	31	1	3	24	23
12	10	17	18	28	26
9	11	20	19	25	27
16	14	36	34	5	6
13	15	33	35	8	7

2. 逆時針旋轉 90 度

32	29	12	9	16	13
30	31	10	11	14	15
4	1	17	20	36	33
2	3	18	19	34	35
21	24	28	25	5	8
22	23	26	27	6	7

30	31	10	11	14	15
32	29	12	9	16	13
2	3	18	19	34	35
4	1	17	20	36	33
22	23	26	27	6	7
21	24	28	25	5	8

22	23	26	27	6	7
32	29	12	9	16	13
2	3	18	19	34	35
4	1	17	20	36	33
30	31	10	11	14	15
21	24	28	25	5	8

32	29	12	9	16	13
22	23	26	27	6	7
4	1	17	20	36	33
2	3	18	19	34	35
21	24	28	25	5	8
30	31	10	11	14	15

21	24	28	25	5	8
30	31	10	11	14	15
4	1	17	20	36	33
2	3	18	19	34	35
32	29	12	9	16	13
22	23	26	27	6	7

21	24	28	25	5	8
22	23	26	27	6	7
4	1	17	20	36	33
2	3	18	19	34	35
32	29	12	9	16	13
30	31	10	11	14	15

30	31	10	11	14	15
21	24	28	25	5	8
2	3	18	19	34	35
4	1	17	20	36	33
22	23	26	27	6	7
32	29	12	9	16	13

22	23	26	27	6	7
21	24	28	25	5	8
2	3	18	19	34	35
4	1	17	20	36	33
30	31	10	11	14	15
32	29	12	9	16	13

3. 逆時針旋轉 180 度

13	15	33	35	8	7
16	14	36	34	5	6
9	11	20	19	25	27
12	10	17	18	28	26
29	31	1	3	24	23
32	30	4	2	21	22

15	13	35	33	7	8
14	16	34	36	6	5
11	9	19	20	27	25
10	12	18	17	26	28
31	29	3	1	23	24
30	32	2	4	22	21

7	13	35	33	15	8
6	16	34	36	14	5
27	9	19	20	11	25
26	12	18	17	10	28
23	29	3	1	31	24
22	32	2	4	30	21

13	7	33	35	8	15
16	6	36	34	5	14
9	27	20	19	25	11
12	26	17	18	28	10
29	23	1	3	24	31
32	22	4	2	21	30

8	15	33	35	13	7
5	14	36	34	16	6
25	11	20	19	9	27
28	10	17	18	12	26
24	31	1	3	29	23
21	30	4	2	32	22

8	7	33	35	13	15
5	6	36	34	16	14
25	27	20	19	9	11
28	26	17	18	12	10
24	23	1	3	29	31
21	22	4	2	32	30

15	8	35	33	7	13
14	5	34	36	6	16
11	25	19	20	27	9
10	28	18	17	26	12
31	24	3	1	23	29
30	21	2	4	22	32

7	8	35	33	15	13
6	5	34	36	14	16
27	25	19	20	11	9
26	28	18	17	10	12
23	24	3	1	31	29
22	21	2	4	30	32

4. 逆時針旋轉 270 度

7	6	27	26	23	22
8	5	25	28	24	21
35	34	19	18	3	2
33	36	20	17	1	4
15	14	11	10	31	30
13	16	9	12	29	32

8	5	25	28	24	21
7	6	27	26	23	22
33	36	20	17	1	4
35	34	19	18	3	2
13	16	9	12	29	32
15	14	11	10	31	30

8	5	25	28	24	21
15	14	11	10	31	30
33	36	20	17	1	4
35	34	19	18	3	2
13	16	9	12	29	32
7	6	27	26	23	22

15	14	11	10	31	30
8	5	25	28	24	21
35	34	19	18	3	2
33	36	20	17	1	4
7	6	27	26	23	22
13	16	9	12	29	32

7	6	27	26	23	22
13	16	9	12	29	32
35	34	19	18	3	2
33	36	20	17	1	4
15	14	11	10	31	30
8	5	25	28	24	21

15	14	11	10	31	30
13	16	9	12	29	32
35	34	19	18	3	2
33	36	20	17	1	4
7	6	27	26	23	22
8	5	25	28	24	21

13	16	9	12	29	32
7	6	27	26	23	22
33	36	20	17	1	4
35	34	19	18	3	2
8	5	25	28	24	21
15	14	11	10	31	30

13	16	9	12	29	32
15	14	11	10	31	30
33	36	20	17	1	4
35	34	19	18	3	2
8	5	25	28	24	21
7	6	27	26	23	22

(八) 六階 KenKen: $2872 (720 \cdot 4 - 2 \cdot 4)$ 種數字變化排列

2	3	1	5	6	4
3	1	2	6	4	5
1	2	3	4	5	6
5	6	4	2	3	1
6	4	5	3	1	2
4	5	6	1	2	3

六階 KenKen 逆時針旋轉 0、90、180、270 度的子陣列為共計有 $2880(720 \cdot 4)$ 種。為了比對重複的子陣列的組合數字，以上面表格為例，可將表格整理為 "231564+312645+123456+564231+645312+456123" 進行篩選剔除。經過整理，刪除了 $8(2 \cdot 4)$ 個重複子陣列。所以，六階 KenKen 的子陣列排列組合有 $2872 (720 \cdot 4 - 2 \cdot 4)$ 種。

(九)計算 n 階幻方與 KenKen 子方陣的排列組合數

1. 幻方的子方陣變化個數:三階幻方是 $8(2 \cdot 4=8)$ 種排列變化，其餘四階、五階、六階幻方... 的子方陣變化個數都維持在 $32(8 \cdot 4)$ 種。
2. KenKen 子方陣變化個數:三階 KenKen 有 12 種、四階 KenKen 有 44 種數字變化排列...

表 1、n 階幻方與 KenKen 子方陣變化個數之整理表

n 階	幻方算式	KenKen 算式
3	$2 \cdot 4=8$	$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underline{4} - 3 \cdot \underline{4} = 6 \cdot 4 - \mathbf{3} \cdot \underline{4} = 12$
4	$8 \cdot 4=32$	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underline{4} - 13 \cdot \underline{4} = 24 \cdot 4 - \mathbf{13} \cdot \underline{4} = 44$
5	$8 \cdot 4=32$	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underline{4} - 5 \cdot \underline{4} = 120 \cdot 4 - \mathbf{5} \cdot \underline{4} = 460$
6	$8 \cdot 4=32$	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underline{4} - 2 \cdot \underline{4} = 720 \cdot 4 - \mathbf{2} \cdot \underline{4} = 2872$
7	$8 \cdot 4=32$	$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \underline{4} - 1 \cdot \underline{4} = 5040 \cdot 4 - \mathbf{1} \cdot \underline{4} = 20156$
...
n	$8 \cdot 4$	$n! \cdot C_3^4 - F_n \cdot C_3^4$

在 KenKen 算式數列中，出現了 **1**、**1**、**2**、**3**、**5**、**8**、**13**、**21**、**34**、**55**、**89**、**144**、**233**...與“費波納契數列”(Fibonacci Sequence)相似，從 $3/8=0.375$ 、 $3/5=0.6$ 、 $5/3=1.666667$ 、 $5/13=0.384615$ 、 $1-5/13=0.615385$ 運算中也能發現黃金分割數列的奇妙關係。

伍、研究結論

一、KenKen 規則

(一)區塊內" $=+ - \times \div$ "加減乘除的四則運算代號，有不同的放置規則： $+$ 與 $-$ 可出現在兩個與三個數字(L形)區塊內； \times 與 \div 只出現在兩個數字區塊內。

(二)每一行或列上的數字排列關係： $"k+"$ 與 $"(n-k)+"$ 的 x,y,z 排列組數相同；每一行或列的數字和為 $n(n+1)/2$ ，數字乘積為 $n!$

(三)計算 n 階 KenKen 內 m 個區塊數值排列：在 6 階 KenKen 中，3 個區塊內數值乘積為 $"4\times"$," $6\times"$," $12\times"$," $16\times"$," $18\times"$," $20\times"$," $24\times"$," $36\times"$," $48\times"$," $72\times"$ ，三個數字皆為相異；數值乘積為 $"2\times"$," $3\times"$," $5\times"$," $8\times"$," $9\times"$," $45\times"$," $54\times"$," $32\times"$," $80\times"$," $96\times"$," $25\times"$," $50\times"$," $75\times"$," $100\times"$," $150\times"$," $108\times"$," $144\times"$," $180\times"$ ，允許 2 個重複數字。

二、以 n 階 KenKen 規律來解出 n 階幻方

(一)用 3 階 KenKen 推出 $3n(3,5,7,9,11,\dots)$ 階幻方。

(二)用 4 階 KenKen 推出 $4n(4,8,12,16,\dots)$ 或 $4n+2(6,10,14,18,\dots)$ 階幻方。

(三)將 $3n$ 、 $4n$ 、 $4n+2$ 階幻方或 KenKen 分別以逆時針 0 、 90 、 180 、 270 度旋轉，有其他多種的數字延伸變化，導出更多樣化的幻方與 KenKen。 n 階 KenKen 算式數列中，出現了費波納契數列 (Fibonacci Sequence) 的黃金分割比例的奇妙關係，很有趣!

陸、參考資料

沈康身 (2011)。歷史數學名題。新北市：稻田。

Breiter, H. (2010). KenKen Strategies. 取自 <http://www.math.uncc.edu/~hbreiter>

Davis T. (2010). Kenken For Teachers. 取自 <http://www.geometer.org/mathcircles>

其他網站資源::

<http://www.mlsite.net/neknek>

<http://www.nytimes.com/ref/crosswords/kenken.html>

<http://www.kenken.com/>